Matematika 3

FSV UK, LS 2017-18

Miroslav Zelený

9. Integrál – pokračování

9.1 Riemannův integrál – pokračování

Věta 9.1 (integrace per partes)

Nechť funkce f, g, f' a g' jsou spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak platí

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.$$

Věta 9.2 (substituce)

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Nechť dále funkce φ má na intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ spojitou derivaci a zobrazuje jej do intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,dt.$$

9.2 Zobecněný Riemannův integrál

Lemma 9.3 (spojitost Riemannova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a funkce f má na intervalu $\langle a, b \rangle$ Riemannův integrál. Pak platí

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b-} \int_a^x f = \lim_{x \to a+} \int_x^b f.$$

Lemma 9.4

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, *a funkce* f *má Riemannův integrál na každém podintervalu* $\langle x, y \rangle \subset (a, b)$*. Nechť dále* $c \in (a, b)$, *existují limity* $\lim_{x \to a+} \int_x^c f$ *a* $\lim_{y \to b-} \int_c^y f$ *a jejich součet je definován. Pak pro každé* $d \in (a, b)$ *existují* $\lim_{x \to a+} \int_x^d f$ *a* $\lim_{y \to b-} \int_d^y f$ *a platí*

$$\lim_{x \to a+} \int_x^d f + \lim_{y \to b-} \int_d^y f = \lim_{x \to a+} \int_x^c f + \lim_{y \to b-} \int_c^y f.$$

Definice

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, a nechť funkce f je definovaná na intervalu (a, b). Má-li funkce f Riemannův integrál na každém podintervalu $\langle x, y\rangle \subset (a, b)$ a existuje-li $c \in (a, b)$ takové, že limity $\lim_{x\to a+} \int_x^c f$ a $\lim_{y\to b-} \int_c^y f$ existují a jejich součet má smysl, pak definujeme **zobecněný Riemannův integrál** funkce f na intervalu (a, b) jako

$$\int_a^b f = \lim_{x\to a+} \int_x^c f + \lim_{y\to b-} \int_c^y f.$$

Lemma 9.5

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a funkce* f *je omezená na intervalu* $\langle a, b\rangle$. *Jestliže existuje Riemannův integrál funkce* f *na každém podintervalu* $\langle c, d\rangle \subset (a, b)$, *pak existuje i Riemannův integrál funkce* f *na intervalu* $\langle a, b\rangle$.

Lemma 9.6

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, *f je nezáporná na* (a, b) *a f má Riemannův integrál na každém podintervalu* $\langle x, y \rangle \subset (a, b)$. *Potom f má zobecněný Riemannův integrál na* (a, b).

Věta 9.7

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$ *a* $c \in (a, b)$*.*

(i) *Jestliže funkce* f *má zobecněný Riemannův integrál na* (a, b)*, pak má* f *zobecněný Riemannův integrál i na* (a, c) *a* (c, b) *a platí*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

(ii) *Nechť funkce* f *má zobecněný Riemannův integrál na* (a, c) *a* (c, b)*,* f *je omezená na nějakém okolí bodu* c *a součet* $\int_a^c f + \int_c^b f$ *má smysl. Pak* f *má zobecněný Riemannův integrál na* (a, b) *a platí*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Věta 9.8 (linearita zobecněného Riemannova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, *f a g jsou funkce mající zobecněný Riemannův integrál na intervalu* (a, b) *a nechť* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Potom*

(i) *funkce* αf *má zobecněný Riemannův integrál na* (a, b) *a platí*

$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f,$$

má-li pravá strana smysl,

(ii) *je-li součet* $\int_a^b f + \int_a^b g$ *definovaný, pak má funkce* $f + g$ *zobecněný Riemannův integrál na* (a, b) *a platí*

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Věta 9.9

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^{\star}$, $a < b$, *a nechť* f *a* g *jsou funkce mající zobecněný Riemannův integrál na intervalu* (a, b). *Potom platí:*

(i) *Je-li* $f(x) \leq g(x)$ *pro každé* $x \in (a, b)$, *pak* $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

(ii) *Funkce* $|f|$ *má zobecněný Riemannův integrál na intervalu* (a, b) *a platí* $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

Definice

Pokud zobecněný Riemannův integrál funkce f na intervalu (a, b) existuje a přitom je konečný, pak říkáme, že $\int_a^b f$ **konverguje**. Pokud je roven $+\infty$ nebo $-\infty$, pak říkáme, že **diverguje**. Máme tedy následující možnosti:

$$\int_a^b f \begin{cases} \text{existuje a je roven} \begin{cases} \text{reálnému číslu, tj. konverguje,} \\ +\infty \text{ nebo } -\infty, \text{ tj. diverguje,} \end{cases} \\ \text{neexistuje.} \end{cases}$$

Věta 9.10 (srovnávací kritérium)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, funkce f a g splňují $0 \leq f(x) \leq g(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$ a f je na (a, b) spojitá. Pokud konverguje $\int_a^b g$, pak konverguje i $\int_a^b f$.

Věta 9.11 (limitní srovnávací kritérium)

Nechť f a g jsou spojité nezáporné funkce na intervalu $\langle a, b)$, $b \in \mathbf{R}^\star$, a existuje limita $\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \gamma \in \mathbf{R}^\star$.

- *Je-li $\gamma \in (0, +\infty)$, pak $\int_a^b f$ konverguje, právě když konverguje $\int_a^b g$.*
- *Je-li $\gamma = 0$, pak z konvergence $\int_a^b g$ plyne konvergence $\int_a^b f$.*
- *Je-li $\gamma = +\infty$, pak z divergence $\int_a^b g$ plyne divergence $\int_a^b f$.*

Věta 9.12

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^\star$, $a < b$, f *je spojitá na* (a, b), *a* F *je primitivní funkce k* f *na* (a, b). *Pak zobecněný Riemannův integrál funkce* f *na* (a, b) *existuje, právě když existují limity* $\lim_{x\to a+} F(x)$ *a* $\lim_{x\to b-} F(x)$ *a jejich rozdíl má smysl. V tom případě platí*

$$\int_a^b f = [F]_a^b = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x).$$

9.3 Lebesgueův integrál

Definice

Nechť $\mathcal{A}$ je nějaký systém podmnožin $\mathbf{R}^n$. Řekneme, že $\mathcal{A}$ je σ**-algebra**, jestliže platí:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(ii) je-li $A \in \mathcal{A}$, pak také $\mathbf{R}^n \setminus A \in \mathcal{A}$,

(iii) jsou-li $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, pak také $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

9.3 Lebesgueův integrál

Definice

Nechť $\mathcal{A}$ je nějaký systém podmnožin $\mathbf{R}^n$. Řekneme, že $\mathcal{A}$ je σ**-algebra**, jestliže platí:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(ii) je-li $A \in \mathcal{A}$, pak také $\mathbf{R}^n \setminus A \in \mathcal{A}$,

(iii) jsou-li $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, pak také $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

Definice

Nechť $\mathcal{A}$ je σ-algebra podmnožin $\mathbf{R}^n$. Zobrazení $\mu\colon \mathcal{A} \to \langle 0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ se nazývá **míra**, jestliže $\mu(\emptyset) = 0$, a jestliže je σ**-aditivní**, tj. pokud $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ jsou po dvou disjunktní, pak $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$.

9.3 Lebesgueův integrál

Definice

Nechť $\mathcal{A}$ je nějaký systém podmnožin $\mathbf{R}^n$. Řekneme, že $\mathcal{A}$ je σ**-algebra**, jestliže platí:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(ii) je-li $A \in \mathcal{A}$, pak také $\mathbf{R}^n \setminus A \in \mathcal{A}$,

(iii) jsou-li $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, pak také $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$.

Definice

Nechť $\mathcal{A}$ je σ-algebra podmnožin $\mathbf{R}^n$. Zobrazení $\mu \colon \mathcal{A} \to \langle 0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ se nazývá **míra**, jestliže $\mu(\emptyset) = 0$, a jestliže je σ**-aditivní**, tj. pokud $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ jsou po dvou disjunktní, pak $\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$. Množinám z $\mathcal{A}$ se říká μ**-měřitelné** množiny.

Věta 9.13

Existuje právě jedna σ-algebra Λ na $\mathbf{R}^n$ a právě jedna míra λ na Λ mající následující vlastnosti:

(i) *Λ obsahuje všechny otevřené podmnožiny $\mathbf{R}^n$,*

(ii) *jestliže $A, B \in \Lambda$, $A \subset E \subset B$, a $\lambda(B \setminus A) = 0$, pak $E \in \Lambda$,*

(iii) *$\lambda(K) < +\infty$ pro každou kompaktní $K \subset \mathbf{R}^n$,*

(iv) *je-li $I = \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n\rangle \subset \mathbf{R}^n$, pak $\lambda(I) = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j)$,*

(v) *λ je translačně invariantní, tj. $\lambda(x + A) = \lambda(A)$ pro každou $A \in \Lambda$ a $x \in \mathbf{R}^n$.*

Věta 9.13

Existuje právě jedna σ-algebra Λ na $\mathbf{R}^n$ a právě jedna míra λ na Λ mající následující vlastnosti:

(i) *Λ obsahuje všechny otevřené podmnožiny $\mathbf{R}^n$,*

(ii) *jestliže $A, B \in \Lambda$, $A \subset E \subset B$, a $\lambda(B \setminus A) = 0$, pak $E \in \Lambda$,*

(iii) *$\lambda(K) < +\infty$ pro každou kompaktní $K \subset \mathbf{R}^n$,*

(iv) *je-li $I = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \cdots \times \langle a_n, b_n \rangle \subset \mathbf{R}^n$, pak $\lambda(I) = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j)$,*

(v) *λ je translačně invariantní, tj. $\lambda(x + A) = \lambda(A)$ pro každou $A \in \Lambda$ a $x \in \mathbf{R}^n$.*

Definice

Míra λ z předchozí věty se nazývá **Lebesgueova míra** a množinám v Λ se říká **lebesgueovsky měřitelné množiny**.

