Matematika 4

FSV UK, LS 2017-18

Miroslav Zelený

13. Diferenční rovnice
14. Diferenciální rovnice se separovanými prom.
15. Lineární diferenciální rovnice prvního řádu
16. Lineární diferenciální rovnice *n*-tého řádu
17. Soustavy diferenciálních rovnic

13. Diferenční rovnice

Leonardo Fibonacci (asi 1180–1250)

Definice

Nechť $k \in \mathbf{N}$. **Lineární diferenční rovnicí** k**-tého řádu s konstantními koeficienty** budeme rozumět rovnici

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = a_n, \qquad n \in \mathbf{N}, \tag{13.1}$$

kde neznámou je posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$, přičemž $p_1, \ldots, p_k \in \mathbf{R}$, $p_k \neq 0$ jsou dána, stejně jako posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definice

Nechť $k \in \mathbf{N}$. **Lineární diferenční rovnicí k-tého řádu s konstantními koeficienty** budeme rozumět rovnici

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = a_n, \qquad n \in \mathbf{N}, \tag{13.1}$$

kde neznámou je posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$, přičemž $p_1, \ldots, p_k \in \mathbf{R}$, $p_k \neq 0$ jsou dána, stejně jako posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Řešením rovnice (13.1) rozumíme každou posloupnost $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$ splňující (1) pro každé $n \in \mathbf{N}$. Pokud chceme, aby řešení rovnice (13.1) splňovalo podmínky

$$y(1) = y_1, \ldots, y(k) = y_k, \tag{13.2}$$

kde $y_1, \ldots, y_k$ jsou dána (tzv. **počáteční podmínky**), pak hovoříme o **počáteční úloze**.

Pokud $a_n = 0$ pro každé $n \in \mathbf{N}$, pak (13.1)) má tvar

$$y(n+k) + p_1 y(n+k-1) + \cdots + p_k y(n) = 0, \qquad n \in \mathbf{N}. \tag{13.3}$$

Tato rovnice se nazývá **homogenní**.

Věta 13.1

Počáteční úloha (13.1), (13.2) *má právě jedno řešení.*

Věta 13.1

Počáteční úloha (13.1), (13.2) *má právě jedno řešení.*

Věta 13.2

Množina řešení rovnice (13.3) *tvoří vektorový podprostor dimenze k prostoru všech reálných posloupností.*

Věta 13.1

Počáteční úloha (13.1), (13.2) *má právě jedno řešení.*

Věta 13.2

Množina řešení rovnice (13.3) *tvoří vektorový podprostor dimenze k prostoru všech reálných posloupností.*

Definice

Charakteristickým polynomem rovnice (13.1) budeme rozumět polynom

$$\lambda \mapsto \lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \cdots + p_{k-1}\lambda + p_k.$$

Věta 13.3

Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ *jsou všechny navzájem různé reálné kořeny charakteristického polynomu rovnice* (13.1) *s násobnostmi* $r_1, \ldots, r_s$. *Nechť* $\xi_1, \ldots, \xi_l$ *jsou všechny navzájem různé komplexní kořeny charakteristického polynomu rovnice* (13.1) *s kladnou imaginární částí a násobnostmi* $q_1, \ldots, q_l$, *přičemž pro* $j = 1, \ldots, l$ *platí* $\xi_j = \mu_j(\cos \nu_j + i \sin \nu_j)$. *Pak následující posloupnosti tvoří bázi prostoru řešení (3).*

$$
\begin{array}{cccc}
\{\lambda_1^n\}, & \{n\lambda_1^n\}, & \dots & \{n^{r_1-1}\lambda_1^n\}, \\
\vdots & & & \\
\{\lambda_s^n\}, & \{n\lambda_s^n\}, & \dots & \{n^{r_s-1}\lambda_s^n\}, \\
\{\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, & \{n\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, & \dots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n \cos \nu_1 n\}, \\
\{\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, & \{n\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, & \dots & \{n^{q_1-1}\mu_1^n \sin \nu_1 n\}, \\
\vdots & & & \\
\{\mu_l^n \cos \nu_l n\}, & \{n\mu_l^n \cos \nu_l n\}, & \dots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n \cos \nu_l n\}, \\
\{\mu_l^n \sin \nu_l n\}, & \{n\mu_l^n \sin \nu_l n\}, & \dots & \{n^{q_l-1}\mu_l^n \sin \nu_l n\}
\end{array}
$$

Věta 13.4

Nechť posloupnosti $\{y^1(n)\}_{n=1}^{\infty}, \{y^2(n)\}_{n=1}^{\infty}, \dots,$ $\{y^k(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *tvoří fundamentální systém řešení* (13.3)*. Nechť posloupnost* $\{z(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *je řešením* (13.1)*. Potom posloupnost* $\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}$ *řeší* (13.1)*, právě když existují konstanty* $c_1, \dots, c_k \in \mathbf{R}$ *takové, že*

$$y(n) = z(n) + c_1 y^1(n) + \cdots + c_k y^k(n)$$

pro každé $n \in \mathbf{N}$*.*

Věta 13.5

Nechť posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *v rovnici* (13.1) *splňuje*

$$a_n = \alpha^n \big(P(n)\cos(\nu n) + Q(n)\sin(\nu n)\big),$$

kde $\alpha > 0$, P, Q *jsou polynomy. Pak existuje řešení* (13.1) *ve tvaru*

$$y(n) = \alpha^n n^m \big(R(n)\cos(\nu n) + S(n)\sin(\nu n)\big),$$

kde R, S *jsou vhodné polynomy stupně ne většího než* $\max\{\text{stupeň } P, \text{stupeň } Q\}$ *a* $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ *udává jakou násobnost má číslo* $\alpha(\cos\nu + i\sin\nu)$ *jakožto kořen charakteristického polynomu rovnice* (13.1).

14. Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými

Fyzika

Volný pád bez odporu vzduchu:

$$ma = mg$$
$$v' = g$$

Fyzika

Volný pád bez odporu vzduchu:

$$ma = mg$$
$$v' = g$$

Volný pád s odporem vzduchu:

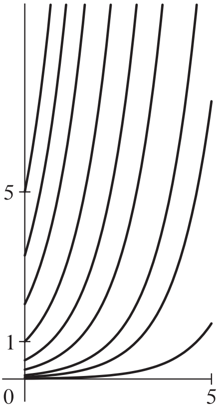
$$mv' = mg - bv$$
$$mv' = mg - bv^2$$

Demografie

Malthusův populační model $p' = ap$

Demografie

Malthusův populační model $p' = ap$

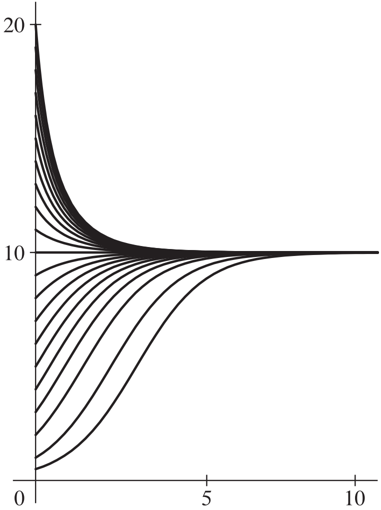


Biologie

Logistický populační model $p' = ap - bp^2$

Biologie

Logistický populační model $p' = ap - bp^2$



Biologie

Biologie

Trepka velká (paramecium caudatum)

Biologie

Trepka velká (paramecium caudatum)
prvoci – nálevnící – chudoblanní

Biologie

Trepka velká (paramecium caudatum)
prvoci – nálevníci – chudoblanní
$p' = ap - bp^2, \quad a = 2.309, b = a/375$

Ekonomie

Q_d . . . poptávka

Ekonomie

Q_d . . . poptávka
Q_s . . . nabídka

Ekonomie

Q_d . . . poptávka
Q_s . . . nabídka
P . . . cena

Ekonomie

Q_d ... poptávka
Q_s ... nabídka
P ... cena
$Q_d = \alpha - \beta P + mP' + nP''$

Ekonomie

Q_d ... poptávka
Q_s ... nabídka
P ... cena
$Q_d = \alpha - \beta P + mP' + nP''$
$Q_s = -\gamma + \delta P + uP' + vP''$

Ekonomie

Q_d ... poptávka
Q_s ... nabídka
P ... cena

$$Q_d = \alpha - \beta P + mP' + nP''$$
$$Q_s = -\gamma + \delta P + uP' + vP''$$
$$Q_d = Q_s$$

Definice

Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici tvaru

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y'', y', y, x) = 0, \qquad (14.1)$$

kde F je reálná funkce $n+2$ proměnných.

Definice

- **Řešením diferenciální rovnice** (14.1) rozumíme funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I, která má v každém bodě intervalu I vlastní n-tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (14.1) v každém bodě intervalu I, tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \dots, y''(x), y'(x), y(x), x) = 0.$$

Definice

- **Řešením diferenciální rovnice** (14.1) rozumíme funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I, která má v každém bodě intervalu I vlastní n-tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (14.1) v každém bodě intervalu I, tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F(y^{(n)}(x), y^{(n-1)}(x), \dots, y''(x), y'(x), y(x), x) = 0.$$

- Řešení y diferenciální rovnice (14.1) je **maximální**, pokud neexistuje takové řešení z, pro které $D_y \subsetneqq D_z$ a které se na D_y shoduje s y.

Definice

Rovnice se separovanými proměnnými je rovnice tvaru

$$y' = g(y) \cdot h(x). \tag{14.2}$$

Metoda řešení pro spojité g a h

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h.

Metoda řešení pro spojité g a h

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h.

2. Najdeme všechny nulové body funkce g. Je-li totiž $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce $y(x) = c$ řešením rovnice (14.2). Těmto řešením říkáme **singulární** nebo také **stacionární**.

Metoda řešení pro spojité g a h

1. Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definičním oboru funkce h.

2. Najdeme všechny nulové body funkce g. Je-li totiž $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce $y(x) = c$ řešením rovnice (14.2). Těmto řešením říkáme **singulární** nebo také **stacionární**.

3. Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je funkce g nenulová.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku.
Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J. Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J. Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li $y(x)$ takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J. Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li $y(x)$ takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Nechť H je primitivní funkce k h na intervalu I a G je primitivní funkce k funkci $1/g$ na J.

4. Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J z 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je spojitá a nenulová na J. Budeme hledat řešení, která jsou definovaná někde v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li $y(x)$ takové řešení, pak pro něj platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Nechť H je primitivní funkce k h na intervalu I a G je primitivní funkce k funkci $1/g$ na J. Existuje konstanta $c \in \mathbf{R}$ taková, že platí

$$G(y(x)) = H(x) + c$$

na definičním oboru řešení y, který nalezneme v následujícím kroku.

5. Nyní zafixujeme c a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I;\ H(x) + c \in G(J)\}.$$

5. Nyní zafixujeme c a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I;\ H(x) + c \in G(J)\}.$$

Na každém z těchto intervalů musí mít řešení tvar

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + c),$$

kde G^{-1} značí funkci inverzní k funkci G. Ta existuje, neboť G je na intervalu J buď rostoucí nebo klesající.

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku slepíme všechna maximální řešení.

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku slepíme všechna maximální řešení. Nechť y_1 a y_2 jsou řešení rovnice (14.2), první na intervalu (a, b) a druhé na intervalu (b, c), přičemž $b \in D_h$.

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku slepíme všechna maximální řešení. Nechť y_1 a y_2 jsou řešení rovnice (14.2), první na intervalu (a, b) a druhé na intervalu (b, c), přičemž $b \in D_h$. Předpokládejme, že

$$\lim_{x \to b-} y_1(x) = \lim_{x \to b+} y_2(x) = \alpha \in D_g$$

6. Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku slepíme všechna maximální řešení. Nechť y_1 a y_2 jsou řešení rovnice (14.2), první na intervalu (a, b) a druhé na intervalu (b, c), přičemž $b \in D_h$. Předpokládejme, že

$$\lim_{x \to b-} y_1(x) = \lim_{x \to b+} y_2(x) = \alpha \in D_g$$

Pak funkce

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a, b); \\ \alpha, & x = b; \\ y_2(x), & x \in (b, c); \end{cases}$$

je řešením rovnice (14.2) na intervalu (a, c).

Malthusiánský populační model

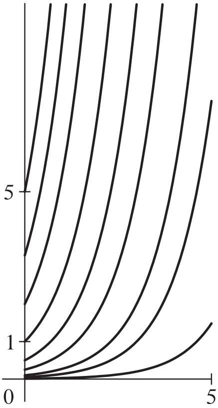
$$p' = a \cdot p,$$

Malthusiánský populační model

$$p' = a \cdot p, \qquad p(t) = p(0) \cdot e^{at}$$

Malthusiánský populační model

$$p' = a \cdot p, \qquad p(t) = p(0) \cdot e^{at}$$



Logistický populační model

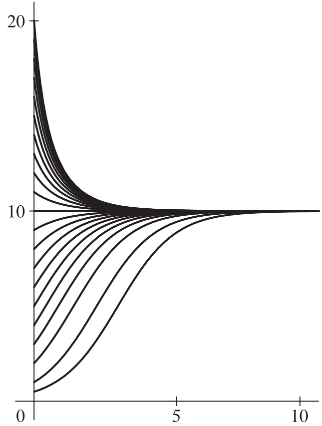
$$p' = ap - bp^2, \qquad a, b \in (0, +\infty),$$

