13 Diferenční rovnice

Definice. Nechť $k \in \mathbf{N}$. **Lineární diferenční rovnicí k-tého řádu s konstantními koeficienty** budeme rozumět rovnici

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = a_n, \qquad n \in \mathbf{N}, \tag{13.1}$$

kde neznámou je posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$, přičemž $p_1, \ldots, p_k \in \mathbf{R}$, $p_k \neq 0$ jsou dána, stejně jako posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Řešením rovnice (13.1) rozumíme každou posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$ splňující (1) pro každé $n \in \mathbf{N}$. Pokud chceme, aby řešení rovnice (13.1) splňovalo podmínky

$$y(1) = y_1, \ldots, y(k) = y_k, \tag{13.2}$$

kde $y_1, \ldots, y_k$ jsou dána (tzv. **počáteční podmínky**), pak hovoříme o **počáteční úloze**.

Pokud $a_n = 0$ pro každé $n \in \mathbf{N}$, pak (13.1)) má tvar

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = 0, \qquad n \in \mathbf{N}. \tag{13.3}$$

Tato rovnice se nazývá **homogenní**.

Věta 13.1. *Počáteční úloha* (13.1), (13.2) *má právě jedno řešení.*

Věta 13.2. *Množina řešení rovnice* (13.3) *tvoří vektorový podprostor dimenze k prostoru všech reálných posloupností.*

Definice. **Charakteristickým polynomem** rovnice (13.1) budeme rozumět polynom

$$\lambda \mapsto \lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + \cdots + p_{k-1}\lambda + p_k.$$

Věta 13.3. *Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ jsou všechny navzájem různé reálné kořeny charakteristického polynomu rovnice* (13.1) *s násobnostmi $r_1, \ldots, r_s$. Nechť $\xi_1, \ldots, \xi_l$ jsou všechny navzájem různé komplexní kořeny charakteristického polynomu rovnice* (13.1) *s kladnou imaginární částí a násobnostmi q_1, …, q_l, přičemž pro $j = 1, \ldots, l$ platí $\xi_j = \mu_j(\cos\nu_j + i\sin\nu_j)$. Pak následující posloupnosti tvoří bázi prostoru řešení (3).*

$$\begin{array}{cccc}
\{\lambda_1^n\}, & \{n\lambda_1^n\}, & \ldots & \{n^{r_1-1}\lambda_1^n\}, \\
\vdots & & & \\
\{\lambda_s^n\}, & \{n\lambda_s^n\}, & \ldots & \{n^{r_s-1}\lambda_s^n\}, \\
\{\mu_1^n \cos\nu_1 n\}, & \{n\mu_1^n \cos\nu_1 n\}, & \ldots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n \cos\nu_1 n\}, \\
\{\mu_1^n \sin\nu_1 n\}, & \{n\mu_1^n \sin\nu_1 n\}, & \ldots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n \sin\nu_1 n\}, \\
\vdots & & & \\
\{\mu_l^n \cos\nu_l n\}, & \{n\mu_l^n \cos\nu_l n\}, & \ldots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n \cos\nu_l n\}, \\
\{\mu_l^n \sin\nu_l n\}, & \{n\mu_l^n \sin\nu_l n\}, & \ldots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n \sin\nu_l n\}
\end{array}$$

Konec 1. přednášky, 19. 2. 2018

Věta 13.4. *Nechť posloupnosti* $\{y^1(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y^2(n)\}_{n=1}^{\infty}$, $\dots$, $\{y^k(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *tvoří fundamentální systém řešení* (13.3). *Nechť posloupnost* $\{z(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *je řešením* (13.1). *Potom posloupnost* $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *řeší* (13.1)*, právě když existují konstanty* $c_1, \dots, c_k \in \mathbf{R}$ *takové, že*

$$y(n) = z(n) + c_1 y^1(n) + \dots + c_k y^k(n)$$

pro každé $n \in \mathbf{N}$.

Věta 13.5. *Nechť posloupnost* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *v rovnici* (13.1) *splňuje*

$$a_n = \alpha^n \big(P(n)\cos(\nu n) + Q(n)\sin(\nu n)\big),$$

kde $\alpha > 0$, P, Q *jsou polynomy. Pak existuje řešení* (13.1) *ve tvaru*

$$y(n) = \alpha^n n^m \big(R(n)\cos(\nu n) + S(n)\sin(\nu n)\big),$$

kde R, S *jsou vhodné polynomy stupně ne většího než* $\max\{$*stupeň* P, *stupeň* $Q\}$ *a* $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ *udává jakou násobnost má číslo* $\alpha(\cos\nu + i\sin\nu)$ *jakožto kořen charakteristického polynomu rovnice* (13.1).