Definice

Pro $A \subset \mathbf{R}^n$ definujeme **charakteristickou funkci** množiny A takto:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \in \mathbf{R}^n \setminus A. \end{cases}$$

Definice

Pro $A \subset \mathbf{R}^n$ definujeme **charakteristickou funkci** množiny A takto:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \in \mathbf{R}^n \setminus A. \end{cases}$$

Nechť $A_1, \dots, A_k \subset \mathbf{R}^n$ a $c_1, \dots, c_k \in \mathbf{R}$. Funkci tvaru $\sum_{j=1}^k c_j \chi_{A_j}$ nazýváme **jednoduchou funkcí.**

Definice

Pro $A \subset \mathbf{R}^n$ definujeme **charakteristickou funkci** množiny A takto:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \in \mathbf{R}^n \setminus A. \end{cases}$$

Nechť $A_1, \dots, A_k \subset \mathbf{R}^n$ a $c_1, \dots, c_k \in \mathbf{R}$. Funkci tvaru $\sum_{j=1}^k c_j \chi_{A_j}$ nazýváme **jednoduchou funkcí**. Jsou-li navíc $A_1, \dots, A_k \in \Lambda$, pak funkci $\sum_{j=1}^k c_j \chi_{A_j}$ nazýváme **jednoduchou měřitelnou funkcí**.

Definice

Zobrazení $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^*$ nazýváme **numerickou funkcí**.

Definice

Zobrazení $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^*$ nazýváme **numerickou funkcí**. Řekneme, že numerická funkce f je **měřitelná**, jestliže existuje posloupnost jednoduchých měřitelných funkcí $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ taková, že pro všechna $x \in \mathbf{R}^n$ platí $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$.

Definice

Zobrazení $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^*$ nazýváme **numerickou funkcí**. Řekneme, že numerická funkce f je **měřitelná**, jestliže existuje posloupnost jednoduchých měřitelných funkcí $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ taková, že pro všechna $x \in \mathbf{R}^n$ platí $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$.

Definice

Je-li $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ posloupnost numerických funkcí, řekneme že numerická funkce f je **bodovou limitou** posloupnosti $\{f_j\}$, jestliže pro každé $x \in \mathbf{R}^n$ platí $\lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$. Značíme $\lim_{j\to\infty} f_j = f$ nebo $f_j \to f$.

Věta 9.14 (vlastnosti měřitelných funkcí)

Měřitelné funkce mají následující vlastnosti:

(i) *Jsou-li f, g měřitelné a $\alpha \in \mathbf{R}$, pak i αf, $f + g$, fg, $\frac{f}{g}$ jsou měřitelné, pokud jsou definované na celém $\mathbf{R}^n$.*

Věta 9.14 (vlastnosti měřitelných funkcí)

Měřitelné funkce mají následující vlastnosti:

(i) *Jsou-li f, g měřitelné a $\alpha \in \mathbf{R}$, pak i αf, $f + g$, fg, $\frac{f}{g}$ jsou měřitelné, pokud jsou definované na celém $\mathbf{R}^n$.*

(ii) *Jsou-li f, g měřitelné, pak i $\max\{f, g\}$ a $\min\{f, g\}$ jsou měřitelné.*

Věta 9.14 (vlastnosti měřitelných funkcí)

Měřitelné funkce mají následující vlastnosti:

(i) *Jsou-li* f, g *měřitelné a* $\alpha \in \mathbf{R}$, *pak i* αf, $f + g$, fg, $\frac{f}{g}$ *jsou měřitelné, pokud jsou definované na celém* $\mathbf{R}^n$.

(ii) *Jsou-li* f, g *měřitelné, pak i* $\max\{f, g\}$ *a* $\min\{f, g\}$ *jsou měřitelné.*

(iii) *Je-li* f *reálná měřitelná a* g *reálná spojitá, pak* $g \circ f$ *je měřitelná.*

Věta 9.14 (vlastnosti měřitelných funkcí)

Měřitelné funkce mají následující vlastnosti:

(i) *Jsou-li* f, g *měřitelné a* $\alpha \in \mathbf{R}$, *pak i* αf, $f + g$, fg, $\frac{f}{g}$ *jsou měřitelné, pokud jsou definované na celém* $\mathbf{R}^n$.

(ii) *Jsou-li* f, g *měřitelné, pak i* $\max\{f, g\}$ *a* $\min\{f, g\}$ *jsou měřitelné.*

(iii) *Je-li* f *reálná měřitelná a* g *reálná spojitá, pak* $g \circ f$ *je měřitelná.*

(iv) *Je-li* $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ *posloupnost měřitelných funkcí s bodovou limitou* f, *pak* f *je také měřitelná.*

Věta 9.14 (vlastnosti měřitelných funkcí)

Měřitelné funkce mají následující vlastnosti:

(i) *Jsou-li f, g měřitelné a $\alpha \in \mathbf{R}$, pak i αf, $f + g$, fg, $\frac{f}{g}$ jsou měřitelné, pokud jsou definované na celém $\mathbf{R}^n$.*

(ii) *Jsou-li f, g měřitelné, pak i $\max\{f, g\}$ a $\min\{f, g\}$ jsou měřitelné.*

(iii) *Je-li f reálná měřitelná a g reálná spojitá, pak $g \circ f$ je měřitelná.*

(iv) *Je-li $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ posloupnost měřitelných funkcí s bodovou limitou f, pak f je také měřitelná.*

(v) *Spojité funkce jsou měřitelné.*

Definice

Pro jednoduchou měřitelnou funkci $\sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{A_j}$, kde $c_1, \dots, c_k$ jsou nezáporná reálná čísla, definujeme její **Lebesgueův integrál** jako

$$\int \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{A_j} d\lambda = \sum_{j=1}^{k} c_j \lambda(A_j),$$

přičemž používáme konvenci $0 \cdot (+\infty) = 0$.

Definice

Pro nezápornou měřitelnou funkci definujeme

$$\int f d\lambda =$$

$$= \sup \left\{ \int g d\lambda;\ g \leq f,\ g \text{ je jednoduchá nezáporná měřitelná} \right\}$$

Definice

Pro nezápornou měřitelnou funkci definujeme

$$\int f d\lambda =$$

$$= \sup \left\{ \int g d\lambda;\ g \leq f,\ g \text{ je jednoduchá nezáporná měřitelná} \right\}$$

Konečně pro měřitelnou funkci f definujeme

$$\int f d\lambda = \int f^{+} d\lambda - \int f^{-} d\lambda,$$

pokud je rozdíl definován.

Definice

Pro nezápornou měřitelnou funkci definujeme

$$\int f d\lambda =$$

$$= \sup \left\{ \int g d\lambda;\ g \leq f,\ g \text{ je jednoduchá nezáporná měřitelná} \right\}$$

Konečně pro měřitelnou funkci f definujeme

$$\int f d\lambda = \int f^{+} d\lambda - \int f^{-} d\lambda,$$

pokud je rozdíl definován.
Říkáme, že funkce f je **lebesgueovsky integrovatelná**, pokud má konečný Lebesgueův integrál.

Definice

Je-li $M \subset \mathbf{R}^n$ měřitelná množina a f měřitelná funkce, pak definujeme

$$\int_M f d\lambda = \int \chi_M f d\lambda.$$

Věta 9.15 (vlastnosti Lebesgueova integrálu)

Nechť M je měřitelná množina a f, g jsou měřitelné funkce.

(i) *Nechť* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Pak* $\int_M \alpha f d\lambda = \alpha \int_M f d\lambda$ *a* $\int_M (f+g) d\lambda = \int_M f d\lambda + \int_M g d\lambda$, *pokud jsou výrazy napravo definovány.*

Věta 9.15 (vlastnosti Lebesgueova integrálu)

Nechť M je měřitelná množina a f, g jsou měřitelné funkce.

(i) *Nechť $\alpha \in \mathbf{R}$. Pak $\int_M \alpha f d\lambda = \alpha \int_M f d\lambda$ a $\int_M (f+g) d\lambda = \int_M f d\lambda + \int_M g d\lambda$, pokud jsou výrazy napravo definovány.*

(ii) *Platí-li $f \leq g$ skoro všude na M, pak $\int_M f d\lambda \leq \int_M g d\lambda$, pokud oba integrály existují.*

Věta 9.15 (vlastnosti Lebesgueova integrálu)

Nechť M je měřitelná množina a f, g jsou měřitelné funkce.

