Písemná zkouška z Matematiky IV pro FSV (A)
LS 2002-2003

Příklad A1 : Určete typ následujících diferenciálních rovnic a navrhněte způsob řešení:

(a) $y'' + 16y' - 10y + x^2 = e^x$; (4 body)
(b) $y'(y+x) - 17x = y$; (4 body)
(c) $y'e^{x^2+y} - 3y + 2xe^{x^2+y} - 3xy' = 0$. (4 body)

Příklad A2 : Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$x^2y'' + 9xy' + 17y = x^2.$$

Určete všechna řešení definovaná na $\mathbf{R}$. (12 bodů)

Příklad A3 : Určete maximální řešení splňující $y(0) = \frac{1+e^{\pi/2}}{1-e^{\pi/2}}$.

$$y' = \frac{y^2-1}{x^2+1}$$

Příklad A4 : Najděte všechna maximální řešení soustavy

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}.$$

Napište tvar nějaké fundamentální matice. (12 bodů)

Příklad A5 : Uvažujme autonomní rovnici

$$y' = \frac{(y^6-1)\sqrt[3]{y}}{y^5+32}.$$

Určete a načrtněte množinu všech bodů v $\mathbf{R}^2$, (a) kterými prochází nějaké maximální řešení definované na omezeném intervalu; (b) kterými prochází nějaké klesající maximální řešení.
(12 bodů)

Test A – výsledky

Příklad A1 : (a) Jde o lineární rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Do standardního tvaru ji převedeme odečtením x^2 od obou stran rovnice. Nejprve najdeme fundamentální systém řešení homogenní rovnice (pomocí charakteristického polynomu) a pak partikulární řešení nehomogenní rovnice. Pravá strana je $e^x - x^2$, je tedy součtem dvou „pravých stran ve speciálním tvaru.

(b) Pro $y + x \neq 0$ lze upravit na rovnici $y' = \frac{y+17x}{y+x}$, což je homogenní rovnice. Hledáme řešení ve tvaru $y = xz$, čímž rovnici převedeme na rovnici se separovanými proměnnými.

(c) Jde o exaktní rovnici. Levou stranu vyjádříme jako derivaci.

Příklad A2 : Řešení na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ jsou $y(x) = \frac{1}{37}x^2 + \frac{a}{x^4}\cos\log|x| + \frac{b}{x^4}\sin\log|x|$ $(a, b \in \mathbf{R})$; na $\mathbf{R}$ je definováno jediné řešení, a to $y(x) = \frac{1}{37}x^2$.

Příklad A3 : Všechna maximální řešení: $y(x) = 1$, $x \in \mathbf{R}$; $y(x) = -1$, $x \in \mathbf{R}$; dále řešení daná vzorcem $y(x) = \frac{1+ke^{2\,\mathrm{arctg}\,x}}{1-ke^{2\,\mathrm{arctg}\,x}}$ na intervalech: $x \in \mathbf{R}$ $(k \in (-\infty, e^{-\pi}\rangle \cup \langle e^{\pi}, \infty))$; nebo $x \in (-\infty, -\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\log k))$ $(k \in (e^{-\pi}, e^{\pi}))$; nebo $x \in (-\operatorname{tg}(\frac{1}{2}\log k), \infty)$ $(k \in (e^{-\pi}, e^{\pi}))$. Řešení splňující počáteční podmínku je $y(x) = \frac{1+e^{\pi/2}e^{2\,\mathrm{arctg}\,x}}{1-e^{\pi/2}e^{2\,\mathrm{arctg}\,x}}$, $x \in (-1, \infty)$.

Příklad A4 : $\boldsymbol{y}(x) = [e^{2x}(-a + \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}c - bx + cx - cx^2), e^{2x}(a - \frac{1}{2}b + \frac{3}{4}c + bx - cx + cx^2), e^{2x}(a + bx + cx^2)]$, $x \in \mathbf{R}$ $(a, b, c \in \mathbf{R})$. Fundamentální matice: $\begin{pmatrix} -e^{2x} & (\frac{1}{2} - x)e^{2x} & (-x^2 + x - \frac{1}{4})e^{2x} \\ e^{2x} & (x - \frac{1}{2})e^{2x} & (x^2 - x + \frac{3}{4})e^{2x} \\ e^{2x} & xe^{2x} & x^2e^{2x} \end{pmatrix}$.