Logistický populační model

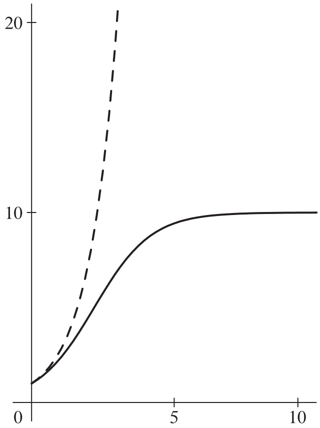
$$p' = ap - bp^2, \qquad a, b \in (0, +\infty), \qquad p(t) = \frac{ake^{at}}{bke^{at} + 1}$$

Logistický populační model

$$p' = ap - bp^2, \qquad a, b \in (0, +\infty), \qquad p(t) = \frac{ake^{at}}{bke^{at} + 1}$$



Porovnání malthusiánského a logistického modelu



Autonomní rovnice jsou rovnice tvaru

$$y' = g(y). \tag{14.3}$$

Autonomní rovnice jsou rovnice tvaru

$$y' = g(y). \tag{14.3}$$

Věta 14.1

Každé řešení rovnice (14.3) *je monotónní.*

- Integrál $\int_a^b \frac{1}{g}$ konverguje, konvergují tedy i oba integrály $\int_a^c \frac{1}{g}$ a $\int_c^b \frac{1}{g}$. V tom případě je řešení s hodnotami v intervalu (a, b) definované na omezeném intervalu (A, B).

- Integrál $\int_a^b \frac{1}{g}$ konverguje, konvergují tedy i oba integrály $\int_a^c \frac{1}{g}$ a $\int_c^b \frac{1}{g}$. V tom případě je řešení s hodnotami v intervalu (a, b) definované na omezeném intervalu (A, B).
- Integrál $\int_a^c \frac{1}{g}$ konverguje, integrál $\int_c^b \frac{1}{g}$ diverguje. V tom případě je řešení s hodnotami v (a, b) definované na intervalu $(A, +\infty)$, $A \in \mathbf{R}$.

- Integrál $\int_a^b \frac{1}{g}$ konverguje, konvergují tedy i oba integrály $\int_a^c \frac{1}{g}$ a $\int_c^b \frac{1}{g}$. V tom případě je řešení s hodnotami v intervalu (a, b) definované na omezeném intervalu (A, B).
- Integrál $\int_a^c \frac{1}{g}$ konverguje, integrál $\int_c^b \frac{1}{g}$ diverguje. V tom případě je řešení s hodnotami v (a, b) definované na intervalu $(A, +\infty)$, $A \in \mathbf{R}$.
- Integrál $\int_a^c \frac{1}{g}$ diverguje, integrál $\int_c^b \frac{1}{g}$ konverguje. V tom případě je řešení s hodnotami v (a, b) definované na intervalu $(-\infty, B)$, $B \in \mathbf{R}$.

- Integrál $\int_a^b \frac{1}{g}$ konverguje, konvergují tedy i oba integrály $\int_a^c \frac{1}{g}$ a $\int_c^b \frac{1}{g}$. V tom případě je řešení s hodnotami v intervalu (a, b) definované na omezeném intervalu (A, B).
- Integrál $\int_a^c \frac{1}{g}$ konverguje, integrál $\int_c^b \frac{1}{g}$ diverguje. V tom případě je řešení s hodnotami v (a, b) definované na intervalu $(A, +\infty)$, $A \in \mathbf{R}$.
- Integrál $\int_a^c \frac{1}{g}$ diverguje, integrál $\int_c^b \frac{1}{g}$ konverguje. V tom případě je řešení s hodnotami v (a, b) definované na intervalu $(-\infty, B)$, $B \in \mathbf{R}$.
- Oba integrály $\int_a^c \frac{1}{g}$, $\int_c^b \frac{1}{g}$ divergují. V tom případě je řešení s hodnotami v intervalu (a, b) definované na celém $\mathbf{R}$.

Lemma 14.2

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *funkce* g *je spojitá a kladná na* $\langle a, b)$ *a má v bodě* b *zleva kladnou limitu. Pak* $\int_a^b \frac{1}{g}$ *konverguje.*

Lemma 14.2

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *funkce* g *je spojitá a kladná na* $\langle a, b)$ *a má v bodě* b *zleva kladnou limitu. Pak* $\int_a^b \frac{1}{g}$ *konverguje.*

Lemma 14.3

Nechť funkce g *je spojitá na* $\langle a, b\rangle$, *kladná na* $\langle a, b)$, $g(b) = 0$ *a* $g'_{-}(b)$ *existuje vlastní. Pak* $\int_a^b \frac{1}{g}$ *diverguje.*

15. Lineární diferenciální rovnice 1. řádu

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{15.1}$$

kde p, q jsou spojité funkce na daném intervalu (a, b), $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$ (**lineární diferenciální rovnice prvního řádu**).

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{15.1}$$

kde p, q jsou spojité funkce na daném intervalu (a, b), $a, b \in \mathbf{R}^*$, $a < b$ (**lineární diferenciální rovnice prvního řádu**). **Homogenní diferenciální rovnicí** budeme rozumět rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = 0. \tag{15.2}$$

Věta 15.1

Maximální řešení rovnice (15.1) *splňující podmínku* $y(x_0) = y_0$*, kde* $x_0 \in (a, b)$*,* $y_0 \in \mathbf{R}$*, má tvar*

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)} dt \right) e^{-P(x)} + y_0 e^{-P(x)}, \quad x \in (a, b),$$

kde P *je primitivní funkce k* p *na* (a, b) *splňující* $P(x_0) = 0$*.*

16. Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t), \qquad (16.1)$$

kde $n \in \mathbf{N}$, $a_0, \ldots, a_{n-1}$ jsou reálná čísla a f je funkce spojitá na daném intervalu (a, b)

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t), \qquad (16.1)$$

kde $n \in \mathbf{N}$, $a_0, \ldots, a_{n-1}$ jsou reálná čísla a f je funkce spojitá na daném intervalu (a, b) (**lineární diferenciální rovnice *n*-tého řádu s konstantními koeficienty**).

