# 4. Teorie optimálního řízení

## 4.1 Nutné podmínky

**Definice.** Řekneme, že funkce $f$ je **po částech spojitá** na intervalu $\langle 0, T\rangle$, jestliže existuje dělení $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ takové, že $f|_{(t_i, t_{i+1})}$ je spojitá na $(t_i, t_{i+1})$ pro každé $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ a v krajních bodech existují vlastní limity.

Řekneme, že funkce $f$ je **po částech diferencovatelná** na intervalu $\langle 0, T\rangle$, jestliže existuje dělení $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ takové, že $f|_{(t_i, t_{i+1})}$ má na $(t_i, t_{i+1})$ vlastní derivaci a v krajních bodech existují příslušné jednostranné vlastní derivace pro každé $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

**Formulace úlohy (P3)**
**Dáno:**

- $T \in \mathbf{R}, T > 0$; $A \in \mathbf{R}$;
- $F \in \mathcal{C}(\langle 0, T\rangle \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$, $\partial_1 F$, $\partial_2 F$ jsou spojité;
- $f \in \mathcal{C}(\langle 0, T\rangle \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$, $\partial_1 f$, $\partial_2 f$ jsou spojité;
- $\mathcal{U}$ je omezený uzavřený interval.

Hledáme $y$ po částech diferencovatelnou na intervalu $\langle 0, T\rangle$ a $u$ po částech spojitou na $\langle 0, T\rangle$ takové, že

- $y(0) = A$,
- $y'(t) = f(t, y(t), u(t))$ pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$ vyjma konečné množiny,
- $u(t) \in \mathcal{U}$ pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$,
- $\displaystyle\int_0^T F(t, y(t), u(t))dt$ je maximální.

**Věta 1 (Pontrjaginův princip maxima).** Nechť $u$ je bod maxima v úloze (P3). Pak existuje funkce $t \mapsto \lambda(t)$, že pro $H(t, y, u, \lambda) = F(t, y, u) + \lambda f(t, y, u)$ (tzv. **hamiltonián**) platí:

(PM1) pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$ vyjma konečné množiny a pro každé $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ platí

$$H(t, y(t), u(t), \lambda(t)) \geq H(t, y(t), \tilde{u}, \lambda(t)),$$

(PM2) $y' = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda}$ **(stavová rovnice)**,

(PM3) $\lambda' = -\dfrac{\partial H}{\partial y}$ **(pohybová rovnice)**,

(PM4) $\lambda(T) = 0$ **(podmínka transverzality)**.

## 4.2 Postačující podmínky

**Věta 2.** Princip maxima je postačující podmínkou pro extrém v úloze (P3), jestliže

- $F$ a $f$ jsou diferencovatelné,
- $F$ a $f$ jsou konkávní v $(y, u)$,
- buď $f$ je lineární v $y$ a v $u$ nebo $\lambda(t) \geq 0$ pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$.