Definice

Řekneme, že funkce f je **po částech spojitá** na intervalu $\langle 0, T \rangle$, jestliže existuje dělení $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ takové, že $f|_{(t_i, t_{i+1})}$ je spojitá na (t_i, t_{i+1}) pro každé $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ a v krajních bodech existují vlastní limity.

Teorie optimálního řízení

Definice

Řekneme, že funkce f je **po částech spojitá** na intervalu $\langle 0, T\rangle$, jestliže existuje dělení $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ takové, že $f|_{(t_i, t_{i+1})}$ je spojitá na (t_i, t_{i+1}) pro každé $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ a v krajních bodech existují vlastní limity.

Řekneme, že funkce f je **po částech diferencovatelná** na intervalu $\langle 0, T\rangle$, jestliže existuje dělení $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ takové, že $f|_{(t_i, t_{i+1})}$ má na (t_i, t_{i+1}) vlastní derivaci a v krajních bodech existují příslušné jednostranné vlastní derivace pro každé $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.

Formulace úlohy (P3)

Dáno:

- $T \in \mathbf{R}, T > 0; A \in \mathbf{R};$

Formulace úlohy (P3)

Dáno:

- $T \in \mathbf{R}, T > 0$; $A \in \mathbf{R}$;
- $F \in \mathcal{C}(\langle 0, T\rangle \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$, $\partial_1 F$, $\partial_2 F$ jsou spojité;

Formulace úlohy (P3)

Dáno:

- $T \in \mathbf{R}, T > 0; A \in \mathbf{R}$;
- $F \in \mathcal{C}(\langle 0, T\rangle \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$, $\partial_1 F$, $\partial_2 F$ jsou spojité;
- $f \in \mathcal{C}(\langle 0, T\rangle \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$, $\partial_1 f$, $\partial_2 f$ jsou spojité;

Formulace úlohy (P3)

Dáno:

- $T \in \mathbf{R}, T > 0$; $A \in \mathbf{R}$;
- $F \in \mathcal{C}(\langle 0, T\rangle \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$, $\partial_1 F$, $\partial_2 F$ jsou spojité;
- $f \in \mathcal{C}(\langle 0, T\rangle \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$, $\partial_1 f$, $\partial_2 f$ jsou spojité;
- $\mathcal{U}$ je omezený uzavřený interval.

Formulace úlohy (P3)

Dáno:

- $T \in \mathbf{R}, T > 0$; $A \in \mathbf{R}$;
- $F \in \mathcal{C}(\langle 0, T\rangle \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$, $\partial_1 F$, $\partial_2 F$ jsou spojité;
- $f \in \mathcal{C}(\langle 0, T\rangle \times \mathbf{R} \times \mathbf{R})$, $\partial_1 f$, $\partial_2 f$ jsou spojité;
- $\mathcal{U}$ je omezený uzavřený interval.

Formulace úlohy (P3)

Hledáme y po částech diferencovatelnou na intervalu $\langle 0, T\rangle$ a u po částech spojitou na $\langle 0, T\rangle$ takové, že

Formulace úlohy (P3)

Hledáme y po částech diferencovatelnou na intervalu $\langle 0, T \rangle$ a u po částech spojitou na $\langle 0, T \rangle$ takové, že

- $y(0) = A$,

Formulace úlohy (P3)

Hledáme y po částech diferencovatelnou na intervalu $\langle 0, T\rangle$ a u po částech spojitou na $\langle 0, T\rangle$ takové, že

- $y(0) = A$,
- $y'(t) = f(t, y(t), u(t))$ pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$ vyjma konečné množiny,

Formulace úlohy (P3)

Hledáme y po částech diferencovatelnou na intervalu $\langle 0, T\rangle$ a u po částech spojitou na $\langle 0, T\rangle$ takové, že

- $y(0) = A$,
- $y'(t) = f(t, y(t), u(t))$ pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$ vyjma konečné množiny,
- $u(t) \in \mathcal{U}$ pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$,

Formulace úlohy (P3)

Hledáme y po částech diferencovatelnou na intervalu $\langle 0, T\rangle$ a u po částech spojitou na $\langle 0, T\rangle$ takové, že

- $y(0) = A$,
- $y'(t) = f(t, y(t), u(t))$ pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$ vyjma konečné množiny,
- $u(t) \in \mathcal{U}$ pro každé $t \in \langle 0, T\rangle$,
- $\displaystyle\int_0^T F(t, y(t), u(t))dt$ je maximální.