Budeme se zabývat rovnicemi tvaru

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(t), \qquad (16.1)$$

kde $n \in \mathbf{N}$, $a_0, \ldots, a_{n-1}$ jsou reálná čísla a f je funkce spojitá na daném intervalu (a, b) (**lineární diferenciální rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty**). **Homogenní rovnicí** k rovnici (16.1) rozumíme rovnici

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0. \qquad (16.2)$$

Věta 16.1

Nechť $t_0 \in (a, b)$ *a* $z_0, \dots, z_{n-1} \in \mathbf{R}$*. Pak existuje právě jedno maximální řešení* y *rovnice* (16.1)*, které splňuje podmínky*

$$y(t_0) = z_0,\ y'(t_0) = z_1,\ \dots,\ y^{(n-1)}(t_0) = z_{n-1}.$$

Toto řešení je navíc definováno na celém intervalu (a, b)*.*

Věta 16.2

(i) *Maximální řešení rovnice* (16.2) *jsou definována na celém* $\mathbf{R}$ *a tvoří vektorový podprostor prostoru* $\mathcal{C}^n(\mathbf{R})$ *dimenze* n*.*

Věta 16.2

(i) *Maximální řešení rovnice* (16.2) *jsou definována na celém* $\mathbf{R}$ *a tvoří vektorový podprostor prostoru* $\mathcal{C}^n(\mathbf{R})$ *dimenze* n.

(ii) *Nechť* y_p *je maximální řešení rovnice* (16.1). *Pak funkce* y *je maximálním řešením* (16.1), *právě když ji lze zapsat ve tvaru* $y = y_p + y_h$, *kde* y_h *je vhodné řešení rovnice* (16.2).

Definice

Bázi prostoru řešenívrovnice (16.2) nazýváme **fundamentální systém**.

Definice

Charakteristickým polynomem rovnice (16.2) rozumíme polynom

$$\chi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0.$$

Věta 16.3 (tvar fundamentálního systému)

Nechť χ je charakteristický polynom rovnice (16.2)*. Nechť $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ jsou všechny navzájem různé reálné kořeny polynomu χ s násobnostmi $r_1, \dots, r_s$. Nechť $\alpha_1 + \beta_1 i, \dots, \alpha_l + \beta_l i$ jsou všechny navzájem různé kořeny polynomu χ s kladnou imaginární částí a násobnostmi $q_1, \dots, q_l$, kde $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbf{R}$.*

Pak následující funkce tvoří fundamentální systém řešení rovnice (16.2):

$$
\begin{array}{cccc}
e^{\lambda_1 t}, & te^{\lambda_1 t}, & \dots & t^{r_1-1}e^{\lambda_1 t}, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\lambda_s t}, & te^{\lambda_s t}, & \dots & t^{r_s-1}e^{\lambda_s t}, \\
e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t, \\
e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & te^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, & \dots & t^{q_1-1}e^{\alpha_1 t}\sin\beta_1 t, \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\cos\beta_l t, \\
e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & te^{\alpha_l t}\sin\beta_l t, & \dots & t^{q_l-1}e^{\alpha_l t}\sin\beta_l t.
\end{array}
$$

Lemma 16.4

Nechť $y_1, \ldots, y_n$ tvoří fundamentální systém rovnice (16.2)*. Potom matice*

$$U(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \ldots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \ldots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

je regulární pro každé $t \in \mathbf{R}$.

Věta 16.5

Nechť

$$f(t) = e^{\mu t} \cdot (P(t) \cos \nu t + Q(t) \sin \nu t)\,,$$

kde $\mu, \nu \in \mathbf{R}$ *a* P, Q *jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice* (16.1) *ve tvaru*

$$y_0(t) = t^m e^{\mu t} \cdot (R(t) \cos \nu t + S(t) \sin \nu t)\,,$$

kde R, S *jsou vhodné polynomy stupně ne většího než* max{*stupeň* P, *stupeň* Q} *a* $m \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ *udává, jakou násobnost má číslo* $\mu + i\nu$ *jakožto kořen charakteristického polynomu.*

17. Soustavy diferenciálních rovnic

17.1 Základní pojmy

Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$
\begin{aligned}
x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n),\\
x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n),\\
&\vdots\\
x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n),
\end{aligned}
\tag{17.1}
$$

kde f_i, $i = 1, \dots, n$, jsou dané funkce definované na jisté neprázdné otevřené podmnožině $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$.

Vektorový tvar:

$$\boldsymbol{x}'(t) = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t)),$$

kde máme $\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$, $\boldsymbol{x}'(t) = [x_1'(t), \dots, x_n'(t)]$ a dále $\boldsymbol{f} = [f_1, \dots, f_n]$.

Definice

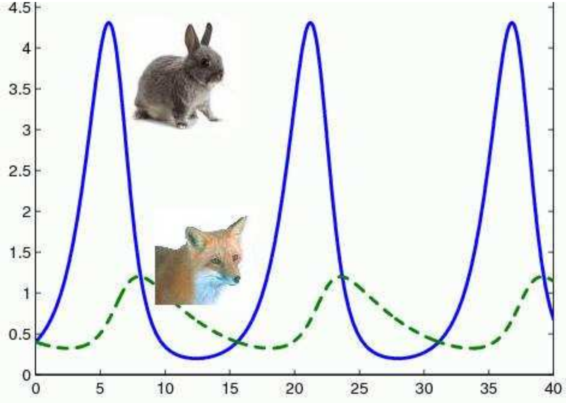
- **Řešením soustavy** (17.1) rozumíme vektorovou funkci $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n]$ definovanou na otevřeném neprázdném intervalu $J \subset \mathbf{R}$ s hodnotami v $\mathbf{R}^n$ takovou, že pro každé $t \in J$ existují vlastní derivace $x_i'(t)$, $i = 1, \dots, n$, a platí (17.1).

Definice

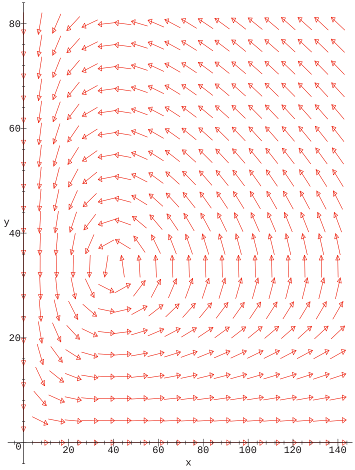
- **Řešením soustavy** (17.1) rozumíme vektorovou funkci $\boldsymbol{x} = [x_1, \dots, x_n]$ definovanou na otevřeném neprázdném intervalu $J \subset \mathbf{R}$ s hodnotami v $\mathbf{R}^n$ takovou, že pro každé $t \in J$ existují vlastní derivace $x_i'(t)$, $i = 1, \dots, n$, a platí (17.1).
- **Počáteční úlohou** pro (17.1) rozumíme úlohu, kdy hledáme řešení $\boldsymbol{x}$ soustavy (17.1) splňující navíc předem zadanou podmínku $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$, kde $[t_0, \boldsymbol{x}^0] \in G$ (tzv. počáteční podmínka).

- Maximální řešení soustavy (17.1) je takové řešení $\boldsymbol{x}$ definované na intervalu J, které již nelze prodloužit, tj. je-li $\boldsymbol{y}$ řešení definované na intervalu I, $J \subset I$ a $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{x}(t)$ pro každé $t \in J$, pak $J = I$.