Příklad A5 : (a) $\{[x, y] \in \mathbf{R}^2 < -2\}$ (b) $\{[x, y] \in \mathbf{R}^2 \in (-2, -1)\}$

Písemná zkouška z Matematiky IV pro FSV (B)
LS 2002-2003

Příklad B1 : Určete typ následujících diferenciálních rovnic a navrhněte způsob řešení:

(a) $y'(x^2+y^2) - \dfrac{x^4}{y} = x^2 y;$ (4 body)

(b) $x^2y'' - xy' + y = \sqrt[3]{x};$ (4 body)

(c) $x - \cos(xy)(y + xy')x - x + \sin(xy) = 0.$ (4 body)

Příklad B2 : Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y^{(4)} - 10y'' + 25y = 1 + \sin x.$$

Najděte všechna maximální řešení, která jsou omezená na $\mathbf{R}$. (12 bodů)

Příklad B3 : Určete maximální řešení splňující $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = y^2 \sin 2x$. Určete maximální řešení splňující $y(0) = -1$.

$$y' - y\,\mathrm{tg}\,x = y^2 \sin 2x.$$

Příklad B4 : Najděte všechna maximální řešení soustavy

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 0 & -11 & 22 \\ 4 & 7 & -8 \\ -2 & -9 & 15 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}$$

Pro které body $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbf{R}^3$ je řešení splňující $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$ omezené? (12 bodů)

Příklad B5 : Uvažujme autonomní rovnici

$$y' = \frac{\log(y+6)\sqrt[3]{y}}{y-2}.$$

Určete a načrtněte množinu všech bodů v $\mathbf{R}^2$, (a) kterými prochází nějaké rostoucí řešení; (b) kterými prochází nějaké rostoucí maximální řešení.

(12 bodů)

Test B – výsledky

Příklad B1 : (a) Lze upravit na rovnici $y' = \frac{x^2}{y}$, což je rovnice se separovanými proměnnými.

(b) Je to Eulerova rovnice druhého řádu. Nejprve najdeme fundamentální systém řešení homogenní rovnice (hledáme řešení ve tvaru x^α). Potom najdeme partikulární řešení (např. modifikací metody speciální pravé strany).

(c) Je to rovnice, pro kterou existuje integrační faktor nezávisející na y. Najdeme jej (to vede na řešení lineární rovnice prvního řádu). Pak jím rovnici vynásobíme. Nová rovnice bude exaktní, a tak levou stranu pak vyjádříme jako derivaci.

Příklad B2 : Všechna maximální řešení: $y(x) = \frac{1}{25} + \frac{1}{36}\sin x + ae^{x\sqrt{5}} + bxe^{x\sqrt{5}} + ce^{-x\sqrt{5}} + dxe^{-x\sqrt{5}}$, $x \in \mathbf{R}$ $(a, b, c, d \in \mathbf{R})$. Omezené na $\mathbf{R}$ je jediné řešení, a to $y(x) = \frac{1}{25} + \frac{1}{36}\sin x$, $x \in \mathbf{R}$.

Příklad B3 : Maximální řešení jsou dána vzorcem $y(x) = \frac{1}{\cos x(2\cos x + c)}$ na intervalech: pro $c > 2$, $c = 0$ nebo $c < -2$ na $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$; pro $c \in (-2, 0)$ na $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, -\arccos(-\frac{c}{2}) + 2k\pi)$ nebo $(-\arccos(-\frac{c}{2}) + 2k\pi, \arccos(-\frac{c}{2}) + 2k\pi)$ nebo $(\arccos(-\frac{c}{2}) + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ nebo $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi)$ $(k \in \mathbf{Z})$; pro $c \in (0, 2)$ na $(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ nebo $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \arccos(-\frac{c}{2}) + 2k\pi)$ nebo $(\arccos(-\frac{c}{2}) + 2k\pi, -\arccos(-\frac{c}{2}) + (2k+2)\pi)$ nebo $(-\arccos(-\frac{c}{2}) + (2k+2)\pi, \frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi)$. Řešení splňující počáteční podmínku je $y(x) = \frac{1}{\cos x(2\cos x - 3)}$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Příklad B4 : Maximální řešení: $\boldsymbol{y}(x) = [-\frac{3}{2}a + (2b - \frac{1}{11}c + 2cx)e^{11x}, 2a - \frac{1}{11}ce^{11x}, a + e^{11x}(b + cx)]$, $x \in \mathbf{R}$ $(a, b, c \in \mathbf{R})$. Hledané body jsou body tvaru $a \cdot [-\frac{3}{2}, 2, 1]$, $a \in \mathbf{R}$.