(i) *Nechť* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Pak* $\int_M \alpha f d\lambda = \alpha \int_M f d\lambda$ *a* $\int_M (f+g) d\lambda = \int_M f d\lambda + \int_M g d\lambda$, *pokud jsou výrazy napravo definovány.*

(ii) *Platí-li* $f \leq g$ *skoro všude na* M, *pak* $\int_M f d\lambda \leq \int_M g d\lambda$, *pokud oba integrály existují.*

(iii) *Jestliže* $\int_M f d\lambda$ *existuje, pak existuje i* $\int_M |f| d\lambda$ *a platí* $|\int_M f d\lambda| \leq \int_M |f| d\lambda$.

Věta 9.15 (vlastnosti Lebesgueova integrálu)

Nechť M je měřitelná množina a f, g jsou měřitelné funkce.

(i) *Nechť $\alpha \in \mathbf{R}$. Pak $\int_M \alpha f d\lambda = \alpha \int_M f d\lambda$ a $\int_M (f+g) d\lambda = \int_M f d\lambda + \int_M g d\lambda$, pokud jsou výrazy napravo definovány.*

(ii) *Platí-li $f \leq g$ skoro všude na M, pak $\int_M f d\lambda \leq \int_M g d\lambda$, pokud oba integrály existují.*

(iii) *Jestliže $\int_M f d\lambda$ existuje, pak existuje i $\int_M |f| d\lambda$ a platí $|\int_M f d\lambda| \leq \int_M |f| d\lambda$.*

(iv) *Je-li $f = 0$ skoro všude na M, pak $\int_M f d\lambda = 0$.*

Věta 9.15 (vlastnosti Lebesgueova integrálu)

Nechť M je měřitelná množina a f, g jsou měřitelné funkce.

(i) *Nechť $\alpha \in \mathbf{R}$. Pak $\int_M \alpha f d\lambda = \alpha \int_M f d\lambda$ a $\int_M (f+g) d\lambda = \int_M f d\lambda + \int_M g d\lambda$, pokud jsou výrazy napravo definovány.*

(ii) *Platí-li $f \leq g$ skoro všude na M, pak $\int_M f d\lambda \leq \int_M g d\lambda$, pokud oba integrály existují.*

(iii) *Jestliže $\int_M f d\lambda$ existuje, pak existuje i $\int_M |f| d\lambda$ a platí $|\int_M f d\lambda| \leq \int_M |f| d\lambda$.*

(iv) *Je-li $f = 0$ skoro všude na M, pak $\int_M f d\lambda = 0$.*

(v) *Je-li $f = g$ skoro všude na M, pak $\int_M f d\lambda = \int_M g d\lambda$, pokud alespoň jeden z integrálů existuje.*

Věta 9.15 (vlastnosti Lebesgueova integrálu)

Nechť M je měřitelná množina a f, g jsou měřitelné funkce.

(i) *Nechť $\alpha \in \mathbf{R}$. Pak $\int_M \alpha f d\lambda = \alpha \int_M f d\lambda$ a $\int_M (f+g) d\lambda = \int_M f d\lambda + \int_M g d\lambda$, pokud jsou výrazy napravo definovány.*

(ii) *Platí-li $f \leq g$ skoro všude na M, pak $\int_M f d\lambda \leq \int_M g d\lambda$, pokud oba integrály existují.*

(iii) *Jestliže $\int_M f d\lambda$ existuje, pak existuje i $\int_M |f| d\lambda$ a platí $|\int_M f d\lambda| \leq \int_M |f| d\lambda$.*

(iv) *Je-li $f = 0$ skoro všude na M, pak $\int_M f d\lambda = 0$.*

(v) *Je-li $f = g$ skoro všude na M, pak $\int_M f d\lambda = \int_M g d\lambda$, pokud alespoň jeden z integrálů existuje.*

Věta 9.16 (souvislost s Riemannovým integrálem)

(i) *Jestliže existuje Riemannův integrál* $\int_a^b f$*, pak existuje i Lebesgueův integrál* $\int_{(a,b)} f d\lambda$ *a oba integrály se rovnají.*

Věta 9.16 (souvislost s Riemannovým integrálem)

(i) *Jestliže existuje Riemannův integrál* $\int_a^b f$, *pak existuje i Lebesgueův integrál* $\int_{(a,b)} f d\lambda$ *a oba integrály se rovnají.*

(ii) *Je-li* f *omezená na* $\langle a, b \rangle$, *pak její Riemannův integrál existuje, právě když je skoro všude spojitá.*

Věta 9.16 (souvislost s Riemannovým integrálem)

(i) *Jestliže existuje Riemannův integrál* $\int_a^b f$, *pak existuje i Lebesgueův integrál* $\int_{(a,b)} f d\lambda$ *a oba integrály se rovnají.*

(ii) *Je-li* f *omezená na* $\langle a, b\rangle$, *pak její Riemannův integrál existuje, právě když je skoro všude spojitá.*

(iii) *Je-li* f *spojitá nezáporná funkce na* (a, b), *pak* $\int_{(a,b)} f d\lambda = \int_a^b f$, *kde vpravo je zobecněný Riemannův integrál.*

Věta 9.17 (Fubini)

Nechť $m, n \in \mathbf{N}$ a $f\colon \mathbf{R}^{m+n} \to \mathbf{R}$ je integrovatelná funkce. Pro každé $x \in \mathbf{R}^m$ definujme funkci $f_x\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ předpisem $f_x(y) = f(x, y)$. Pak pro skoro všechna $x \in \mathbf{R}^m$ je funkce f_x integrovatelná a platí

$$\int_{\mathbf{R}^{m+n}} f d\lambda = \int_{\mathbf{R}^m} \left(\int_{\mathbf{R}^n} f_x(y) d\lambda(y) \right) d\lambda(x).$$

Věta 9.18 (o substituci)

Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, funkce $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C^1(G)$ a zobrazení $\varphi\colon G \to \mathbf{R}^n$ definované předpisem $\varphi(x) = [\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)]$ nechť je prosté. Dále předpokládejme, že determinant (tzv. ***jakobián****)*

$$J_\varphi(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(x) \end{vmatrix}$$

je nenulový pro každé $x \in G$. Pak $\varphi(G)$ je otevřená a pro každou měřitelnou $M \subset \varphi(G)$ a každou měřitelnou $f\colon \varphi(G) \to \mathbf{R}^*$ platí

$$\int_M f d\lambda = \int_{\varphi^{-1}(M)} f\big(\varphi(x)\big)|J_\varphi(x)|d\lambda(x),$$

pokud je alespoň jeden z těchto integrálů definován.

10. Lineární algebra

10.1 Vektorové prostory

Symbol **K** značí množinu **R** nebo **C**.

10.1 Vektorové prostory

Symbol **K** značí množinu **R** nebo **C**.

Definice

Vektorovým prostorem nad **K** rozumíme trojici $(V, +, \cdot)$, kde V je neprázdná množina, $+$ je operace z $V \times V$ do V a $\cdot$ je operace z **K** $\times$ V do V, přičemž tyto operace mají následující vlastnosti:

10.1 Vektorové prostory

Symbol **K** značí množinu **R** nebo **C**.

Definice

Vektorovým prostorem nad **K** rozumíme trojici $(V, +, \cdot)$, kde V je neprázdná množina, $+$ je operace z $V \times V$ do V a $\cdot$ je operace z $\mathbf{K} \times V$ do V, přičemž tyto operace mají následující vlastnosti:

- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V\colon \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (komutativita sčítání),

10.1 Vektorové prostory

Symbol **K** značí množinu **R** nebo **C**.

Definice

Vektorovým prostorem nad **K** rozumíme trojici $(V, +, \cdot)$, kde V je neprázdná množina, $+$ je operace z $V \times V$ do V a $\cdot$ je operace z $\mathbf{K} \times V$ do V, přičemž tyto operace mají následující vlastnosti:

- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V\colon \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (komutativita sčítání),
- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V\colon (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ (asociativita sčítání),

10.1 Vektorové prostory

Symbol **K** značí množinu **R** nebo **C**.

Definice

Vektorovým prostorem nad **K** rozumíme trojici $(V, +, \cdot)$, kde V je neprázdná množina, $+$ je operace z $V \times V$ do V a $\cdot$ je operace z $\mathbf{K} \times V$ do V, přičemž tyto operace mají následující vlastnosti:

- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V\colon \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (komutativita sčítání),
- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V\colon (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ (asociativita sčítání),
- množina V obsahuje prvek, který značíme $\boldsymbol{o}$ (a říkáme mu **nulový prvek**), splňující

$$\forall \boldsymbol{v} \in V\colon \boldsymbol{o} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v},$$

10.1 Vektorové prostory

Symbol **K** značí množinu **R** nebo **C**.