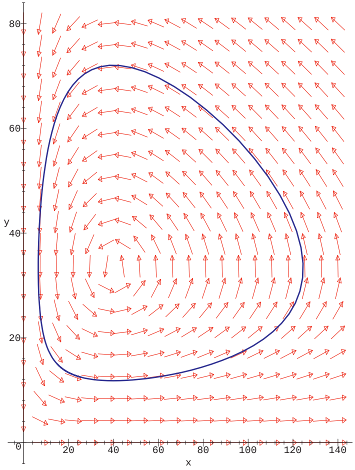
Model dravec-kořist



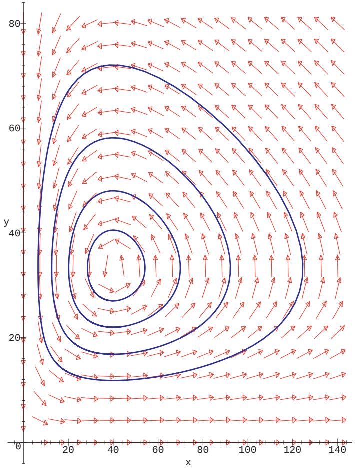
Model dravec-kořist



Model dravec-kořist



Model dravec-kořist



Věta 17.1 (Peano)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *je otevřená neprázdná množina,* $\boldsymbol{f}\colon G \to \mathbf{R}^n$ *je spojitá na G. Pak pro každé* $[t_0, \boldsymbol{x}^0] \in G$ *existuje maximální řešení rovnice* (17.1) *splňující* $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$*.*

Věta 17.2 (Picard)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *je otevřená neprázdná množina,* $\boldsymbol{f}\colon G \to \mathbf{R}^n$ *splňuje podmínku:*

(P) *Pro každé* $i \in \{1, \dots, n\}$ *platí, že* f_i *je spojitá na G a její parciální derivace podle druhé, třetí, ..., $(n+1)$-ní proměnné jsou spojité na G.*

Jestliže $[t_0, \boldsymbol{x}^0] \in G$*, potom existuje právě jedno maximální řešení rovnice* (17.1) *splňující* $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$*.*

17.3 Vlastnosti maximálních řešení

Lemma 17.3

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a funkce g je definována na (a, b). Jestliže g splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku:

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\, \forall s, t \in P^{-}(b, \delta) \colon |g(t) - g(s)| < \varepsilon,$$

pak existuje vlastní $\lim_{t \to b-} g(t)$.

Věta 17.4 (opouštění kompaktu)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená, $K \subset G$ je kompaktní, zobrazení $\boldsymbol{f}$ je spojité na G, $\boldsymbol{x}$ je maximální řešení rovnice (17.1) *definované na intervalu (α, β), $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $[t_0, \boldsymbol{x}(t_0)] \in K$. Pak existují $\tau_1 \in (\alpha, t_0)$ a $\tau_2 \in (t_0, \beta)$ taková, že $[\tau_i, \boldsymbol{x}(\tau_i)] \notin K$, $i = 1, 2$.*

Lemma 17.5

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *je otevřená,* $\boldsymbol{f}\colon G \to \mathbf{R}^n$ *je spojité zobrazení,* $(\alpha, \beta) \subset \mathbf{R}$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$, $[t_0, \boldsymbol{x}^0] \in G$. *Nechť vektorová funkce* $\boldsymbol{x}\colon (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}^n$ *je řešením rovnice* (17.1) *s počáteční podmínkou* $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$. *Pak pro každé* $t \in (\alpha, \beta)$ *platí*

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{x}(s))\, ds.$$

Lemma 17.6 (Gronwall)

Nechť funkce u je spojitá a nezáporná na intervalu $\langle t_0, t_1)$, $t_0 \in \mathbf{R}$, $t_1 \in \mathbf{R}^\star$. *Nechť existují čísla* $a \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ *taková, že*

$$u(t) \leq a + \int_{t_0}^{t} (\alpha u(s) + \beta)\, ds, \qquad t \in \langle t_0, t_1).$$

Pak

$$u(t) \leq \left(a + \frac{\beta}{\alpha} \right) e^{\alpha(t - t_0)}, \qquad t \in \langle t_0, t_1).$$

Lemma 17.7

Nechť funkce $\boldsymbol{x}\colon \langle a,b\rangle \to \mathbf{R}^n$ *je spojitá a* $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$ *je otevřená množina. Nechť platí*

$$\{[t,\boldsymbol{x}(t)] \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n;\ t\in\langle a,b\rangle\} \subset G.$$

Potom existuje $\xi > 0$ *takové, že*

$$\{[t,\boldsymbol{z}] \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}^n;\ t\in\langle a,b\rangle, \|\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{z}\| \le \xi\} \subset G.$$

Lemma 17.8

Nechť $\boldsymbol{x} : \langle a, b \rangle \to \mathbf{R}^n$ je spojité. Potom platí

$$\left\| \int_a^b \boldsymbol{x}(t)\, dt \right\| \le n \int_a^b \|\boldsymbol{x}(t)\|\, dt.$$

Lemma 17.9

Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ *je neprázdná a otevřená a* $\boldsymbol{g} \in \mathcal{C}^1(G, \mathbf{R}^m)$*.*
Nechť dále $C \subset G$ *je konvexní a předpokládejme, že existuje* $M \in \mathbf{R}$*,* $M > 0$*, takové, že*

$$\forall i \in \{1, \ldots, m\}\ \forall j \in \{1, \ldots, n\}\ \forall \boldsymbol{x} \in C\colon \left|\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})\right| \leq M.$$

Potom pro každé dva body $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in C$ *platí*

$$\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{v})\| \leq L\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|,$$

kde $L = n\sqrt{m}M$*.*

Věta 17.10 (spojitá závislost na počátečních podmínkách)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *je otevřená a* $\mathbf{f}$ *splňuje podmínku (P) na* G*.*

Věta 17.10 (spojitá závislost na počátečních podmínkách)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ *je otevřená a* $\boldsymbol{f}$ *splňuje podmínku (P) na G. Nechť* $\boldsymbol{x}$ *je maximální řešení soustavy* (17.1) *definované na* (α, β) *a* $t_0 \in (\alpha, \beta)$.