Příklad B5 : (a) $\{[x, y] \in \mathbf{R}^2 : y \in (-5, 0) \cup (2, \infty)\}$ (b) $\{[x, y] \in \mathbf{R}^2 : y > 2\}$.

Písemná zkouška z Matematiky IV pro FSV (C)
LS 2002-2003

Příklad C1 : Určete typ následujících diferenciálních rovnic a navrhněte způsob řešení:

(a) $xy'' + y' + \dfrac{y}{7x} = \operatorname{tg} x;$ (4 body)

(b) $y'y^6 + xy^7 = \log x;$ (4 body)

(c) $\dfrac{1+y'}{(x+y)^2} + \dfrac{1-y'}{\cos^2(x-y)} = 6.$ (4 body)

Příklad C2 : Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y' + \frac{y}{x^3} = \frac{17}{x^5}.$$

Najděte všechna maximální řešení, která mají v $+\infty$ limitu 0. (12 bodů)

Příklad C3 : Určete maximální řešení splňující .

$$y' = x\sqrt[3]{1-y}.$$

Příklad C4 : Najděte všechna maximální řešení soustavy

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 9 & -10 & -4 \\ 4 & -5 & 1 \\ 10 & -10 & -5 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}.$$

Pro které body $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbf{R}^3$ má řešení splňující $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$ v $+\infty$ limitu 0? (12 bodů)

Příklad C5 : Uvažujme autonomní rovnici

$$y' = \sin\sqrt{y}.$$

Určete a načrtněte množinu všech bodů v $\mathbf{R}^2$, (a) kterými procházejí alespoň tři různá maximální řešení; (b) které jsou inflexními body nějakého řešení.

(12 bodů)

Test C – výsledky

Příklad C1 : (a) Po vynásobení x jde o Eulerovu rovnici. Nejprve najdeme fundamentální systém řešení homogenní rovnice (hledáme řešení ve tvaru x^α). Pak najdeme partikulární řešení metodou variace konstant aplikované na rovnici $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{7x^2} = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

(b) Po vydělení y^6 jde o Bernoulliho rovnici. Tu bychom opět vynásobili y^6 a takto vzniklou rovnici (tj. původní rovnici) vynásobili integračním faktorem $e^{\frac{7}{2}x^2}$. Pak bychom levou stranu vyjádřili jako derivaci a k pravé nalezli primitivní funkci.

(c) Jde o exaktní rovnici. Levou stranu vyjádříme jako derivaci.

Příklad C2 : Maximální řešení: $y(x) = 34 + \frac{17}{x^2} + ce^{1/2x^2}$, $x \in (-\infty, 0)$ nebo $x \in (0, \infty)$ ($c \in \mathbf{R}$). Řešení splňující uvedenou podmínku: $y(x) = 34 + \frac{17}{x^2} - 34e^{1/2x^2}$, $x \in (0, \infty)$.

Příklad C3 : Maximální řešení: $y(x) = 1$, $x \in \mathbf{R}$;

$$y(x) = \begin{cases} 1, & x \leq -\sqrt{-2c}, \\ 1 + \sqrt{-\frac{1}{27}(x^2 + 2c)^3}, & x \in (-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}), \\ 1, & x \geq \sqrt{-2c}; \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} 1, & x \leq -\sqrt{-2c}, \\ 1 - \sqrt{-\frac{1}{27}(x^2 + 2c)^3}, & x \in (-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}), \\ 1, & x \geq \sqrt{-2c}; \end{cases} \quad (c \in (-\infty, 0)).$$

Příklad C4 : Maximální řešení: $\boldsymbol{y}(x) = [a \cos 5x + b \sin 5x + ce^{-x}, \frac{1}{2}(a \cos 5x + a \sin 5x - b \cos 5x + b \sin 5x) + ce^{-x}, a \cos 5x + b \sin 5x]$, $x \in \mathbf{R}$ ($a, b, c \in \mathbf{R}$). Hledané body jsou $c \cdot [1, 1, 0]$, $c \in \mathbf{R}$.