14 Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

Definice. **Diferenciální rovnicí** rozumíme rovnici tvaru

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y'', y', y, x) = 0, \tag{14.1}$$

kde F je reálná funkce $n+2$ proměnných.

Konec 2. přednášky, 26. 2. 2018

Definice.

- **Řešením diferenciální rovnice** (14.1) rozumíme funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I, která má v každém bodě intervalu I vlastní n-tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (14.1) v každém bodě intervalu I, tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \dots, y''(x), y'(x), y(x), x) = 0.$$

- Řešení y diferenciální rovnice (14.1) je **maximální**, pokud neexistuje takové řešení z, pro které $D_y \subsetneqq D_z$ a které se na D_y shoduje s y.

Definice. **Rovnice se separovanými proměnnými** je rovnice tvaru

$$y' = g(y) \cdot h(x). \tag{14.2}$$

Metoda řešení pro spojité g a h

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h.

2. Najdeme všechny nulové body funkce g. Je-li totiž $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce $y(x) = c$ řešením rovnice (14.2). Těmto řešením říkáme **singulární** nebo také **stacionární**.

3. Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je funkce g nenulová.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J. Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li $y(x)$ takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Nechť H je primitivní funkce k h na intervalu I a G je primitivní funkce k funkci $1/g$ na J. Existuje konstanta $c \in \mathbf{R}$ taková, že platí

$$G(y(x)) = H(x) + c$$

na definičním oboru řešení y, který nalezneme v následujícím kroku.

5. Nyní zafixujeme c a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I;\ H(x) + c \in G(J)\}.$$

Na každém z těchto intervalů musí mít řešení tvar

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c),$$

kde G^{-1} značí funkci inverzní k funkci G. Ta existuje, neboť G je na intervalu J buď rostoucí nebo klesající.

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku slepíme všechna maximální řešení. Nechť y_1 a y_2 jsou řešení rovnice (14.2), první na intervalu (a, b) a druhé na intervalu (b, c), přičemž $b \in D_h$. Předpokládejme, že

$$\lim_{x\to b-} y_1(x) = \lim_{x\to b+} y_2(x) = \alpha \in D_g$$

Pak funkce

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a,b); \\ \alpha, & x = b; \\ y_2(x), & x \in (b,c); \end{cases}$$

je řešením rovnice (14.2) na intervalu (a, c).

Konec 3. přednášky, 5. 3. 2018

Autonomní rovnice jsou rovnice tvaru

$$y' = g(y). \tag{14.3}$$

Věta 14.1. *Každé řešení rovnice* (14.3) *je monotónní.*

Lemma 14.2. *Nechť* $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *funkce* g *je spojitá a kladná na* $\langle a, b)$ *a má v bodě* b *zleva kladnou limitu. Pak* $\int_a^b \frac{1}{g}$ *konverguje.*

Lemma 14.3. *Nechť funkce* g *je spojitá na* $\langle a, b\rangle$, *kladná na* $\langle a, b)$, $g(b) = 0$ *a* $g'_-(b)$ *existuje vlastní. Pak* $\int_a^b \frac{1}{g}$ *diverguje.*

Konec 4. přednášky, 12. 3. 2018

15 Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{15.1}$$

kde p, q jsou spojité funkce na daném intervalu (a, b), $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$ (**lineární diferenciální rovnice prvního řádu**). **Homogenní diferenciální rovnicí** budeme rozumět rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = 0. \tag{15.2}$$

Věta 15.1. *Maximální řešení rovnice* (15.1) *splňující podmínku* $y(x_0) = y_0$, *kde* $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbf{R}$, *má tvar*

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)} dt \right) e^{-P(x)} + y_0 e^{-P(x)}, \quad x \in (a, b),$$

kde P *je primitivní funkce k* p *na* (a, b) *splňující* $P(x_0) = 0$.

16 Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t), \tag{16.1}$$

kde $n \in \mathbf{N}$, $a_0, \dots, a_{n-1}$ jsou reálná čísla a f je funkce spojitá na daném intervalu (a,b) (**lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty**).