Věta 17.10 (spojitá závislost na počátečních podmínkách)

Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená a $\boldsymbol{f}$ splňuje podmínku (P) na G. Nechť $\boldsymbol{x}$ je maximální řešení soustavy (17.1) *definované na (α, β) a $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Pak pro každé $\tau_1 \in (\alpha, t_0)$, $\tau_2 \in (t_0, \beta)$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé maximální řešení $\boldsymbol{y}$, které splňuje podmínku $\|\boldsymbol{y}(t_0) - \boldsymbol{x}(t_0)\| < \delta$, platí:*

Věta 17.10 (spojitá závislost na počátečních podmínkách)

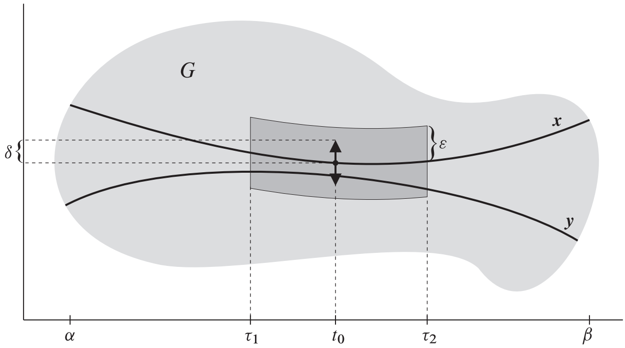
Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená a $\boldsymbol{f}$ splňuje podmínku (P) na G. Nechť $\boldsymbol{x}$ je maximální řešení soustavy (17.1) *definované na* (α, β) *a $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Pak pro každé $\tau_1 \in (\alpha, t_0)$, $\tau_2 \in (t_0, \beta)$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé maximální řešení $\boldsymbol{y}$, které splňuje podmínku $\|\boldsymbol{y}(t_0) - \boldsymbol{x}(t_0)\| < \delta$, platí:*

- *$\boldsymbol{y}$ je definováno v každém bodě intervalu $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$,*

Věta 17.10 (spojitá závislost na počátečních podmínkách)

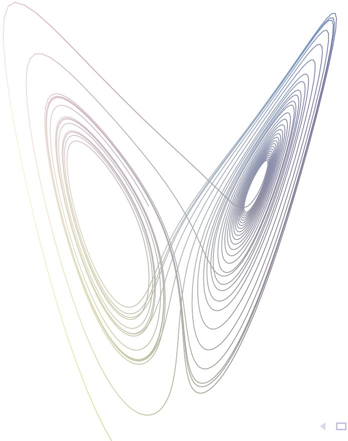
Nechť $G \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ je otevřená a $\boldsymbol{f}$ splňuje podmínku (P) na G. Nechť $\boldsymbol{x}$ je maximální řešení soustavy (17.1) *definované na (α, β) a $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Pak pro každé $\tau_1 \in (\alpha, t_0)$, $\tau_2 \in (t_0, \beta)$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé maximální řešení $\boldsymbol{y}$, které splňuje podmínku $\|\boldsymbol{y}(t_0) - \boldsymbol{x}(t_0)\| < \delta$, platí:*

- *$\boldsymbol{y}$ je definováno v každém bodě intervalu $\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$,*
- $\forall t \in \langle \tau_1, \tau_2 \rangle\colon\ \|\boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{y}(t)\| < \varepsilon$.



G
x
y
δ
ε
α
τ1
t0
τ2
β

Lorenzův model



17.3 Soustavy lineárních dif. rovnic

Uvažujme soustavu diferenciálních rovnic ve tvaru

$$
\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t),\\
x_2' &= a_{21}(t)x_1 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t),\\
&\vdots\\
x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t),
\end{aligned}
\tag{17.2}
$$

kde $n \in \mathbf{N}$, $a_{ij} \colon (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$, $b_i \colon (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, jsou spojité funkce.

Vektorový tvar:

$$\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t),$$

kde

$$\mathbb{A}(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b}(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Věta 17.11 (o existenci a jednoznačnosti řešení)

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$*,* $\alpha < \beta$*,* $t_0 \in (\alpha, \beta)$ *a* $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbf{R}^n$*. Nechť* $\mathbb{A}\colon (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$*,* $\boldsymbol{b}\colon (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}^n$ *jsou spojitá zobrazení. Potom existuje právě jedno maximální řešení* $\boldsymbol{x}$ *soustavy* (17.2) *splňující* $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}^0$*. Toto řešení je definováno na celém intervalu* (α, β)*.*

Definice

Homogenní soustavou k (17.2) rozumíme soustavu

$$\boldsymbol{x}' = \mathbb{A}(t)\boldsymbol{x}. \tag{17.3}$$

Věta 17.12

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$, a $\mathbb{A}\colon (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$ je spojité zobrazení. Potom množina všech maximálních řešení soustavy (17.3) *tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^1((\alpha, \beta), \mathbf{R}^n)$. Dimenze tohoto podprostoru je rovna n.*

Věta 17.13

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$*,* $\alpha < \beta$*. Nechť* $\mathbb{A}\colon (\alpha, \beta) \to M(n \times n)$*,* $\boldsymbol{b}\colon (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}^n$ *jsou spojitá zobrazení. Nechť* $\boldsymbol{y}$ *je řešení* (17.2) *na intervalu* (α, β)*. Potom každé řešení* $\boldsymbol{x}$ *soustavy* (17.2) *na intervalu* (α, β) *má tvar* $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}$*, kde* $\boldsymbol{z}$ *je jisté řešení* (17.3)*.*

Definice

Nechť vektorové funkce $\boldsymbol{y}^1, \dots, \boldsymbol{y}^n$ tvoří bázi prostoru řešení rovnice (17.3) na (α, β). Takovou množinu řešení nazýváme **fundamentální** systém rovnice (17.3).

Označme

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} y_1^1(t) & \dots & y_1^n(t) \\ y_2^1(t) & \dots & y_2^n(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n^1(t) & \dots & y_n^n(t) \end{pmatrix}.$$

Matici Φ nazýváme **fundamentální maticí soustavy** (17.3).

Lemma 17.14

Nechť Φ *je fundamentální matice rovnice* (17.3)*. Pak* $\Phi(t)$ *je regulární pro každé* $t \in (\alpha, \beta)$*.*

Lemma 17.14

Nechť Φ *je fundamentální matice rovnice* (17.3). *Pak* $\Phi(t)$ *je regulární pro každé* $t \in (\alpha, \beta)$.

Věta 17.15 (variace konstant)

Nechť $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^\star$, $\alpha < \beta$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$ *a* $\boldsymbol{y}^0 \in \mathbf{R}^n$. *Pak maximální řešení* $\boldsymbol{y}$ *rovnice* (17.2) *s počáteční podmínkou* $\boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}^0$ *má tvar*

$$\boldsymbol{y}(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)\boldsymbol{y}^0 + \Phi(t)\int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\boldsymbol{b}(s)\,ds, \quad t \in (\alpha, \beta),$$

kde Φ *je fundamentální matice soustavy* (17.3).

17.4 Řešení lin. soustav s konst. koeficienty

Věta 17.16

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ *a vektorová funkce* $\boldsymbol{y}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ *je řešením soustavy* $\boldsymbol{y}' = \mathbb{A}\boldsymbol{y}$. *Pak* $\boldsymbol{y}$ *je třídy* $\mathcal{C}^\infty$ *a pro každé* $k \in \mathbf{N}$ *platí* $\boldsymbol{y}^{(k)}(x) = \mathbb{A}^k \boldsymbol{y}(x)$ *pro* $x \in \mathbf{R}$.