Příklad C5 : (a) $\{[x, y] \in \mathbf{R}^2 = 0\}$; (b) $\{[x, y] \in \mathbf{R}^2 = (\frac{\pi}{2} + k\pi)^2, k \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$.

Písemná zkouška z Matematiky IV pro FSV (D)
LS 2002-2003

Příklad D1 : Určete typ následujících diferenciálních rovnic a navrhněte způsob řešení:

(a) $y'y\cos y - y\sin x - y'\cos x - y'\sin y = 0$; (4 body)
(b) $y'\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = y - \sin x$; (4 body)
(c) $y''' - y'' + \operatorname{cotg} x = y$. (4 body)

Příklad D2 : Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$x^2y'' - 15xy' - 17y = x$$

Určete všechna řešení definovaná na $\mathbf{R}$. (12 bodů)

Příklad D3 : Najděte všechna maximální řešení.

$$-y'e^y(x^2+17) + e^x - 2xe^y = 0$$

Najděte maximální řešení splňující $y(0) = 0$.

Příklad D4 : Najděte všechna řešení soustavy

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}$$

Pro které body $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbf{R}^3$ má řešení splňující $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$ v $+\infty$ limitu 0?
(12 bodů)

Příklad D5 : Uvažujme autonomní rovnici

$$y' = (y-2)\sqrt[3]{y^2}\sqrt{16-y^4}(y+1).$$

Určete a načrtněte množinu všech bodů v $\mathbf{R}^2$, (a) kterými prochází právě jedno maximální řešení; (b) kterými prochází nějaké klesající maximální řešení. (12 bodů)

Test D – výsledky

Příklad D1 : (a) Je to rovnice, pro kterou existuje integrační faktor nezávisející na x. Najdeme jej (to vede na řešení lineární rovnice prvního řádu). Pak jím rovnici vynásobíme. Nová rovnice bude exaktní, a tak levou stranu pak vyjádříme jako derivaci.

(b) Pro $x \in (k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2})$ ($k \in \mathbf{Z}$) upravíme na $y' - y\operatorname{cotg} x = -\operatorname{cotg}^2 x - \cos x$, což je lineární rovnice prvního řádu. Vyřešíme ji metodou integračního faktoru. Nakonec prozkoumáme možnost nalepování v bodech $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

(c) Upravíme na $y''' - y'' - y = -\operatorname{cotg} x$. To je lineární rovnice třetího řádu s konstantními koeficienty. Nejprve najdeme fundamentální systém řešení homogenní rovnice (s využitím charakteristického polynomu). Partikulární řešení nehomogenní rovnice najdeme metodou variace konstant.

Příklad D2 : Řešení na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$ mají tvar $y(x) = -\frac{1}{32}x + \frac{a}{x} + bx^{17}$ $(a, b \in \mathbf{R})$. Řešení definovaná na $\mathbf{R}$ jsou $y(x) = \begin{cases} -\frac{1}{32}x + b_1 x^{17}, & x \leq 0, \\ -\frac{1}{32}x + b_2 x^{17}, & x > 0, \end{cases}$ $(b_1, b_2 \in \mathbf{R})$.

Příklad D3 : Maximální řešení: $y(x) = \log \frac{e^x - c}{x^2 + 17}$, $x \in \mathbf{R}$ pro $c \leq 0$; $x \in (\log c, \infty)$ pro $c > 0$. Řešení splňující počáteční podmínku: $y(x) = \log \frac{e^x + 16}{x^2 + 17}$, $x \in \mathbf{R}$.

Příklad D4 : Maximální řešení jsou: $\boldsymbol{y}(x) = [ae^{-x} \cos x + be^{-x} \sin x + ce^{2x}, \frac{1}{2}ae^{-x}(\cos x + \sin x) + \frac{1}{2}be^{-x}(\sin x - \cos x) + ce^{2x}, ae^{-x} \cos x + be^{-x} \sin x]$, $x \in \mathbf{R}$ $(a, b, c \in \mathbf{R})$. Hledané body jsou takové body $[t_1, t_2, t_3] \in \mathbf{R}^3$, pro které $t_1 = t_3$.

