1. Vektorové prostory

1. Zjistěte, které z těchto podmnožin jsou podprostory $\mathbf{R}^3$:

(i) $W_1 = \{(r, 2r, 3r);\ r \in \mathbf{R}\}$,
(ii) $W_2 = \{(2s+t, s-t, 3s+t);\ s, t \in \mathbf{R}\}$,
(iii) $W_1 \cup W_2$,
(iv) $W_1 \cap W_2$,
(v) $W_3 = \{(r+2s+t, 2r+s-t, 3r+3s+t);\ r,\ s,\ t \in \mathbf{R}\}$.

2. Zjistěte, zda následující množiny polynomů (s obvyklou definicí sčítání a násobení reálným číslem) tvoří vektorový prostor:

(i) Všechny polynomy p, pro které $p(0) = 1$.
(ii) Všechny polynomy p, pro které $p(0) = 0$.
(iii) Všechny polynomy p, pro které $p'(0) = 0$.
(iv) Všechny polynomy p, pro které $2p(0) - 3p(1) = 0$.

3. Zjistěte, zda následující vektory vektorového prostoru $\mathcal{C}(I)$ všech spojitých funkcí na otevřeném intervalu I jsou lineárně nezávislé:

(i) $\sin x$, $x \sin x$, $x^2 \sin x$,
(ii) $3x^2 + 2x + 1$, $x^2 + x + 3$, $x^2 - 2x + 1$,
(iii) $P_1(x)e^{\lambda_1 x}, \dots, P_n(x)e^{\lambda_n x}$, kde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou navzájem různá reálná čísla a $P_1, \dots, P_n$ jsou nenulové polynomy.

4. Rozhodněte, zda množina U tvoří vektorový podprostor prostoru $M(n \times n)$.

(i) $U = \{A \in M(n \times n);\ A \text{ je regulární matice}\}$
(ii) $U = \{A \in M(n \times n);\ A \text{ je horní trojúhelníková matice}\}$
(iii) $U = \{A \in M(n \times n);\ \det A = 0\}$
(iv) $U = \{A \in M(n \times n);\ \text{součet prvků na diagonále matice } A \text{ je roven nule}\}$

5. Nechť $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{R}$. Ukažte, že množina funkcí

$$\{f : \mathbf{R} \to \mathbf{R};\ a_n f^{(n)}(x) + \cdots + a_1 f'(x) + a_0 f(x) = 0 \text{ pro každé } x \in \mathbf{R}\}$$

tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}(I)$.

6. Určete dimenzi a nalezňetete nějakou bázi vektorového prostoru V, kde

(1) $V = \mathrm{lin}_{\mathbf{R}}\{[1,1,1],[1,2,2],[10,11,11]\} \subset \mathbf{R}^3$.
(2) $V = \mathrm{lin}_{\mathbf{R}}\{[1,1,1,2,2],[-1,-2,-2,-2,2],[19,1,1,1,1],[-1,-3,-3,-2,6]\} \subset \mathbf{R}^5$.
(3) $V = \mathrm{lin}_{\mathbf{R}}\{x+7, x^2-x-1, x^2+3, x-5\} \subset \mathcal{C}(\mathbf{R})$.
(4) $V = \mathrm{lin}_{\mathbf{R}}\{\sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x\} \subset \mathcal{C}(\mathbf{R})$.
(5) $V = \mathbf{C}^2$ jako vektorový prostor nad $\mathbf{R}$.
(6) $V = M(2 \times 3)$.
(7) $V = \{\mathbb{A} \in M(3 \times 3) : \mathbb{A}^T = \mathbb{A}\}$.
(8) $V = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbf{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$.
(9) $V = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \in \mathbf{R}^4 : x_1 + x_3 - x_4 = 0, x_2 + x_4 = 0, x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$.
(10) $V = \{f \in \mathbf{C}(\mathbf{R}) : f \text{ má všude pátou derivaci a } f^{(5)} = 0 \text{ na } \mathbf{R}\}$.

Výsledky

6.

(1) $\dim V = 2$, báze je například $\{[1,1,1],[0,1,1]\}$ (nebo též $\{[1,1,1],[1,2,2]\}$).
(2) $\dim V = 3$, báze je například $\{[1,1,1,2,2],[0,-1,-1,0,4],[0,0,0,37,109]\}$.
(3) $\dim V = 3$, báze je například $\{1,x,x^2\}$.
(4) $\dim V = 4$, množina ze zadání je báze.
(5) $\dim V = 4$, báze je například $\{[1,0],[i,0],[0,1],[0,i]\}$.
(6) $\dim V = 6$, bázi tvoří například šestice matic, které mají na jednom místě 1 a na ostatních 0.
(7) $\dim V = 6$, bázi tvoří například

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&0&0\\1&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&1\\0&1&0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(8) $\dim V = 2$, báze je například $\{[1,0,1],[0,1,1]\}$.
(9) $\dim V = 1$, báze je například $\{[0,-1,1,1]\}$.
(10) $\dim V = 5$, báze je například $\{1,x,x^2,x^3,x^4\}$.