Definice

Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ, nazýváme λ**-maticí**.

Definice

Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ, nazýváme λ**-maticí**. **Řádkovými úpravami** λ**-matice** rozumíme:

- záměnu dvou řádků,

Definice

Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ, nazýváme **λ-maticí**. **Řádkovými úpravami λ-matice** rozumíme:

- záměnu dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovou konstantou,

Definice

Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ, nazýváme **λ-maticí**. **Řádkovými úpravami λ-matice** rozumíme:

- záměnu dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovou konstantou,
- přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde $P(\lambda)$ je polynom v proměnné λ.

Definice

Matici, jejíž prvky jsou polynomy v proměnné λ, nazýváme **λ-maticí**. **Řádkovými úpravami λ-matice** rozumíme:

- záměnu dvou řádků,
- vynásobení řádku nenulovou konstantou,
- přičtení $P(\lambda)$-násobku jednoho řádku k jinému řádku, kde $P(\lambda)$ je polynom v proměnné λ.

Lemma 17.17

Nechť $\Lambda = (P_1, \dots, P_n)^T$ je λ-matice. Potom ji lze konečnou posloupností řádkových úprav převést na λ-matici $\tilde{\Lambda} = (\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n)^T$, kde nejvýše jeden z polynomů $\tilde{P}_1, \dots, \tilde{P}_n$ je nenulový.

Věta 17.18

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. *Pak lze* λ*-matici* $\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}$ *převést konečnou posloupností řádkových úprav na horní trojúhelníkovou* λ*-matici. Výsledná* λ*-matice má na diagonále nenulové polynomy, součet jejichž stupňů je n.*

Označení

- Nechť $P(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$ je polynom a $y\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ je funkce mající vlastní derivaci n-tého řádu na $\mathbf{R}$. Potom symbol $P(\frac{d}{dx})y$ značí funkci

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y.$$

Označení

- Nechť $\mathbb{P} = (P_{ij})$ je λ-matice typu $n \times n$. Soustavou diferenciálních rovnic odpovídající $\mathbb{P}$ budeme rozumět soustavu

$$
\begin{aligned}
P_{11}(\frac{d}{dx})y_1 + \cdots + P_{1n}(\frac{d}{dx})y_n &= 0,\\
P_{21}(\frac{d}{dx})y_1 + \cdots + P_{2n}(\frac{d}{dx})y_n &= 0,\\
&\vdots\\
P_{n1}(\frac{d}{dx})y_1 + \cdots + P_{nn}(\frac{d}{dx})y_n &= 0.
\end{aligned}
$$

Věta 17.19

Nechť λ-matice $\tilde{\mathbb{P}}$ vznikla konečnou posloupností řádkových úprav z λ-matice $\mathbb{P}$. Potom vektorová funkce $\boldsymbol{y}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ třídy $\mathcal{C}^\infty$ je řešením soustavy odpovídající matici $\mathbb{P}$, právě když je řešením soustavy odpovídající $\tilde{\mathbb{P}}$.

Příklad 1

$$y_1' = 4y_1 + 5y_2$$
$$y_2 = -2y_1 - 2y_2$$

Příklad 1

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + 5y_2 \\ y_2 &= -2y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

$$\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix}$$

Příklad 1

$$y_1' = 4y_1 + 5y_2$$
$$y_2 = -2y_1 - 2y_2$$

$$\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\lambda + 1 \\ 0 & \lambda^2 - 2\lambda + 2 \end{pmatrix}$$

Příklad 1

$$y_1' = 4y_1 + 5y_2$$
$$y_2 = -2y_1 - 2y_2$$

$$\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ 2 & \lambda + 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}\lambda + 1 \\ 0 & \lambda^2 - 2\lambda + 2 \end{pmatrix}$$

$$y_1 + \frac{1}{2}y_2' + y_2 = 0$$
$$y_2'' - 2y_2' + 2y_2 = 0$$

$$y_2 = \alpha_1 e^t \sin t + \alpha_2 e^t \cos t$$
$$y_1 = \left(-\frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2\right) e^t \sin t + \left(-\frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{3}{2}\alpha_2\right) e^t \cos t$$

$$y_2 = \alpha_1 e^t \sin t + \alpha_2 e^t \cos t$$
$$y_1 = \left(-\frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2\right) e^t \sin t + \left(-\frac{1}{2}\alpha_1 - \frac{3}{2}\alpha_2\right) e^t \cos t$$

Příklad 2

$$
\begin{aligned}
u' &= -u + 2v + \sin t \\
v' &= -2u + 3v + \cos t
\end{aligned}
$$

Příklad 2

$$\begin{aligned} u' &= -u + 2v + \sin t \\ v' &= -2u + 3v + \cos t \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda + 1 & -2 & \sin t \\ 2 & \lambda - 3 & \cos t \end{pmatrix}$$

Příklad 2

$$
\begin{aligned}
u' &= -u + 2v + \sin t \\
v' &= -2u + 3v + \cos t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} \lambda + 1 & -2 & \sin t \\ 2 & \lambda - 3 & \cos t \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 2 & \lambda - 3 & \cos t \\ \lambda + 1 & -2 & \sin t \end{pmatrix}
$$

Příklad 2

$$\begin{aligned} u' &= -u + 2v + \sin t \\ v' &= -2u + 3v + \cos t \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda + 1 & -2 & \sin t \\ 2 & \lambda - 3 & \cos t \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda - 3 & \cos t \\ \lambda + 1 & -2 & \sin t \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda - 3 & \cos t \\ 0 & -\frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda - \frac{1}{2} & \sin t - \frac{1}{2}\lambda \cos t - \frac{1}{2} \cos t \end{pmatrix}$$

Příklad 2

$$
\begin{aligned}
u' &= -u + 2v + \sin t \\
v' &= -2u + 3v + \cos t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} \lambda + 1 & -2 & \sin t \\ 2 & \lambda - 3 & \cos t \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 2 & \lambda - 3 & \cos t \\ \lambda + 1 & -2 & \sin t \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 2 & \lambda - 3 & \cos t \\ 0 & -\frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda - \frac{1}{2} & \sin t - \frac{1}{2}\lambda \cos t - \frac{1}{2} \cos t \end{pmatrix}
$$

$$
2u + v' - 3v = \cos t
$$

Příklad 2

$$\begin{aligned} u' &= -u + 2v + \sin t \\ v' &= -2u + 3v + \cos t \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda+1 & -2 & \sin t \\ 2 & \lambda-3 & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda-3 & \cos t \\ \lambda+1 & -2 & \sin t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda-3 & \cos t \\ 0 & -\frac{1}{2}\lambda^2+\lambda-\frac{1}{2} & \sin t - \frac{1}{2}\lambda\cos t - \frac{1}{2}\cos t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2u + v' - 3v &= \cos t \\ -\frac{1}{2}v'' + v' - \frac{1}{2}v &= \sin t - \frac{1}{2}(\cos t)' - \frac{1}{2}\cos t \end{aligned}$$