Homogenní rovnicí k rovnici (16.1) rozumíme rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0. \tag{16.2}$$

Věta 16.1. *Nechť $t_0 \in (a,b)$ a $z_0, \dots, z_{n-1} \in \mathbf{R}$. Pak existuje právě jedno maximální řešení y rovnice* (16.1)*, které splňuje podmínky*

$$y(t_0) = z_0,\ y'(t_0) = z_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}.$$

Toto řešení je navíc definováno na celém intervalu (a,b).

Konec 5. přednášky, 19. 3. 2018

Věta 16.2.

(i) *Maximální řešení rovnice* (16.2) *jsou definována na celém $\mathbf{R}$ a tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^n(\mathbf{R})$ dimenze n.*

(ii) *Nechť y_p je maximální řešení rovnice* (16.1)*. Pak funkce y je maximálním řešením* (16.1)*, právě když ji lze zapsat ve tvaru $y = y_p + y_h$, kde y_h je vhodné řešení rovnice* (16.2)*.*

Definice. Bázi prostoru řešenívrovnice (16.2) nazýváme **fundamentální systém**.

Definice. **Charakteristickým polynomem** rovnice (16.2) rozumíme polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Věta 16.3 (tvar fundamentálního systému)**.** *Nechť χ je charakteristický polynom rovnice* (16.2)*. Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ jsou všechny navzájem různé reálné kořeny polynomu χ s násobnostmi $r_1, \dots, r_s$. Nechť $\alpha_1 + \beta_1 i, \dots, \alpha_l + \beta_l i$ jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu χ s kladnou imaginární částí a násobnostmi $q_1, \dots, q_l$, kde $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbf{R}$. Pak následující funkce tvoří fundamentální systém řešení rovnice* (16.2)*:*

$$\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \dots & t^{r_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s t}, & \dots & t^{r_s-1}e^{\lambda_s t}, \\
e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, \\
e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, \\
e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t.
\end{array}$$

Konec 6. přednášky, 26. 3. 2018

Lemma 16.4. *Nechť* $y_1, \dots, y_n$ *tvoří fundamentální systém rovnice* (16.2). *Potom matice*

$$U(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

je regulární pro každé $t \in \mathbf{R}$.

Věta 16.5. *Nechť*

$$f(t) = e^{\mu t} \cdot (P(t) \cos \nu t + Q(t) \sin \nu t) \,,$$

kde $\mu, \nu \in \mathbf{R}$ *a* P, Q *jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice* (16.1) *ve tvaru*

$$y_0(t) = t^m e^{\mu t} \cdot (R(t) \cos \nu t + S(t) \sin \nu t) \,,$$

kde R, S *jsou vhodné polynomy stupně ne většího než* $\max\{$*stupeň* P*, stupeň* $Q\}$ *a* $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ *udává, jakou násobnost má číslo* $\mu + i\nu$ *jakožto kořen charakteristického polynomu.*

17 Soustavy diferenciálních rovnic

17.1 Základní pojmy

Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{17.1}$$

kde f_i, $i = 1, \dots, n$, jsou dané funkce definované na jisté neprázdné otevřené podmnožině $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$.

Vektorový tvar:

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)),$$

kde máme $\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$, $\boldsymbol{x}'(t) = [x_1'(t), \dots, x_n'(t)]$ a dále $\boldsymbol{f} = [f_1, \dots, f_n]$.

Definice.

- **Řešením soustavy** (17.1) rozumíme vektorovou funkci $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n]$ definovanou na otevřeném neprázdném intervalu $J \subset \mathbf{R}$ s hodnotami v $\mathbf{R}^n$ takovou, že pro každé $t \in J$ existují vlastní derivace $x_i'(t)$, $i = 1, \dots, n$, a platí (17.1).

- **Počáteční úlohou** pro (17.1) rozumíme úlohu, kdy hledáme řešení $\boldsymbol{x}$ soustavy (17.1) splňující navíc předem zadanou podmínku $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$, kde $[t_0, \boldsymbol{x}^0] \in G$ (tzv. **počáteční podmínka**).

- **Maximální řešení** soustavy (17.1) je takové řešení $\boldsymbol{x}$ definované na intervalu J, které již nelze prodloužit, tj. je-li $\boldsymbol{y}$ řešení definované na intervalu I, $J \subset I$ a $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}(t)$ pro každé $t \in J$, pak $J = I$.