Pontrjaginův princip maxima

Věta 1.
Nechť u je bod maxima v úloze (P3). Pak existuje funkce $t \mapsto \lambda(t)$, že pro $H(t, y, u, \lambda) = F(t, y, u) + \lambda f(t, y, u)$ (tzv. **hamiltonián**) platí:

Pontrjaginův princip maxima

Věta 1.
Nechť u je bod maxima v úloze (P3). Pak existuje funkce $t \mapsto \lambda(t)$, že pro $H(t, y, u, \lambda) = F(t, y, u) + \lambda f(t, y, u)$ (tzv. **hamiltonián**) platí:

(PM1) pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$ vyjma konečné množiny a pro každé $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ platí

$$H(t, y(t), u(t), \lambda(t)) \geq H(t, y(t), \tilde{u}, \lambda(t)),$$

Pontrjaginův princip maxima

Věta 1.
Nechť u je bod maxima v úloze (P3). Pak existuje funkce $t \mapsto \lambda(t)$, že pro $H(t,y,u,\lambda) = F(t,y,u) + \lambda f(t,y,u)$ (tzv. **hamiltonián**) platí:

(PM1) pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$ vyjma konečné množiny a pro každé $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ platí

$$H(t,y(t),u(t),\lambda(t)) \geq H(t,y(t),\tilde{u},\lambda(t)),$$

(PM2) $y' = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda}$ **(stavová rovnice)**,

Pontrjaginův princip maxima

Věta 1.
Nechť u je bod maxima v úloze (P3). Pak existuje funkce $t \mapsto \lambda(t)$, že pro $H(t, y, u, \lambda) = F(t, y, u) + \lambda f(t, y, u)$ (tzv. **hamiltonián**) platí:

(PM1) pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$ vyjma konečné množiny a pro každé $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ platí

$$H(t, y(t), u(t), \lambda(t)) \geq H(t, y(t), \tilde{u}, \lambda(t)),$$

(PM2) $y' = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda}$ **(stavová rovnice)**,

(PM3) $\lambda' = -\dfrac{\partial H}{\partial y}$ **(pohybová rovnice)**,

Pontrjaginův princip maxima

Věta 1.
Nechť u je bod maxima v úloze (P3). Pak existuje funkce $t \mapsto \lambda(t)$, že pro $H(t, y, u, \lambda) = F(t, y, u) + \lambda f(t, y, u)$ (tzv. **hamiltonián**) platí:

(PM1) pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$ vyjma konečné množiny a pro každé $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ platí

$$H(t, y(t), u(t), \lambda(t)) \geq H(t, y(t), \tilde{u}, \lambda(t)),$$

(PM2) $y' = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda}$ **(stavová rovnice)**,

(PM3) $\lambda' = -\dfrac{\partial H}{\partial y}$ **(pohybová rovnice)**,

(PM4) $\lambda(T) = 0$ **(podmínka transverzality)**.

4.2 Postačující podmínky

Věta 2.
Princip maxima je postačující podmínkou pro extrém v úloze (P3), jestliže

- F a f jsou diferencovatelné,

4.2 Postačující podmínky

Věta 2.
Princip maxima je postačující podmínkou pro extrém v úloze (P3), jestliže

- F a f jsou diferencovatelné,
- F a f jsou konkávní v (y, u),

4.2 Postačující podmínky

Věta 2.
Princip maxima je postačující podmínkou pro extrém v úloze (P3), jestliže

- F a f jsou diferencovatelné,
- F a f jsou konkávní v (y, u),
- buď f je lineární v y a v u nebo $\lambda(t) \geq 0$ pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$.

4.3 Problémy s více stavovými proměnnými

Formulace úlohy (P3')

Dáno:

- $T \in \mathbf{R}, T > 0$; $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbf{R}^n$;

4.3 Problémy s více stavovými proměnnými

Formulace úlohy (P3')

Dáno:

- $T \in \mathbf{R}, T > 0$; $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbf{R}^n$;
- $F \in \mathcal{C}^1(\langle 0, T\rangle \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m)$;

Formulace úlohy (P3')
Dáno:

- $T \in \mathbf{R}, T > 0$; $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbf{R}^n$;
- $F \in \mathcal{C}^1(\langle 0, T\rangle \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m)$;
- $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^1(\langle 0, T\rangle \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$;

Formulace úlohy (P3')

Dáno:

- $T \in \mathbf{R}, T > 0$; $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbf{R}^n$;
- $F \in \mathcal{C}^1(\langle 0, T\rangle \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m)$;
- $\boldsymbol{f} \in \mathcal{C}^1(\langle 0, T\rangle \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$;
- $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_m \subset \mathbf{R}$.

4.3 Problémy s více stavovými proměnnými

Hledáme $\boldsymbol{y} = [y_1, \ldots, y_n]$, kde složky jsou po částech diferencovatelné funkce na intervalu $\langle 0, T \rangle$,

4.3 Problémy s více stavovými proměnnými

Hledáme $\boldsymbol{y} = [y_1, \ldots, y_n]$, kde složky jsou po částech diferencovatelné funkce na intervalu $\langle 0, T \rangle$, a funkci $\boldsymbol{u} = [u_1, \ldots, u_m]$ s po částech spojitými složkami na $\langle 0, T \rangle$ takové, že

4.3 Problémy s více stavovými proměnnými

Hledáme $\boldsymbol{y} = [y_1, \ldots, y_n]$, kde složky jsou po částech diferencovatelné funkce na intervalu $\langle 0, T \rangle$, a funkci $\boldsymbol{u} = [u_1, \ldots, u_m]$ s po částech spojitými složkami na $\langle 0, T \rangle$ takové, že