Příklad 2

$$\begin{aligned} u' &= -u + 2v + \sin t \\ v' &= -2u + 3v + \cos t \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda+1 & -2 & \sin t \\ 2 & \lambda-3 & \cos t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda-3 & \cos t \\ \lambda+1 & -2 & \sin t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda-3 & \cos t \\ 0 & -\frac{1}{2}\lambda^2+\lambda-\frac{1}{2} & \sin t - \frac{1}{2}\lambda\cos t - \frac{1}{2}\cos t \end{pmatrix}$$

$$2u + v' - 3v = \cos t$$

$$v'' - 2v' + v = \cos t - 3\sin t$$

charakteristický polynom: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$

charakteristický polynom: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$
fundamentální systém: e^t, te^t

charakteristický polynom: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$
fundamentální systém: e^t, te^t
partikulární řešení existuje ve tvaru $v_p(t) = a\cos t + b\sin t$

charakteristický polynom: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$
fundamentální systém: e^t, te^t
partikulární řešení existuje ve tvaru $v_p(t) = a\cos t + b\sin t$
$v_p'(t) = b\cos t - a\sin t$, $v_p''(t) = -a\cos t - b\sin t$

charakteristický polynom: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$
fundamentální systém: e^t, te^t
partikulární řešení existuje ve tvaru $v_p(t) = a\cos t + b\sin t$
$v_p'(t) = b\cos t - a\sin t$, $v_p''(t) = -a\cos t - b\sin t$

charakteristický polynom: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$
fundamentální systém: e^t, te^t
partikulární řešení existuje ve tvaru $v_p(t) = a\cos t + b\sin t$
$v_p'(t) = b\cos t - a\sin t$, $v_p''(t) = -a\cos t - b\sin t$

$$-2b\cos t + 2a\sin t = \cos t - 3\sin t$$

charakteristický polynom: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$
fundamentální systém: e^t, te^t
partikulární řešení existuje ve tvaru $v_p(t) = a\cos t + b\sin t$
$v_p'(t) = b\cos t - a\sin t$, $v_p''(t) = -a\cos t - b\sin t$

$$-2b\cos t + 2a\sin t = \cos t - 3\sin t$$

$b = -1/2$, $a = -3/2$

charakteristický polynom: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$
fundamentální systém: e^t, te^t
partikulární řešení existuje ve tvaru $v_p(t) = a\cos t + b\sin t$
$v_p'(t) = b\cos t - a\sin t$, $v_p''(t) = -a\cos t - b\sin t$

$$-2b\cos t + 2a\sin t = \cos t - 3\sin t$$

$b = -1/2$, $a = -3/2$
obecné řešení:

$$v(t) = -\frac{3}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t + (ct + d)e^t.$$

charakteristický polynom: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$
fundamentální systém: e^t, te^t
partikulární řešení existuje ve tvaru $v_p(t) = a\cos t + b\sin t$
$v_p'(t) = b\cos t - a\sin t$, $v_p''(t) = -a\cos t - b\sin t$

$$-2b\cos t + 2a\sin t = \cos t - 3\sin t$$

$b = -1/2$, $a = -3/2$
obecné řešení:

$$v(t) = -\frac{3}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t + (ct + d)e^t.$$

$$u(t) = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}v'(t) + \frac{3}{2}v(t)$$

charakteristický polynom: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$
fundamentální systém: e^t, te^t
partikulární řešení existuje ve tvaru $v_p(t) = a\cos t + b\sin t$
$v_p'(t) = b\cos t - a\sin t$, $v_p''(t) = -a\cos t - b\sin t$

$$-2b\cos t + 2a\sin t = \cos t - 3\sin t$$

$b = -1/2$, $a = -3/2$
obecné řešení:

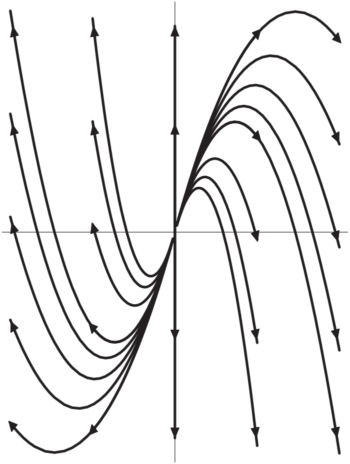
$$v(t) = -\frac{3}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t + (ct + d)e^t.$$

$$u(t) = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}v'(t) + \frac{3}{2}v(t)$$

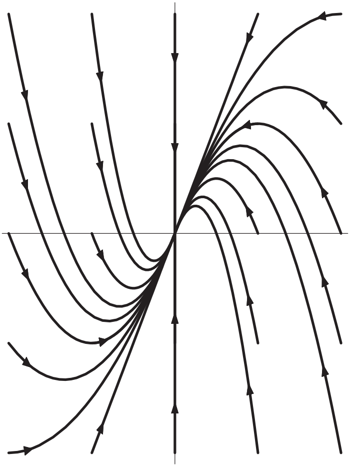
$$u(t) = -\frac{3}{2}\cos t - \frac{3}{2}\sin t + \left(ct - \frac{1}{2}c + d\right)e^t.$$

Závěrečná poznámka o stabilitě řešení

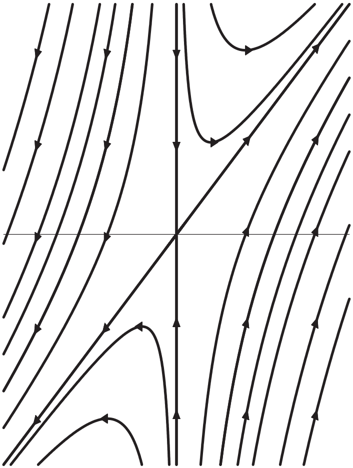
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$



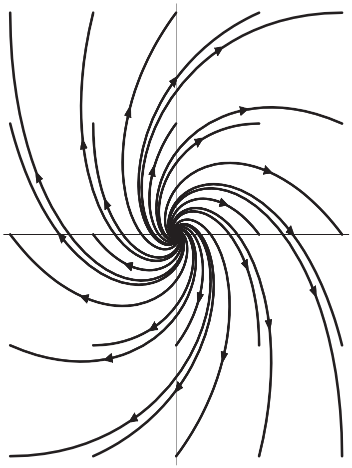
$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_1 \neq \lambda_2$



$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$



$\lambda_1 \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}, \Re\lambda_1 > 0$



$\lambda_1 \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}, \Re\lambda_1 < 0$