Konec 7. přednášky, 9. 4. 2018

Věta 17.1 (Peano)**.** *Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $\boldsymbol{f}\colon G \to \mathbf{R}^n$ je spojitá na G. Pak pro každé $[t_0, \boldsymbol{x}^0] \in G$ existuje maximální řešení rovnice* (17.1) *splňující $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$.*

Věta 17.2 (Picard)**.** *Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená neprázdná množina, $\boldsymbol{f}\colon G \to \mathbf{R}^n$ splňuje podmínku:*

(P) Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ platí, že f_i je spojitá na G a její parciální derivace podle druhé, třetí, …, $(n+1)$-ní proměnné jsou spojité na G.

Jestliže $[t_0, \boldsymbol{x}^0] \in G$, potom existuje právě jedno maximální řešení rovnice (17.1) *splňující $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$.*

17.2 Vlastnosti maximálních řešení

Lemma 17.3. *Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a funkce g je definována na (a, b). Jestliže g splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku:*

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\, \forall s, t \in P^-(b, \delta)\colon |g(t) - g(s)| < \varepsilon,$$

pak existuje vlastní $\lim_{t \to b-} g(t)$.

Věta 17.4 (opouštění kompaktu)**.** *Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená, $K \subset G$ je kompaktní, zobrazení $\boldsymbol{f}$ je spojité na G, $\boldsymbol{x}$ je maximální řešení rovnice* (17.1) *definované na intervalu (α, β), $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $[t_0, \boldsymbol{x}(t_0)] \in K$. Pak existují $\tau_1 \in (\alpha, t_0)$ a $\tau_2 \in (t_0, \beta)$ taková, že $[\tau_i, \boldsymbol{x}(\tau_i)] \notin K$, $i = 1, 2$.*

Lemma 17.5. *Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená, $\boldsymbol{f}\colon G \to \mathbf{R}^n$ je spojité zobrazení, $(\alpha, \beta) \subset \mathbf{R}$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$, $[t_0, \boldsymbol{x}^0] \in G$. Nechť vektorová funkce $\boldsymbol{x}\colon (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}^n$ je řešením rovnice* (17.1) *s počáteční podmínkou $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$. Pak pro každé $t \in (\alpha, \beta)$ platí*

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\, ds.$$

Konec 8. přednášky, 16. 4. 2018

Lemma 17.6 (Gronwall)**.** *Nechť funkce u je spojitá a nezáporná na intervalu $\langle t_0, t_1)$, $t_0 \in \mathbf{R}$, $t_1 \in \mathbf{R}^\star$. Nechť existují čísla $a \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ taková, že*

$$u(t) \leq a + \int_{t_0}^{t} (\alpha u(s) + \beta)\, ds, \qquad t \in \langle t_0, t_1).$$

Pak

$$u(t) \leq \left(a + \frac{\beta}{\alpha}\right) e^{\alpha(t-t_0)}, \qquad t \in \langle t_0, t_1).$$

Lemma 17.7. *Nechť funkce $\boldsymbol{x}\colon \langle a, b\rangle \to \mathbf{R}^n$ je spojitá a $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$ je otevřená množina. Nechť platí*

$$\{[t, \boldsymbol{x}(t)] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n;\ t \in \langle a, b\rangle\} \subset G.$$

Potom existuje $\xi > 0$ takové, že

$$\{[t, \boldsymbol{z}] \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n;\ t \in \langle a, b\rangle, \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{z}\| \leq \xi\} \subset G.$$

Lemma 17.8. *Nechť $\boldsymbol{x}\colon \langle a, b\rangle \to \mathbf{R}^n$ je spojité. Potom platí*

$$\left\| \int_a^b \boldsymbol{x}(t)\, dt \right\| \leq n \int_a^b \|\boldsymbol{x}(t)\|\, dt.$$

Lemma 17.9. *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je neprázdná a otevřená a $\boldsymbol{g} \in \mathcal{C}^1(G, \mathbf{R}^m)$. Nechť dále $C \subset G$ je konvexní a předpokládejme, že existuje $M \in \mathbf{R}$, $M > 0$, takové, že*

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\}\ \forall j \in \{1, \ldots, n\}\ \forall \boldsymbol{x} \in C\colon \left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) \right| \leq M.$$

Potom pro každé dva body $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in C$ platí

$$\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v})\| \leq L \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|,$$

kde $L = n\sqrt{m}M$.