Příklad D5 : (a) $\{[x, y] \in \mathbf{R}^2 \in (-2, -1\rangle \cup \{2\}\}$; (b) $\{[x, y] \in \mathbf{R}^2 \in (-1, 2)\}$

Písemná zkouška z Matematiky IV pro FSV (E)
LS 2002-2003

Příklad E1 : Určete typ následujících diferenciálních rovnic a navrhněte způsob řešení:

(a) $2x + ye^{xy} + y'xe^{xy} - y' = 0;$ (4 body)
(b) $y' + y - y^8 \cos x = 0;$ (4 body)
(c) $y' + x^2 e^y = yx^2.$ (4 body)

Příklad E2 : Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y''' + y'' + y' = x^3.$$

Která maximální řešení mají limitu v $-\infty$? A čemu se ta limita rovná? (12 bodů)

Příklad E3 : Najděte maximální řešení splňující $y(0) = 0$.

$$y' \frac{x^2+1}{y^2+1} + 2x \operatorname{arctg} y - 1 = 0$$

Příklad E4 : Najděte všechna maximální řešení soustavy

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} -1 & -9 & 6 \\ -6 & 2 & -6 \\ 6 & -9 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}.$$

Pro které body $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbf{R}^3$ má řešení splňující $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$ v $-\infty$ limitu 0? (12 bodů)

Příklad E5 : Uvažujme autonomní rovnici

$$y' = (e^y - 1)\frac{\sqrt[3]{y-8}}{y-1}.$$

Určete a načrtněte množinu všech bodů v $\mathbf{R}^2$, (a) kterými prochází nějaké maximální řešení definované na $\mathbf{R}$; (b) kterými prochází nějaké rostoucí maximální řešení. (12 bodů)

Test E – výsledky

Příklad E1 : (a) Jde o exaktní rovnici. Levou stranu vyjádříme jako derivaci.

(b) Přepíšeme ve tvaru $y' + y = y^8 \cos x$. Jde o Bernoulliho rovnici. Konstatní nulová funkce je řešením. Dále hledáme řešení nenabývající nuly. Vydělíme rovnici y^8 a pak vynásobíme integračním faktorem.

(c) Po úpravě na $y' = x^2(y - e^y)$ jde o rovnici se separovanými proměnnými.

Příklad E2 : Maximální řešení: $y(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 6x + a + be^{-x/2} \cos \frac{x\sqrt{3}}{2} + ce^{-x/2} \sin \frac{x\sqrt{3}}{2}$, $x \in \mathbf{R}$ $(a, b, c \in \mathbf{R})$. Limitu v $-\infty$ mají řešení $y(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 6x + a$, $x \in \mathbf{R}$ $(a \in \mathbf{R})$. Ta limita je rovna $+\infty$.

Příklad E3 : Maximální řešení jsou dána vzorcem $y(x) = \operatorname{tg} \frac{x+c}{x^2+1}$ na intervalech: pro $c \geq \frac{\pi^2-1}{2\pi}$ na $(-\infty, \frac{2}{\pi}(1-\sqrt{1+2\pi c-\pi^2}))$ nebo na $\frac{2}{\pi}(1+\sqrt{1+2\pi c-\pi^2}), \infty)$; pro $c \leq \frac{1-\pi^2}{2\pi}$ na $(-\infty, \frac{2}{\pi}(-1-\sqrt{1-2\pi c-\pi^2}))$ nebo na $(\frac{2}{\pi}(-1+\sqrt{1-2\pi c-\pi^2}), \infty)$; pro $c \in (\frac{1-\pi^2}{2\pi}, \frac{\pi^2-1}{2\pi})$ na $\mathbf{R}$. Řešení splňující počáteční podmínku je $y(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{x^2+1}$, $x \in \mathbf{R}$.

Příklad E4 : Maximální řešení: $\boldsymbol{y}(x) = [ae^{14x} - be^{-7x} + \frac{3}{2}ce^{-7x}, -ae^{14x} + ce^{-7x}, ae^{14x} + be^{-7x}]$, $x \in \mathbf{R}$ $(a, b, c \in \mathbf{R})$. Hledané body jsou $a \cdot [1, -1, 1]$, $a \in \mathbf{R}$.