Definice

Vektorovým prostorem nad **K** rozumíme trojici $(V, +, \cdot)$, kde V je neprázdná množina, $+$ je operace z $V \times V$ do V a $\cdot$ je operace z $\mathbf{K} \times V$ do V, přičemž tyto operace mají následující vlastnosti:

- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V\colon \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (komutativita sčítání),
- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V\colon (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$ (asociativita sčítání),
- množina V obsahuje prvek, který značíme $\boldsymbol{o}$ (a říkáme mu **nulový prvek**), splňující

$$\forall \boldsymbol{v} \in V\colon \boldsymbol{o} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v},$$

- $\forall \boldsymbol{v} \in V \, \exists \boldsymbol{w} \in V \colon \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$,

- $\forall \boldsymbol{v} \in V \, \exists \boldsymbol{w} \in V \colon \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$,
- $\forall a, b \in \mathbf{K} \, \forall \boldsymbol{v} \in V \colon a \cdot (b \cdot \boldsymbol{v}) = (ab) \cdot \boldsymbol{v}$,

- $\forall \boldsymbol{v} \in V \, \exists \boldsymbol{w} \in V \colon \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$,
- $\forall a, b \in \mathbf{K} \, \forall \boldsymbol{v} \in V \colon a \cdot (b \cdot \boldsymbol{v}) = (ab) \cdot \boldsymbol{v}$,
- $\forall a, b \in \mathbf{K} \, \forall \boldsymbol{v} \in V \colon (a + b) \cdot \boldsymbol{v} = a \cdot \boldsymbol{v} + b \cdot \boldsymbol{v}$,

- $\forall \boldsymbol{v} \in V\, \exists \boldsymbol{w} \in V \colon \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$,
- $\forall a, b \in \mathbf{K}\, \forall \boldsymbol{v} \in V \colon a \cdot (b \cdot \boldsymbol{v}) = (ab) \cdot \boldsymbol{v}$,
- $\forall a, b \in \mathbf{K}\, \forall \boldsymbol{v} \in V \colon (a + b) \cdot \boldsymbol{v} = a \cdot \boldsymbol{v} + b \cdot \boldsymbol{v}$,
- $\forall a \in \mathbf{K}\, \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V \colon a \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a \cdot \boldsymbol{u} + a \cdot \boldsymbol{v}$,

- $\forall \boldsymbol{v} \in V\, \exists \boldsymbol{w} \in V\colon \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$,
- $\forall a, b \in \mathbf{K}\, \forall \boldsymbol{v} \in V\colon a \cdot (b \cdot \boldsymbol{v}) = (ab) \cdot \boldsymbol{v}$,
- $\forall a, b \in \mathbf{K}\, \forall \boldsymbol{v} \in V\colon (a + b) \cdot \boldsymbol{v} = a \cdot \boldsymbol{v} + b \cdot \boldsymbol{v}$,
- $\forall a \in \mathbf{K}\, \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V\colon a \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a \cdot \boldsymbol{u} + a \cdot \boldsymbol{v}$,
- $\forall \boldsymbol{v} \in V\colon 1 \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$.

Definice

Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor a $U \subset V$, $U \neq \emptyset$. Řekneme, že U je **vektorový podprostor prostoru** V, jestliže

- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U\colon \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$,

Definice

Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor a $U \subset V$, $U \neq \emptyset$. Řekneme, že U je **vektorový podprostor prostoru** V, jestliže

- $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U \colon \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$,
- $\forall a \in \mathbf{K}\, \forall \boldsymbol{u} \in U \colon a\boldsymbol{u} \in U$.

Definice

Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor, $m \in \mathbf{N}$, $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m \in V$ a $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbf{K}$. Výraz

$$\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{u}_m$$

nazýváme **lineární kombinací** vektorů $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$.

Definice

Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor, $m \in \mathbf{N}$, $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m \in V$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{K}$. Výraz

$$\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{u}_m$$

nazýváme **lineární kombinací** vektorů $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m$. Pokud alespoň jedno z čísel $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ je nenulové, pak hovoříme o **netriviální lineární kombinaci**, v opačném případě jde o **triviální lineární kombinaci**.

Definice

Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor, $m \in \mathbf{N}$, $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m \in V$ a $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{K}$. Výraz

$$\lambda_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \lambda_m \boldsymbol{u}_m$$

nazýváme **lineární kombinací** vektorů $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m$. Pokud alespoň jedno z čísel $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ je nenulové, pak hovoříme o **netriviální lineární kombinaci**, v opačném případě jde o **triviální lineární kombinaci**. Lineární kombinací prázdné množiny vektorů rozumíme nulový vektor.

Definice

Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor, $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m \in V$. Řekneme, že vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_m$ jsou **lineárně závislé**, pokud existuje jejich netriviální lineární kombinace, jež je rovna nulovému vektoru.

Definice

Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor, $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m \in V$. Řekneme, že vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ jsou **lineárně závislé**, pokud existuje jejich netriviální lineární kombinace, jež je rovna nulovému vektoru. Pokud vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ nejsou lineárně závislé, pak říkáme, že jsou **lineárně nezávislé**.

Definice

Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor, $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m \in V$. Řekneme, že vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ jsou **lineárně závislé**, pokud existuje jejich netriviální lineární kombinace, jež je rovna nulovému vektoru. Pokud vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ nejsou lineárně závislé, pak říkáme, že jsou **lineárně nezávislé**. Řekneme, že množina $M \subset V$ je **lineárně nezávislá**, jestliže libovolná m-tice po dvou různých vektorů z M je lineárně nezávislá.

Definice

Nechť $(V, +, \cdot)$ je vektorový prostor a $B \subset V$. Řekneme, že B je **báze prostoru** V, jestliže množina B je lineárně nezávislá a každý vektor z V je lineární kombinací (konečně mnoha) vektorů z B.

Věta 10.1

(i) *Každou lineárně nezávislou podmnožinu vektorového prostoru lze doplnit na bázi tohoto prostoru.*

Věta 10.1

(i) *Každou lineárně nezávislou podmnožinu vektorového prostoru lze doplnit na bázi tohoto prostoru.*

(ii) *Každý vektorový prostor má bázi. Počet prvků báze je určen jednoznačně.*

Definice

Počet prvků báze budeme nazývat **dimenze prostoru** V.

Definice

Počet prvků báze budeme nazývat **dimenze prostoru** V. Dimenzi V značíme $\dim V$.

Definice

Počet prvků báze budeme nazývat **dimenze prostoru** V. Dimenzi V značíme $\dim V$. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbf{K}$.

Definice

Počet prvků báze budeme nazývat **dimenze prostoru** V. Dimenzi V značíme $\dim V$. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbf{K}$. Je-li $\dim V < +\infty$, řekneme, že V je **konečnědimenzionální**. Je-li $\dim V = +\infty$, mluvíme o **nekonečnědimenzionálním** vektorovém prostoru.

Definice

Počet prvků báze budeme nazývat **dimenze prostoru** V. Dimenzi V značíme $\dim V$. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbf{K}$. Je-li $\dim V < +\infty$, řekneme, že V je **konečnědimenzionální**. Je-li $\dim V = +\infty$, mluvíme o **nekonečnědimenzionálním** vektorovém prostoru.

Věta 10.2

Nechť V je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbf{N}$ nad $\mathbf{K}$.

(i) *Jsou-li $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ lineárně nezávislé vektory v prostoru V, pak množina $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ je bází prostoru V.*

Definice

Počet prvků báze budeme nazývat **dimenze prostoru** V. Dimenzi V značíme $\dim V$. Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbf{K}$. Je-li $\dim V < +\infty$, řekneme, že V je **konečnědimenzionální**. Je-li $\dim V = +\infty$, mluvíme o **nekonečnědimenzionálním** vektorovém prostoru.

Věta 10.2

Nechť V je vektorový prostor dimenze $n \in \mathbf{N}$ nad $\mathbf{K}$.

(i) *Jsou-li $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ lineárně nezávislé vektory v prostoru V, pak množina $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ je bází prostoru V.*

(ii) *Jestliže pro vektory $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \in V$ platí $\mathrm{lin}_{\mathbf{K}}\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\} = V$, je množina $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ bází prostoru V.*

10.2 Lineární zobrazení a řešení soustav lineárních rovnic

10.2 Lineární zobrazení a řešení soustav lineárních rovnic

Definice

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbf{K}$. Zobrazení $L\colon U \to V$ se nazývá **lineární**, jestliže platí:

- $\forall \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U\colon L(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = L(\boldsymbol{u}_1) + L(\boldsymbol{u}_2)$,

10.2 Lineární zobrazení a řešení soustav lineárních rovnic

Definice

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad **K**. Zobrazení $L\colon U \to V$ se nazývá **lineární**, jestliže platí:

- $\forall \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in U\colon L(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) = L(\boldsymbol{u}_1) + L(\boldsymbol{u}_2)$,
- $\forall a \in \mathbf{K}\, \forall \boldsymbol{u} \in U\colon L(a\boldsymbol{u}) = aL(\boldsymbol{u})$.

Definice

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbf{K}$, $L\colon U \to V$ nechť je lineární zobrazení. **Jádrem** lineárního zobrazení L nazveme množinu

$$\mathrm{Ker}(L) = \{\boldsymbol{u} \in U;\ L(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}\}.$$

Definice

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbf{K}$, $L\colon U \to V$ nechť je lineární zobrazení. **Jádrem** lineárního zobrazení L nazveme množinu

$$\mathrm{Ker}(L) = \{\boldsymbol{u} \in U;\ L(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}\}.$$

Symbolem $\mathrm{Im}(L)$ značíme obor hodnot zobrazení L, tedy

$$\mathrm{Im}\, L = \{\boldsymbol{v} \in V;\ \exists \boldsymbol{u} \in U :\ L(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{v}\}.$$

Věta 10.3

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbf{K}$, $L\colon U \to V$ *nechť je lineární zobrazení. Potom platí:*

(i) *Množina* $\operatorname{Ker}(L)$ *je vektorovým podprostorem* U.