Konec 9. přednášky, 23. 4. 2018

Věta 17.10 (spojitá závislost na počátečních podmínkách)**.** *Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená a $\boldsymbol{f}$ splňuje podmínku (P) na G. Nechť $\boldsymbol{x}$ je maximální řešení soustavy* (17.1) *definované na (α, β) a $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Pak pro každé $\tau_1 \in (\alpha, t_0)$, $\tau_2 \in (t_0, \beta)$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé maximální řešení $\boldsymbol{y}$, které splňuje podmínku $\|\boldsymbol{y}(t_0) - \boldsymbol{x}(t_0)\| < \delta$, platí:*

- *$\boldsymbol{y}$ je definováno v každém bodě intervalu $\langle \tau_1, \tau_2\rangle$,*
- *$\forall t \in \langle \tau_1, \tau_2\rangle\colon\ \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)\| < \varepsilon$.*

17.3 Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{aligned} \tag{17.2}$$

kde $n \in \mathbf{N}$, $a_{ij}\colon (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$, $b_i\colon (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, jsou spojité funkce.

Vektorový tvar:

$$\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t),$$

kde

$$\mathbb{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Konec 10. přednášky, 30. 4. 2018

Věta 17.11 (o existenci a jednoznačnosti řešení)**.** *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbf{R}^n$. Nechť $\mathbb{A}\colon (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$, $\boldsymbol{b}\colon (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Potom existuje právě jedno maximální řešení $\boldsymbol{x}$ soustavy* (17.2) *splňující $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$. Toto řešení je definováno na celém intervalu (α, β).*

Definice. Homogenní soustavou k (17.2) rozumíme soustavu

$$\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}(t)\boldsymbol{x}. \tag{17.3}$$

Věta 17.12. *Nechť $n \in \mathbf{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$, a $\mathbb{A}\colon (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$ je spojité zobrazení. Potom množina všech maximálních řešení soustavy* (17.3) *tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^1((\alpha, \beta), \mathbf{R}^n)$. Dimenze tohoto podprostoru je rovna n.*

Konec 11. přednášky, 7. 5. 2018

Věta 17.13. *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$. Nechť $\mathbb{A}\colon (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$, $\boldsymbol{b}\colon (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}^n$ jsou spojitá zobrazení. Nechť $\boldsymbol{y}$ je řešení* (17.2) *na intervalu (α, β). Potom každé řešení $\boldsymbol{x}$ soustavy* (17.2) *na intervalu (α, β) má tvar $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$, kde $\boldsymbol{z}$ je jisté řešení* (17.3)*.*

Definice. Nechť vektorové funkce $\boldsymbol{y}^1, \dots, \boldsymbol{y}^n$ tvoří bázi prostoru řešení rovnice (17.3) na (α, β). Takovou množinu řešení nazýváme **fundamentální** systém rovnice (17.3). Označme

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} y_1^1(t) & \dots & y_1^n(t) \\ y_2^1(t) & \dots & y_2^n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^1(t) & \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

Matici Φ nazýváme **fundamentální maticí soustavy** (17.3).

Lemma 17.14. *Nechť Φ je fundamentální matice rovnice* (17.3)*. Pak $\Phi(t)$ je regulární pro každé $t \in (\alpha, \beta)$.*

Věta 17.15 (variace konstant)**.** *Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbf{R}^n$. Pak maximální řešení $\boldsymbol{y}$ rovnice* (17.2) *s počáteční podmínkou $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}^0$ má tvar*

$$\boldsymbol{y}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\boldsymbol{y}^0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\boldsymbol{b}(s)\,ds, \quad t \in (\alpha, \beta),$$

kde Φ je fundamentální matice soustavy (17.3).

17.4 Řešení lineárních soustav s konstantními koeficienty

Věta 17.16. *Nechť* $\mathbb{A} \in M(n\times n)$ *a vektorová funkce* $\boldsymbol{y}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ *je řešením soustavy* $\boldsymbol{y}' = \mathbb{A}\boldsymbol{y}$. *Pak* $\boldsymbol{y}$ *je třídy* $\mathcal{C}^\infty$ *a pro každé* $k \in \mathbf{N}$ *platí* $\boldsymbol{y}^{(k)}(x) = \mathbb{A}^k\boldsymbol{y}(x)$ *pro* $x \in \mathbf{R}$.

——— Konec 12. přednášky, 14. 5. 2018 ———

Definice. Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ, nazýváme **λ-maticí**. **Řádkovými úpravami λ-matice** rozumíme:

- záměnu dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovou konstantou,
- přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde $P(\lambda)$ je polynom v proměnné λ.