- $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}^0$,

4.3 Problémy s více stavovými proměnnými

Hledáme $\boldsymbol{y} = [y_1, \ldots, y_n]$, kde složky jsou po částech diferencovatelné funkce na intervalu $\langle 0, T \rangle$, a funkci $\boldsymbol{u} = [u_1, \ldots, u_m]$ s po částech spojitými složkami na $\langle 0, T \rangle$ takové, že

- $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}^0$,
- $\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{u}(t))$ pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$ vyjma konečné množiny,

4.3 Problémy s více stavovými proměnnými

Hledáme $\boldsymbol{y} = [y_1, \dots, y_n]$, kde složky jsou po částech diferencovatelné funkce na intervalu $\langle 0, T \rangle$, a funkci $\boldsymbol{u} = [u_1, \dots, u_m]$ s po částech spojitými složkami na $\langle 0, T \rangle$ takové, že

- $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}^0$,
- $\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{u}(t))$ pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$ vyjma konečné množiny,
- $u_j(t) \in \mathcal{U}_j$ pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$, $j = 1, \dots, m$,

4.3 Problémy s více stavovými proměnnými

Hledáme $\boldsymbol{y} = [y_1, \ldots, y_n]$, kde složky jsou po částech diferencovatelné funkce na intervalu $\langle 0, T \rangle$, a funkci $\boldsymbol{u} = [u_1, \ldots, u_m]$ s po částech spojitými složkami na $\langle 0, T \rangle$ takové, že

- $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}^0$,
- $\boldsymbol{y}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{u}(t))$ pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$ vyjma konečné množiny,
- $u_j(t) \in \mathcal{U}_j$ pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$, $j = 1, \ldots, m$,
- $\displaystyle\int_0^T F(t, \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{u}(t))dt$ je maximální.

Věta 3 (Pontrjaginův princip maxima pro úlohu (P3')).
Nechť vektorová funkce $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_m)$ je bodem maxima v úloze (P3').

Věta 3 (Pontrjaginův princip maxima pro úlohu (P3')). Nechť vektorová funkce $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_m)$ je bodem maxima v úloze (P3'). Pak existuje vektorová funkce $\boldsymbol{\lambda} : \langle 0, T\rangle \to \mathbf{R}^n$, že pro hamiltonián

$$H(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\lambda}) = F(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{u})$$

platí:

(PM1) pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$ vyjma konečné množiny a pro každé $\tilde{\boldsymbol{u}} \in \mathcal{U}_1 \times \cdots \times \mathcal{U}_m$ platí

$$H(t, \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) \geq H(t, \boldsymbol{y}(t), \tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\lambda}(t)),$$

(PM1) pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$ vyjma konečné množiny a pro každé $\tilde{\boldsymbol{u}} \in \mathcal{U}_1 \times \cdots \times \mathcal{U}_m$ platí

$$H(t, \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) \geq H(t, \boldsymbol{y}(t), \tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\lambda}(t)),$$

(PM2) $y_i' = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda_i}$, $i = 1, \ldots, n$ **(stavová rovnice),**

4.3 Problémy s více stavovými proměnnými

(PM1) pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$ vyjma konečné množiny a pro každé $\tilde{\boldsymbol{u}} \in \mathcal{U}_1 \times \cdots \times \mathcal{U}_m$ platí

$$H(t, \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) \geq H(t, \boldsymbol{y}(t), \tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\lambda}(t)),$$

(PM2) $y_i' = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda_i}$, $i = 1, \ldots, n$ **(stavová rovnice),**

(PM3) $\lambda_i' = -\dfrac{\partial H}{\partial y_i}$, $i = 1, \ldots, n$ **(pohybová rovnice),**

4.3 Problémy s více stavovými proměnnými

(PM1) pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$ vyjma konečné množiny a pro každé $\tilde{\boldsymbol{u}} \in \mathcal{U}_1 \times \cdots \times \mathcal{U}_m$ platí

$$H(t, \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) \geq H(t, \boldsymbol{y}(t), \tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\lambda}(t)),$$

(PM2) $y_i' = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda_i}, \; i = 1, \ldots, n$ **(stavová rovnice),**

(PM3) $\lambda_i' = -\dfrac{\partial H}{\partial y_i}, \; i = 1, \ldots, n$ **(pohybová rovnice),**

(PM4) $\lambda_i(T) = 0, \; i = 1, \ldots, n$ **(podmínka transverzality).**

4.3 Problémy s více stavovými proměnnými

(PM1) pro každé $t \in \langle 0, T \rangle$ vyjma konečné množiny a pro každé $\tilde{\boldsymbol{u}} \in \mathcal{U}_1 \times \cdots \times \mathcal{U}_m$ platí

$$H(t, \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) \geq H(t, \boldsymbol{y}(t), \tilde{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{\lambda}(t)),$$

(PM2) $y_i' = \dfrac{\partial H}{\partial \lambda_i}, \; i = 1, \dots, n$ **(stavová rovnice),**

(PM3) $\lambda_i' = -\dfrac{\partial H}{\partial y_i}, \; i = 1, \dots, n$ **(pohybová rovnice),**

(PM4) $\lambda_i(T) = 0, \; i = 1, \dots, n$ **(podmínka transverzality).**