Věta 10.3

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbf{K}$, $L\colon U \to V$ *nechť je lineární zobrazení. Potom platí:*

(i) *Množina* $\mathrm{Ker}(L)$ *je vektorovým podprostorem* U.

(ii) *Množina* $\mathrm{Im}(L)$ *je vektorovým podprostorem* V.

Věta 10.3

Nechť U a V jsou vektorové prostory nad $\mathbf{K}$, $L\colon U \to V$ *nechť je lineární zobrazení. Potom platí:*

(i) *Množina* $\mathrm{Ker}(L)$ *je vektorovým podprostorem* U.

(ii) *Množina* $\mathrm{Im}(L)$ *je vektorovým podprostorem* V.

(iii) *Pro dimenze platí:* $\dim U = \dim \mathrm{Ker}(L) + \dim \mathrm{Im}(L)$.

10.3 Kvadratické formy

Definice

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Platí-li $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$, pak říkáme, že matice $\mathbb{A}$ je **symetrická**.

10.3 Kvadratické formy

Definice

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Platí-li $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$, pak říkáme, že matice $\mathbb{A}$ je **symetrická**.

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je symetrická matice. Pak funkci $\varphi\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definované předpisem $\varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}^T \mathbb{A} \boldsymbol{u}$ říkáme **kvadratická forma**.

10.3 Kvadratické formy

Definice

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Platí-li $\mathbb{A} = \mathbb{A}^T$, pak říkáme, že matice $\mathbb{A}$ je **symetrická**.
Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je symetrická matice. Pak funkci $\varphi\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definované předpisem $\varphi(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{u}^T \mathbb{A} \boldsymbol{u}$ říkáme **kvadratická forma**.Říkáme, že tato forma je **reprezentována maticí** $\mathbb{A}$ nebo že matice $\mathbb{A}$ je **reprezentující maticí** formy φ.

Definice

Nechť $\varphi\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ je kvadratická forma. Řekneme, že φ je

- **pozitivně definitní** (PD), jestliže

$$\forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}\colon \varphi(\boldsymbol{u}) > 0,$$

Definice

Nechť $\varphi\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ je kvadratická forma. Řekneme, že φ je

- **pozitivně definitní** (PD), jestliže

$$\forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}\colon \varphi(\boldsymbol{u}) > 0,$$

- **negativně definitní** (ND), jestliže

$$\forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}\colon \varphi(\boldsymbol{u}) < 0,$$

Definice

Nechť $\varphi\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ je kvadratická forma. Řekneme, že φ je

- **pozitivně definitní** (PD), jestliže

$$\forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}\colon \varphi(\boldsymbol{u}) > 0,$$

- **negativně definitní** (ND), jestliže

$$\forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n, \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}\colon \varphi(\boldsymbol{u}) < 0,$$

- **pozitivně semidefinitní** (PSD), jestliže

$$\forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n\colon \varphi(\boldsymbol{u}) \geq 0,$$

- **negativně semidefinitní** (NSD), jestliže

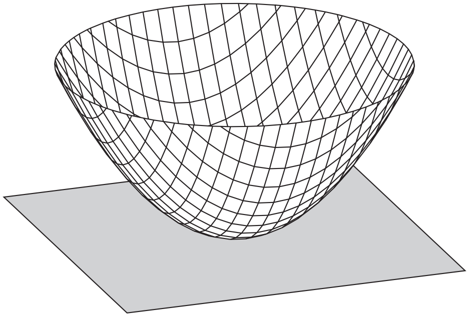
$$\forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n \colon \varphi(\boldsymbol{u}) \leq 0,$$

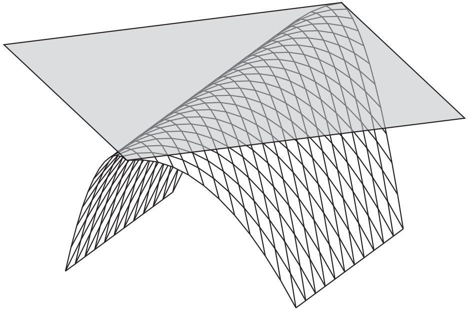
- **negativně semidefinitní** (NSD), jestliže

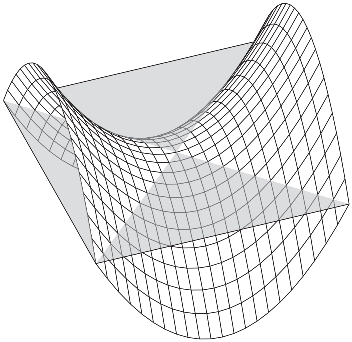
$$\forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n \colon \varphi(\boldsymbol{u}) \leq 0,$$

- **indefinitní** (ID), neplatí-li nic z předchozího, tj.

$$\exists \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n \colon \varphi(\boldsymbol{u}) > 0 \wedge \varphi(\boldsymbol{v}) < 0.$$







Definice

Řekneme, že matice $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$ je **diagonální**, je-li $a_{ij} = 0$ pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$.

Věta 10.4

Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$ *je diagonální. Pak platí:*

- $\mathbb{A}$ *je pozitivně definitní, právě když* $a_{ii} > 0$, $i = 1, \ldots, n$;

Věta 10.4

Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$ *je diagonální. Pak platí:*

- $\mathbb{A}$ *je pozitivně definitní, právě když* $a_{ii} > 0$, $i = 1, \ldots, n$;
- $\mathbb{A}$ *je negativně definitní, právě když* $a_{ii} < 0$, $i = 1, \ldots, n$;

Věta 10.4

Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$ *je diagonální. Pak platí:*

- $\mathbb{A}$ *je pozitivně definitní, právě když* $a_{ii} > 0$, $i = 1, \ldots, n$;
- $\mathbb{A}$ *je negativně definitní, právě když* $a_{ii} < 0$, $i = 1, \ldots, n$;
- $\mathbb{A}$ *je pozitivně semidefinitní, právě když* $a_{ii} \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$;

Věta 10.4

Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n\\ j=1..n}}$ *je diagonální. Pak platí:*

- $\mathbb{A}$ *je pozitivně definitní, právě když* $a_{ii} > 0$, $i = 1, \ldots, n$;
- $\mathbb{A}$ *je negativně definitní, právě když* $a_{ii} < 0$, $i = 1, \ldots, n$;
- $\mathbb{A}$ *je pozitivně semidefinitní, právě když* $a_{ii} \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$;
- $\mathbb{A}$ *je negativně semidefinitní, právě když* $a_{ii} \leq 0$, $i = 1, \ldots, n$;

Věta 10.4

Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$ *je diagonální. Pak platí:*

- $\mathbb{A}$ *je pozitivně definitní, právě když* $a_{ii} > 0$, $i = 1, \ldots, n$;
- $\mathbb{A}$ *je negativně definitní, právě když* $a_{ii} < 0$, $i = 1, \ldots, n$;
- $\mathbb{A}$ *je pozitivně semidefinitní, právě když* $a_{ii} \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$;
- $\mathbb{A}$ *je negativně semidefinitní, právě když* $a_{ii} \leq 0$, $i = 1, \ldots, n$;
- $\mathbb{A}$ *je indefinitní, právě když existují* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ *taková, že* $a_{ii} > 0$ *a* $a_{jj} < 0$.

Definice

Symetrickou elementární úpravou matice $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ budeme rozumět úpravu,kdy provedeme jistou elementární řádkovou úpravu matice $\mathbb{A}$ a vzniklou matici upravíme odpovídající sloupcovou úpravou.

Definice

Symetrickou elementární úpravou matice $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ budeme rozumět úpravu,kdy provedeme jistou elementární řádkovou úpravu matice $\mathbb{A}$ a vzniklou matici upravíme odpovídající sloupcovou úpravou.
Symetrickou transformací matice $\mathbb{A}$ budeme rozumět konečnou posloupnost symetrických elementárních úprav.

Lemma 10.5

Nechť T je transformace matic o m řádcích. Potom existuje regulární matice $\mathbb{B} \in M(m \times m)$ taková, že kdykoliv $\mathbb{A}' \in M(m \times n)$ vznikne z $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ pomocí T, tak platí $\mathbb{A}' = \mathbb{B}\mathbb{A}$.

Lemma 10.5

Nechť T je transformace matic o m řádcích. Potom existuje regulární matice $\mathbb{B} \in M(m \times m)$ taková, že kdykoliv $\mathbb{A}' \in M(m \times n)$ vznikne z $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ pomocí T, tak platí $\mathbb{A}' = \mathbb{B}\mathbb{A}$.
Obráceně, je-li $\mathbb{B} \in M(m \times m)$ regulární matice, pak existuje transformace T matic o m řádcích taková, že pro každou matici $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ platí $\mathbb{A} \overset{T}{\rightsquigarrow} \mathbb{B}\mathbb{A}$.