Lemma 17.17. *Nechť* $\Lambda = (P_1, \dots, P_n)^T$ *je* λ*-matice. Potom ji lze konečnou posloupností řádkových úprav převést na* λ*-matici* $\tilde{\Lambda} = (\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n)^T$, *kde nejvýše jeden z polynomů* $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n$ *je nenulový.*

Věta 17.18. *Nechť* $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. *Pak lze* λ*-matici* $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ *převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou* λ*-matici. Výsledná* λ*-matice má na diagonále nenulové polynomy, součet jejichž stupňů je* n.

Označení.

- Nechť $P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ je polynom a $y\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je funkce mající vlastní derivaci n-tého řádu na $\mathbf{R}$. Potom symbol $P(\frac{d}{dx})y$ značí funkci $a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y$.
- Nechť $\mathbb{P} = (P_{ij})$ je λ-matice typu $n \times n$. Soustavou diferenciálních rovnic odpovídající $\mathbb{P}$ budeme rozumět soustavu

$$\begin{aligned} P_{11}(\tfrac{d}{dx})y_1 + \cdots + P_{1n}(\tfrac{d}{dx})y_n &= 0, \\ &\vdots \\ P_{n1}(\tfrac{d}{dx})y_1 + \cdots + P_{nn}(\tfrac{d}{dx})y_n &= 0. \end{aligned}$$

Věta 17.19. *Nechť* λ*-matice* $\tilde{\mathbb{P}}$ *vznikla konečnou posloupností řádkových úprav z* λ*-matice* $\mathbb{P}$. *Potom vektorová funkce* $\boldsymbol{y}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ *třídy* $\mathcal{C}^\infty$ *je řešením soustavy odpovídající matici* $\mathbb{P}$, *právě když je řešením soustavy odpovídající* $\tilde{\mathbb{P}}$.

Seznam definic

- fundamentální systém pro lineární diferenciální rovnici n-tého řádu s konstantními koeficienty (26)
- charakteristický polynom pro homogenní lineární diferenciální rovnici n-tého řádu s konstantními koeficienty (27)
- soustava diferenciálních rovnic (31)
- (maximální) řešení soustavy diferenciálních rovnic (17.1)
- počáteční úloha (17.1)
- soustava lineárních diferenciálních rovnic (43)
- homogenní soustava lineárních diferenciálních rovnic (46)
- fundamentální matice (49)
- λ-matice (52)
- řádkové úpravy λ-matice (52)

Seznam vět

B . . . . . . bez důkazu

T . . . . . . věta s těžším důkazem

- existence a jednoznačnost řešení diferenční rovnice (Věta 13.1)
- množina řešení homogenní diferenční rovnice (Věta 13.2)

B tvar fundamentálního systému diferenční rovnice (Věta 13.3)

- množina řešení diferenční rovnice (Věta 13.4)

B diferenční rovnice se speciální pravou stranou (Věta 13.5)

T metoda řešení rovnice se separovanými proměnnými (14)

T monotonie řešení diferenciální rovnice (Věta 14.1)

T kvalitativní analýza řešení autonomních diferenciálních rovnic

- řešení lineární diferenciální rovnice prvního řádu (Věta 15.1)

B existence a jednoznačnost maximálního řešení pro lineární diferenciální rovnici n-tého řádu s konstantními koeficienty (Věta 16.1)

- vlastnosti množiny řešení lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty (Věta 16.2)

B tvar fundamentálního systému prostoru řešení homogenní lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty (Věta 16.3)

T metoda variace konstant

B metoda speciální pravé strany (Věta 16.5)

B Peanova věta (Věta 17.1)

B Picardova věta (Věta 17.2)

T opouštění kompaktu (Věta 17.4)

T Gronwallovo lemma (Věta 17.6

T spojitá závislost na počátečních podmínkách (Věta 17.10)

T existence a jednoznačnost řešení soustavy lineárních diferenciálních rovnic (Věta 17.11)

- vlastnosti prostoru řešení homogenní soustavy lineárních diferenciálních rovnic (Věta 17.12)

- vlastnosti množiny řešení nehomogenní soustavy (Věta 17.13)

T variace konstant pro soustavu diferenciálních rovnic (Věta 17.15)

- hladkost řešení soustavy rovnic (Věta 17.16)
- úprava λ-matice (Věta 17.18)
- metoda řešení homogenní soustavy lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty (Věta 17.19)