Příklad E5 : (a) $\{[x,y] \in \mathbf{R}^2 \in (-\infty, 0\rangle \cup \{2\}\}$; (b) $\{[x,y] \in \mathbf{R}^2 \in (0,1)\}$

Písemná zkouška z Matematiky IV pro FSV (VZOR)
LS 2002-2003

Příklad V1 : Určete typ následujících diferenciálních rovnic a navrhněte způsob řešení:

(a) $y''' - \dfrac{y}{x^3} = \sin x;$ (4 body)

(b) $y'\left(x \operatorname{tg} x + 2y \operatorname{tg} x + \sin(y-x) - \dfrac{\sin y}{\cos x}\right) + y \operatorname{tg} x + \sin(x-y) + \dfrac{\sin y}{\cos x} = 0;$
(4 body)

(c) $y' \log x + yx = x \cos y.$ (4 body)

Příklad V2 : Najděte všechna maximální řešení rovnice

$$y''' - y'' + y' - y = e^{-x}.$$

Určete, která z maximálních řešení jsou omezená na $(0, \infty)$. (12 bodů)

Příklad V3 : Určete maximální řešení, pro které platí $y(-\pi) = 1$. Existuje nějaké nenulové řešení definované na $\mathbf{R}$? Zdůvodněte.

$$y' + y \cos x = \frac{1}{2} y^2 \sin 2x$$

Příklad V4 : Najděte všechna maximální řešení soustavy

$$\boldsymbol{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}.$$

Pro které body $\boldsymbol{y}_0 \in \mathbf{R}^3$ má řešení splňující $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$ v $+\infty$ limitu 0? (12 bodů)

Příklad V5 : Uvažujme autonomní rovnici

$$y' = e^y \sqrt[3]{\operatorname{arctg} y} \cdot \frac{y-1}{y+1}$$

Určete a načrtněte množinu všech bodů v $\mathbf{R}^2$, (a) kterými prochází právě jedno maximální řešení; (b) kterými prochází alespoň jedno řešení definované na $\mathbf{R}$. (12 bodů)

Test V – výsledky

Příklad V1 : (a) Po vynásobení x^3 jde o Eulerovu rovnici. Najdeme fundamentální systém (např. hledáme řešení ve tvaru x^α) a pak najdeme partikulární řešení metodou variace konstant.

(b) Pro tuto rovnici existuje integrační faktor závisející pouze na x. Ten najdeme (jeho hledání vede na řešení lineární rovnice prvního řádu) a rovnici jim vynásobíme. Pak levou stranu vyjádříme jako derivaci.

(c) Po úpravě převedeme pro $x \in (0,1)$ a pro $x \in (1,\infty)$ na rovnici se separovanými proměnnými. Tu vyřešíme standardní metodou a na závěr prozkoumáme možnost nalepování v bodě 1.

Příklad V2 : Všechna maximální řešení jsou $y(x) = -\frac{1}{4}e^{-x} + a\cos x + b\sin x + ce^{x}$, $x \in \mathbf{R}$ $(a,b,c \in \mathbf{R})$. Omezená na $(0,\infty)$ jsou ta z předchozích řešení, pro která je $c = 0$, tj. $y(x) = -\frac{1}{4}e^{-x} + a\cos x + b\sin x$, $x \in \mathbf{R}$ $(a,b \in \mathbf{R})$.

Příklad V3 : Maximální řešení jsou jednak $y = 0$ na $\mathbf{R}$ a pak funkce tvaru $y(x) = \frac{1}{1+\sin x + ce^{\sin x}}$ definované na otevřených intervalech, na nichž je $1+\sin x + c\cos x \neq 0$. Řešení splňující počáteční podmínku je $y(x) = \frac{1}{1+\sin x}$, $x \in (-\frac{5}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi)$. Nenulové řešení definované na celém $\mathbf{R}$ existuje – například je to libovolné z uvedených řešení pro $c > 0$.

Příklad V4 : Řešení jsou $\boldsymbol{y}(x) = [a + be^{7x} + ce^{-2x}, -\frac{6}{5}a + 3be^{7x} - 6ce^{-2x}, \frac{1}{5}a + 3be^{7x} + 3ce^{-x}]$, $x \in \mathbf{R}$ $(a,b,c \in \mathbf{R})$. Hledané body jsou body $c \cdot [1,-6,3]$, $c \in \mathbf{R}$.

Příklad V5 : (a) $\{[x,y] \in \mathbf{R}^2 \neq 0 \;\&\; y \neq -1\}$ (b) $\{[x,y] \in \mathbf{R}^2 \in \langle 0,1\rangle\}$.