Věta 10.6

Uvažujme symetrickou transformaci T matic typu $n \times n$. Pak existuje regulární matice $\mathbb{B} \in M(n \times n)$ taková, že kdykoliv matice $\mathbb{A}' \in M(n \times n)$ vznikne z $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ pomocí T, tak platí $\mathbb{A}' = \mathbb{B}\mathbb{A}\mathbb{B}^T$.

Lemma 10.7

(i) *Je-li* $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ *symetrická a* $\mathbb{C} \in M(n \times n)$, *pak* $\mathbb{C}\mathbb{A}\mathbb{C}^T$ *je opět symetrická matice.*

(ii) *Symetrická transformace zachovává symetrii matice.*

Lemma 10.8

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ *je symetrická matice a* $\mathbb{Q} \in M(n \times n)$ *je regulární matice. Je-li* $\mathbb{A}$ *pozitivně definitní (resp. negativně definitní, pozitivně semidefinitní, negativně semidefinitní, indefinitní), pak je matice* $\mathbb{Q}\mathbb{A}\mathbb{Q}^T$ *pozitivně definitní (resp. negativně definitní, ...).*

Věta 10.9

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ *je symetrická matice a nechť* $\mathbb{B} \in M(n \times n)$ *vznikne z* $\mathbb{A}$ *pomocí symetrické transformace. Matice* $\mathbb{A}$ *je pozitivně definitní (resp. negativně definitní, pozitivně semidefinitní, negativně semidefinitní, indefinitní), právě když* $\mathbb{B}$ *je pozitivně definitní (resp. negativně definitní, . . .).*

Věta 10.10

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ *je symetrická matice. Pak ji lze symetrickou transformací převést na diagonální matici.*

Věta 10.11 (Sylvestrovo kritérium)

Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} \in M(n \times n)$ *je symetrická. Matice* $\mathbb{A}$ *je*

- *pozitivně definitní, právě když pro každé* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *platí*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0;$$

Věta 10.11 (Sylvestrovo kritérium)

Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}} \in M(n \times n)$ *je symetrická. Matice* $\mathbb{A}$ *je*

- *pozitivně definitní, právě když pro každé* $k \in \{1, \dots, n\}$ *platí*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0;$$

- *negativně definitní, právě když pro každé* $k \in \{1, \dots, n\}$ *platí*

$$(-1)^k \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0;$$

- pozitivně semidefinitní, právě když pro každou k-tici přirozených čísel $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, platí

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \ldots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \ldots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix} \geq 0;$$

- pozitivně semidefinitní, právě když pro každou k-tici přirozených čísel $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, platí

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \ldots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \ldots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix} \geq 0;$$

- negativně semidefinitní, právě když pro každou k-tici přirozených čísel $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, platí

$$(-1)^k \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \ldots & a_{i_1 i_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k i_1} & \ldots & a_{i_k i_k} \end{vmatrix} \geq 0.$$

10.4 Vlastní čísla a vektory

Definice

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Řekneme, že $\lambda \in \mathbf{C}$ je **vlastní číslo** matice $\mathbb{A}$, jestliže existuje nenulový vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$ takový, že $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Vektor $\boldsymbol{x}$ pak nazýváme **vlastním vektorem** matice $\mathbb{A}$ příslušným k vlastnímu číslu λ.

10.4 Vlastní čísla a vektory

Definice

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Řekneme, že $\lambda \in \mathbf{C}$ je **vlastní číslo** matice $\mathbb{A}$, jestliže existuje nenulový vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$ takový, že $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Vektor $\boldsymbol{x}$ pak nazýváme **vlastním vektorem** matice $\mathbb{A}$ příslušným k vlastnímu číslu λ.

Věta 10.12

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$*.*

(i) *Prvek* $\lambda \in \mathbf{C}$ *je vlastním číslem matice* $\mathbb{A}$*, právě když* $\det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}) = 0$*.*

10.4 Vlastní čísla a vektory

Definice

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Řekneme, že $\lambda \in \mathbf{C}$ je **vlastní číslo** matice $\mathbb{A}$, jestliže existuje nenulový vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$ takový, že $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Vektor $\boldsymbol{x}$ pak nazýváme **vlastním vektorem** matice $\mathbb{A}$ příslušným k vlastnímu číslu λ.

Věta 10.12

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$.

(i) *Prvek $\lambda \in \mathbf{C}$ je vlastním číslem matice $\mathbb{A}$, právě když* $\det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}) = 0$.

(ii) *Matice $\mathbb{A}$ má nejvýše n různých vlastních čísel.*

Definice

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Funkce $\lambda \mapsto \det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$ se nazývá **charakteristický polynom matice $\mathbb{A}$.** Vzhledem k tvrzení (i) předchozí věty definujeme **násobnost vlastního čísla matice** jako násobnost tohoto čísla jakožto kořene charakteristického polynomu.

Definice

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Funkce $\lambda \mapsto \det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$ se nazývá **charakteristický polynom matice $\mathbb{A}$.** Vzhledem k tvrzení (i) předchozí věty definujeme **násobnost vlastního čísla matice** jako násobnost tohoto čísla jakožto kořene charakteristického polynomu.

Věta 10.13

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je symetrická. Pak jsou její vlastní čísla reálná.

Definice

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Funkce $\lambda \mapsto \det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A})$ se nazývá **charakteristický polynom matice $\mathbb{A}$.** Vzhledem k tvrzení (i) předchozí věty definujeme **násobnost vlastního čísla matice** jako násobnost tohoto čísla jakožto kořene charakteristického polynomu.

Věta 10.13

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je symetrická. Pak jsou její vlastní čísla reálná.

Definice

Řekneme, že matice $\mathbb{Q} \in M(n \times n)$ je **ortogonální**, jestliže platí $\mathbb{Q}^T\mathbb{Q} = \mathbb{Q}\mathbb{Q}^T = \mathbb{I}$.

Věta 10.14 (spektrální rozklad matice)

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ *je symetrická. Pak existuje ortogonální matice* $\mathbb{Q} \in M(n \times n)$ *taková, že*

$$\mathbb{Q}^T \mathbb{A} \mathbb{Q} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

kde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *jsou vlastní čísla matice* $\mathbb{A}$.

Věta 10.15

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ *je symetrická. Pak platí:*

- $\mathbb{A}$ *je pozitivně definitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla kladná,*

Věta 10.15

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ *je symetrická. Pak platí:*

- $\mathbb{A}$ *je pozitivně definitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla kladná,*
- $\mathbb{A}$ *je negativně definitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla záporná,*

Věta 10.15

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ *je symetrická. Pak platí:*

- $\mathbb{A}$ *je pozitivně definitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla kladná,*
- $\mathbb{A}$ *je negativně definitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla záporná,*
- $\mathbb{A}$ *je pozitivně semidefinitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla nezáporná,*

Věta 10.15

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ *je symetrická. Pak platí:*

- $\mathbb{A}$ *je pozitivně definitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla kladná,*
- $\mathbb{A}$ *je negativně definitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla záporná,*
- $\mathbb{A}$ *je pozitivně semidefinitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla nezáporná,*
- $\mathbb{A}$ *je negativně semidefinitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla nekladná,*

Věta 10.15

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ *je symetrická. Pak platí:*

- $\mathbb{A}$ *je pozitivně definitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla kladná,*
- $\mathbb{A}$ *je negativně definitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla záporná,*
- $\mathbb{A}$ *je pozitivně semidefinitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla nezáporná,*
- $\mathbb{A}$ *je negativně semidefinitní, právě když jsou všechna její vlastní čísla nekladná,*
- $\mathbb{A}$ *je indefinitní, právě když má kladné vlastní číslo i záporné vlastní číslo.*

Definice

Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$. **Stopou** matice $\mathbb{A}$ rozumíme číslo

$$\mathrm{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Definice

Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$. **Stopou** matice $\mathbb{A}$ rozumíme číslo

$$\mathrm{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Věta 10.16 (vlastnosti stopy)

Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in M(n \times n)$, $a \in \mathbf{R}$. *Pak platí:*

(i) $\mathrm{tr}(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \mathrm{tr}(\mathbb{A}) + \mathrm{tr}(\mathbb{B})$,

Definice

Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$. **Stopou** matice $\mathbb{A}$ rozumíme číslo

$$\operatorname{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Věta 10.16 (vlastnosti stopy)

Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in M(n \times n)$, $a \in \mathbf{R}$. *Pak platí:*

(i) $\operatorname{tr}(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \operatorname{tr}(\mathbb{A}) + \operatorname{tr}(\mathbb{B})$,

(ii) $\operatorname{tr}(a\mathbb{A}) = a \operatorname{tr}(\mathbb{A})$,

Definice

Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$. **Stopou** matice $\mathbb{A}$ rozumíme číslo

$$\operatorname{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Věta 10.16 (vlastnosti stopy)

Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in M(n \times n)$, $a \in \mathbf{R}$. *Pak platí:*

(i) $\operatorname{tr}(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \operatorname{tr}(\mathbb{A}) + \operatorname{tr}(\mathbb{B})$,

(ii) $\operatorname{tr}(a\mathbb{A}) = a \operatorname{tr}(\mathbb{A})$,

(iii) $\operatorname{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \operatorname{tr}(\mathbb{B}\mathbb{A})$,

Definice

Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij}) \in M(n \times n)$. **Stopou** matice $\mathbb{A}$ rozumíme číslo

$$\operatorname{tr}(\mathbb{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Věta 10.16 (vlastnosti stopy)

Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in M(n \times n)$, $a \in \mathbf{R}$. *Pak platí:*

(i) $\operatorname{tr}(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \operatorname{tr}(\mathbb{A}) + \operatorname{tr}(\mathbb{B})$,

(ii) $\operatorname{tr}(a\mathbb{A}) = a \operatorname{tr}(\mathbb{A})$,

(iii) $\operatorname{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \operatorname{tr}(\mathbb{B}\mathbb{A})$,

(iv) $\operatorname{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{C}) = \operatorname{tr}(\mathbb{C}\mathbb{A}\mathbb{B}) = \operatorname{tr}(\mathbb{B}\mathbb{C}\mathbb{A})$.

