3. Postačující podmínky pro extrém

3.1 Globální extrémy

Definice. Nechť X je vektorový prostor a $V : X \to \mathbf{R}$ je funkcionál. Řekneme, že V je **konkávní** (resp. **konvexní**) na X, jestliže

$$\forall x, y \in X \, \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : \ V(tx + (1-t)y) \geq tV(x) + (1-t)V(y)$$

(resp.

$$\forall x, y \in X \, \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : \ V(tx + (1-t)y) \leq tV(x) + (1-t)V(y)).$$

Věta 8. Nechť $V : X \to \mathbf{R}$ je konkávní. Jestliže $\delta V(x, h) = 0$ pro každé $h \in X$, pak V má v x maximum.

Věta 9. Nechť $F \in \mathcal{C}^2(\langle 0, T \rangle \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$.

(K) Nechť pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$ je funkce $[y, y'] \mapsto F(t, y, y')$ konkávní.

Pak je funkcionál $V : \mathcal{C}^1(\langle 0, T \rangle) \to \mathbf{R}$ definovaný předpisem

$$V : y \mapsto \int_0^T F(t, y, y') dt$$

konkávní.

Věta 10. Nechť F v (P1) splňuje (K). Pak je (ER1) postačující podmínkou pro maximum.

3.2 Postačující podmínky pro lokální extrém

Definice. **Normovaným lineárním prostorem** rozumíme dvojici $(X, ||.||)$, kde X je vektorový prostor (nad $\mathbf{R}$) a $||.||$ je **norma na** X, tj. zobrazení $||.|| : X \to \langle 0, +\infty)$ splňující

- $\forall x \in X : ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = \boldsymbol{o}$,
- $\forall x \in X \, \forall \lambda \in \mathbf{R} : \ ||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$,
- $\forall x, y \in X : \ ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Definice. Nechť $(X, ||.||)$ je normovaný lineární prostor, $f : X \to \mathbf{R}$ a $x_0 \in X$. Řekneme, že f má v bodě x_0

- **lokální maximum**, jestliže existuje $r > 0$ takové, že

$$\forall x \in X, ||x - x_0|| < r : \ f(x) \leq f(x_0);$$

- **ostré lokální maximum**, jestliže existuje $r > 0$ takové, že

$$\forall x \in X, 0 < ||x - x_0|| < r : \ f(x) < f(x_0).$$

Analogicky definujeme **lokální minimum** a **ostré lokální minimum**.

Věta 11. Nechť y řeší (ER1) v úloze (P1). Jestliže je matice

$$\begin{pmatrix} F_{yy}(t, y(t), y'(t)) & F_{yy'}(t, y(t), y'(t)) \\ F_{yy'}(t, y(t), y'(t)) & F_{y'y'}(t, y(t), y'(t)) \end{pmatrix}$$

negativně definitní pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$, pak y je bodem ostrého lokálního maxima.