11. Taylorův polynom

11.1 Taylorův polynom fcí jedné reál. prom.

Definice

Nechť f je funkce, $a \in \mathbf{R}$ a funkce f má v bodě a vlastní n-tou derivaci. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \\ + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovým polynomem funkce** f **v bodě** a **řádu** n.

Lemma 11.1

Nechť $n \in \mathbf{N}$*,* Q *je polynom,* $\operatorname{st} Q \leq n$ *a* $\lim_{x\to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = 0$*. Pak* Q *je nulový polynom.*

Věta 11.2 (Peanův tvar zbytku)

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$ a funkce f má v bodě a vlastní n-tou derivaci. Potom

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Věta 11.2 (Peanův tvar zbytku)

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$ a funkce f má v bodě a vlastní n-tou derivaci. Potom

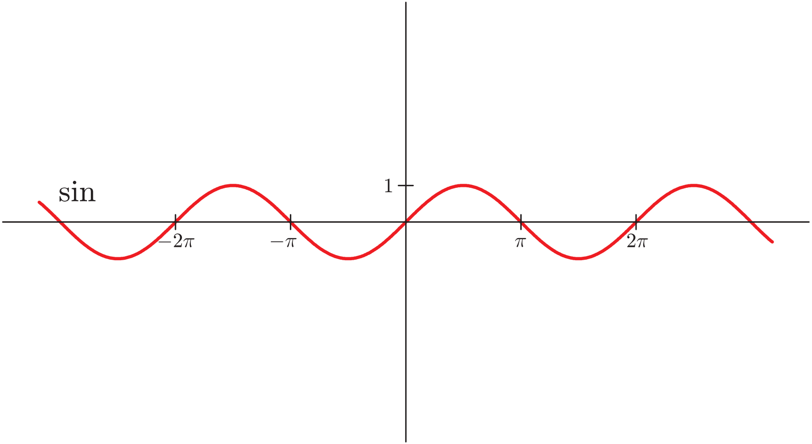
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

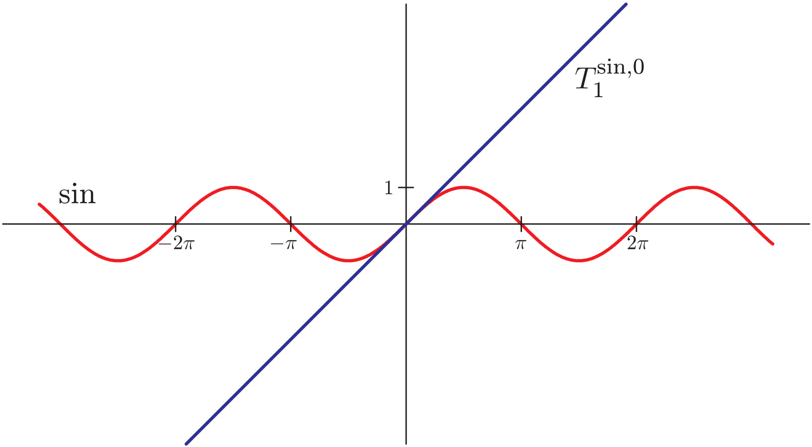
Věta 11.3 (o jednoznačnosti)

Nechť $n \in \mathbf{N}$, $a \in \mathbf{R}$, funkce f má v bodě a vlastní n-tou derivaci a P je polynom stupně nejvýše n splňující

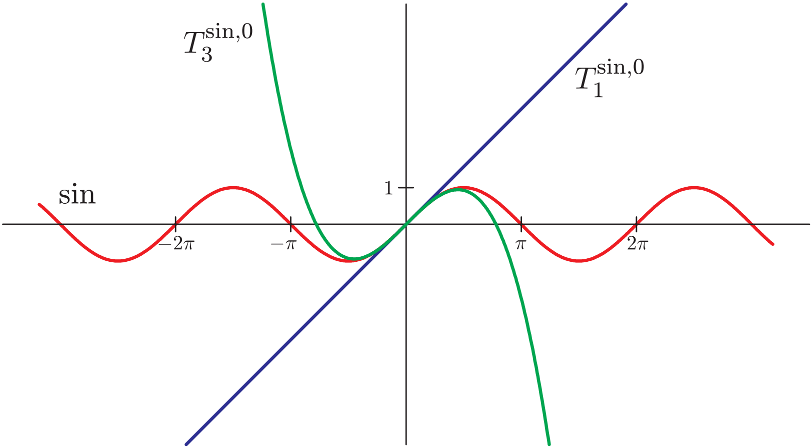
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Potom $P = T_n^{f,a}$.

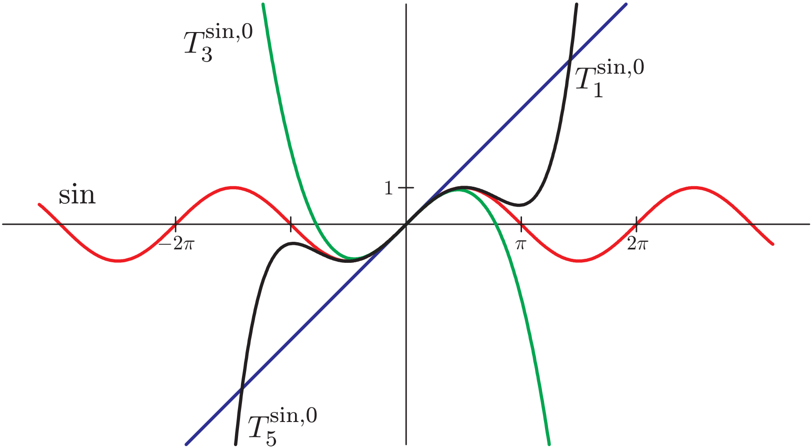

sin
1
-2π
$-\pi$
π
2π



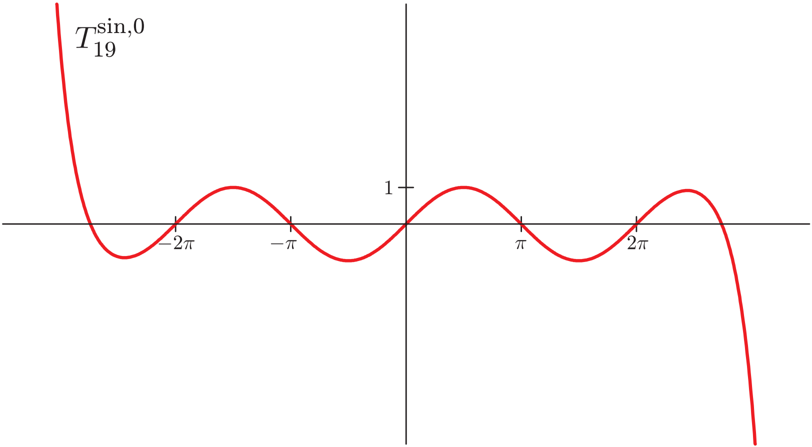
$T_1^{\sin,0}$
sin
1
-2π
$-\pi$
π
2π



$T_3^{\sin,0}$
$T_1^{\sin,0}$
sin
1
-2π
$-\pi$
π
2π



$T_3^{\sin,0}$
$T_1^{\sin,0}$
1
$\sin$
-2π
π
2π
$T_5^{\sin,0}$


$T_{19}^{\sin,0}$
1
-2π
$-\pi$
π
2π

Definice

Nechť f a g jsou funkce, $a \in \mathbf{R}^*$. Řekneme, že funkce f je **v bodě** a **malé** o **od** g (píšeme $f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$), jestliže platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Věta 11.4 (aritmetika malého o)

Nechť $a \in \mathbf{R}^*$.

(i) *Jestliže* $f_1(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ *a* $f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$, *potom* $f_1(x) + f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.

Věta 11.4 (aritmetika malého o)

Nechť $a \in \mathbf{R}^*$.

(i) *Jestliže* $f_1(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ *a* $f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$, *potom* $f_1(x) + f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.

(ii) *Jestliže* $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ *a* $f_2(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$, *potom* $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)g_2(x)\big)$, $x \to a$.

Věta 11.4 (aritmetika malého o)

Nechť $a \in \mathbf{R}^*$.

(i) *Jestliže* $f_1(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ *a* $f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$, *potom* $f_1(x) + f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.

(ii) *Jestliže* $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ *a* $f_2(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$, *potom* $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)g_2(x)\big)$, $x \to a$.

(iii) *Jestliže* $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ *a* f_2 *je nenulová na jistém prstencovém okolí bodu* a, *potom* $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)f_2(x)\big)$, $x \to a$.

Věta 11.4 (aritmetika malého o)

Nechť $a \in \mathbf{R}^*$*.*

(i) *Jestliže* $f_1(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ *a* $f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$*, potom* $f_1(x) + f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$*.*

(ii) *Jestliže* $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ *a* $f_2(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$*, potom* $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)g_2(x)\big)$, $x \to a$*.*

(iii) *Jestliže* $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ *a* f_2 *je nenulová na jistém prstencovém okolí bodu* a*, potom* $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)f_2(x)\big)$, $x \to a$*.*

(iv) *Jestliže* $f(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ *a existuje vlastní* $\lim_{x\to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$*, potom* $f(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$*.*

Věta 11.4 (aritmetika malého o)

Nechť $a \in \mathbf{R}^*$.

(i) *Jestliže $f_1(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ a $f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$, potom $f_1(x) + f_2(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.*

(ii) *Jestliže $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a $f_2(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$, potom $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)g_2(x)\big)$, $x \to a$.*

(iii) *Jestliže $f_1(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a f_2 je nenulová na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $f_1(x)f_2(x) = o\big(g_1(x)f_2(x)\big)$, $x \to a$.*

(iv) *Jestliže $f(x) = o\big(g_1(x)\big)$, $x \to a$ a existuje vlastní $\lim_{x\to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$, potom $f(x) = o\big(g_2(x)\big)$, $x \to a$.*

(v) *Jestliže $f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$ a h je omezená na jistém prstencovém okolí bodu a, potom $h(x)f(x) = o\big(g(x)\big)$, $x \to a$.*

Věta 11.4 (aritmetika malého o)

Nechť $a \in \mathbf{R}^*$.

(i) *Jestliže* $f_1(x) = o(g(x))$, $x \to a$ *a* $f_2(x) = o(g(x))$, $x \to a$, *potom* $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$, $x \to a$.

(ii) *Jestliže* $f_1(x) = o(g_1(x))$, $x \to a$ *a* $f_2(x) = o(g_2(x))$, $x \to a$, *potom* $f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)g_2(x))$, $x \to a$.

(iii) *Jestliže* $f_1(x) = o(g_1(x))$, $x \to a$ *a* f_2 *je nenulová na jistém prstencovém okolí bodu* a, *potom* $f_1(x)f_2(x) = o(g_1(x)f_2(x))$, $x \to a$.

(iv) *Jestliže* $f(x) = o(g_1(x))$, $x \to a$ *a existuje vlastní* $\lim_{x \to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$, *potom* $f(x) = o(g_2(x))$, $x \to a$.

(v) *Jestliže* $f(x) = o(g(x))$, $x \to a$ *a* h *je omezená na jistém prstencovém okolí bodu* a, *potom* $h(x)f(x) = o(g(x))$, $x \to a$.

(vi) *Jestliže* $m, n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, $m \le n$, *a* $f(x) = o((x-a)^n)$, $x \to a$, *potom* $f(x) = o((x-a)^m)$, $x \to a$.

Věta 11.5

Nechť $a, b \in \mathbf{R}^*$, $f(y) = o\big(g(y)\big)$, $y \to b$, $\lim_{x\to a} \varphi(x) = b$ *a existuje* $\delta \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$, *takové, že*

$$\forall x \in P(a, \delta) \colon \varphi(x) \neq b.$$

Potom $f\big(\varphi(x)\big) = o\big(g(\varphi(x))\big)$, $x \to a$.

Věta 11.6 (Lagrangeův tvar zbytku)

Nechť $n \in \mathbf{N}$, *a dále nechť* I *je otevřený interval,* $f \in C^{n+1}(I)$ *a* $a \in I$. *Potom pro každé* $x \in I$ *existuje číslo* $\xi \in \langle a, x \rangle$ *splňující*

$$f(x) = T_n^{f,a}(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

Definice

Nechť f je funkce, $a \in \mathbf{R}$ a funkce f má v bodě a derivace všech řádů. Potom řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovou řadou funkce f o středu a.** Ve speciálním případě $a = 0$ mluvíme o **MacLaurinově řadě.**

Věta 11.7

Pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí:

- $T_k^{\exp,0}(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k$,

Věta 11.7

Pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí:

- $T_k^{\exp,0}(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k$,
- $T_{2k-1}^{\sin,0}(x) = T_{2k}^{\sin,0}(x) =$
  $x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1}$,

11.2 Taylorovy polynomy a řady el. fcí

Věta 11.7

Pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí:

- $T_k^{\exp,0}(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k$,
- $T_{2k-1}^{\sin,0}(x) = T_{2k}^{\sin,0}(x) =$
  $x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1}$,
- $T_{2k}^{\cos,0}(x) = T_{2k+1}^{\cos,0}(x) =$
  $1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k}$,

11.2 Taylorovy polynomy a řady el. fcí

Věta 11.7

Pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí:

- $T_k^{\exp,0}(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k$,
- $T_{2k-1}^{\sin,0}(x) = T_{2k}^{\sin,0}(x) =$
  $x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1}$,
- $T_{2k}^{\cos,0}(x) = T_{2k+1}^{\cos,0}(x) =$
  $1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k}$,
- $T_k^{\log(1+y),0}(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k$,

11.2 Taylorovy polynomy a řady el. fcí

Věta 11.7

Pro každé $k \in \mathbf{N}$ platí:

- $T_k^{\exp,0}(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k$,
- $T_{2k-1}^{\sin,0}(x) = T_{2k}^{\sin,0}(x) =$
  $x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{(2k-1)!}x^{2k-1}$,
- $T_{2k}^{\cos,0}(x) = T_{2k+1}^{\cos,0}(x) =$
  $1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots + (-1)^k\frac{1}{(2k)!}x^{2k}$,
- $T_k^{\log(1+y),0}(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k$,
- $T_k^{(1+y)^\alpha,0}(x) = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k$, *kde* $\alpha \in \mathbf{R}$,
  $\binom{\alpha}{0} = 1$, $\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}$.

Věta 11.8

Pro každé $x \in \mathbf{R}$ *jsou funkce* exp, sin *a* cos *součtem své Taylorovy řady o středu* 0*. Platí tedy:*

$$\forall x \in \mathbf{R}\colon\ \exp x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n,$$

$$\forall x \in \mathbf{R}\colon\ \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1},$$

$$\forall x \in \mathbf{R}\colon\ \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

Věta 11.9

Platí

$$\forall x \in (-1,1\rangle\colon\ \log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n,$$

$$\forall x \in (-1,1)\colon (1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

11.3 Taylorův polynom 2. řádu fce více prom.

Definice

Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $\boldsymbol{a} \in G$ a $f \in C^2(G)$. Definujme funkci $T_2^{f,\boldsymbol{a}} \colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ předpisem

$$T_2^{f,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a})(x_i - a_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{a})(x_i - a_i)(x_j - a_j).$$

Tuto funkci nazýváme **Taylorovým polynomem druhého řádu funkce f v bodě $\boldsymbol{a}$.**

Věta 11.10

Nechť $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$, $\Delta > 0$ *a* $f \in C^2\big(B(\boldsymbol{a}, \Delta)\big)$. *Potom existuje funkce* $\omega\colon B(\boldsymbol{a}, \Delta) \to \mathbf{R}$ *taková, že*

$$\forall \boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}, \Delta)\colon f(\boldsymbol{x}) = T_2^{f,\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) + \omega(\boldsymbol{x}) \cdot \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|^2$$

a platí

$$\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \omega(\boldsymbol{x}) = 0.$$

12. Extrémy funkcí více proměnných

Věta 12.1 (postačující podmínky druhého řádu)

Budiž $f \in \mathcal{C}^2(G)$, $\boldsymbol{a} \in G$ a nechť $\boldsymbol{a}$ je stacionárním bodem funkce f. Potom platí:

- *Je-li $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ negativně definitní, nabývá f v bodě $\boldsymbol{a}$ ostrého lokálního maxima.*
- *Je-li $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ pozitivně definitní, nabývá f v bodě $\boldsymbol{a}$ ostrého lokálního minima.*
- *Je-li $\nabla^2 f(\boldsymbol{a})$ indefinitní, nenabývá f v bodě $\boldsymbol{a}$ ani lokálního maxima, ani lokálního minima.*

Věta 12.2

Budiž $G \subset \mathbf{R}^n$ otevřená konvexní množina a $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Potom je funkce f na množině G konkávní, právě když pro všechna $\boldsymbol{x} \in G$ je matice $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ negativně semidefinitní.

Věta 12.3

Nechť G je otevřená konvexní podmnožina $\mathbf{R}^n$, $f \in \mathcal{C}^2(G)$ a $\boldsymbol{a} \in G$. Nechť platí

- $\forall \boldsymbol{x} \in G: \ \nabla^2 f(\boldsymbol{x})$ *je negativně semidefinitní,*
- $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{o}$.

Potom funkce f nabývá v bodě $\boldsymbol{a}$ svého maxima na množině G.