Písemná zkouška z Matematiky III pro FSV (A)
ZS 2003-2004 (14.1. 2004)

Příklad A1: Spočtěte určitý integrál.

(10 bodů)

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+3x+1}}\,dx$$

Příklad A2: Určete vlastní čísla matice $\mathbb{B}$ a všechny jim příslušné vlastní vektory. Existuje báze prostoru $\mathbf{R}^3$ tvořená vlastními vektory?

(10 bodů)

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -7 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Příklad A3: Napište Taylorův polynom třetího řádu v bodě 0 funkce v čitateli a spočtěte limitu.

(10 bodů)

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^x - \sin x + 2\cos x - 2}{x\sin(x^2)}$$

Příklad A4: Nalezněte všechny lokální extrémy funkce f v množině M, kde

(10 bodů)

$$f(x,y) = (x-2y)e^{xy}, \quad M = \mathbf{R}^2$$

Příklad A5: Najděte všechna řešení diferenční rovnice

$$y(n+3) + 2y(n+2) + y(n+1) + 2y(n) = n$$

která navíc vyhovují podmínce $y(1) = 0$. (10 bodů)

Příklad A6: Řešte následující úlohy; své odpovědi zdůvodněte.

(1) Rozhodněte, zda existuje vektorový prostor dimenze 2^6; pokud ano, uveďte příklad.
(2) Rozhodněte, zda existuje lineární zobrazení $\mathbf{R}$ na $\mathbf{R}^2$; pokud ano, uveďte příklad.
(3) Rozhodněte, zda existuje funkce mající v bodě 0 Taylorův polynom řádu 5, jehož absolutní člen je roven 1 a koeficienty u ostatních členů jsou rovny 2; pokud ano, uveďte příklad.
(4) Nalezněte dva různé polynomy P, Q takové, že $P(x) = o(x), x \to 0$ a zároveň $Q(x) = o(x), x \to 0$.

(2 + 2 + 3 + 3 bodů)

Písemná zkouška z Matematiky III pro FSV (B)
ZS 2003-04 (28.1. 2004)

Příklad B1: Spočtěte určitý integrál.

(10 bodů)
$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+x+1)^2}\,dx$$

Příklad B2: Určete vlastní čísla matice $\mathbb{B}$ a všechny jim příslušné vlastní vektory. Existuje báze prostoru $\mathbf{R}^3$ tvořená vlastními vektory?

(10 bodů)
$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Příklad B3: Napište Taylorův polynom čtvrtého řádu v bodě 1 funkce ve jmenovateli. Dále napište Taylorův polynom čtvrtého řádu v bodě 0 funkce v čitateli a spočtěte limitu.

(10 bodů)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + \cos x - \frac{1}{6}x^3\sqrt{1+x} - 2 - x + x^4}{x^4}$$

Příklad B4: Nalezněte všechny lokální extrémy funkce f v množině M, kde

(10 bodů)
$$f(x,y) = \sin 2x \cdot \cos y, \quad M = \mathbf{R}^2$$

Příklad B5: Najděte všechna řešení soustavy diferenčních rovnic

$$y(n+2) - 2y(n+1) + y(n) = 0$$
$$z(n+2) + 2z(n+1) - 3z(n) = y(n)$$

která navíc vyhovují podmínkám $y(1) = 1$, $y(2) = 2$, $z(1) = 15/16$, $z(2) = 9/8$.
(10 bodů)

Příklad B6: Řešte následující úlohy; své odpovědi zdůvodněte.

(1) Buď $a > 0$ a f lichá funkce spojitá na $\langle -a, a\rangle$. Čemu je roven
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx?$$

(2) Je $\{f \in \mathcal{C}(\mathbf{R});\ |f(0)| \le 1\}$ vektorovým podprostorem $\mathcal{C}(\mathbf{R})$?
(3) Existuje prosté lineární zobrazení $\mathbf{R}^2$ na $\mathbf{R}$?
(4) Buď $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funkce taková, že její Taylorův polynom 1. řádu T_1^a je pro každé $a \in \mathbf{R}$ konstantní. Co lze říci o funkci f?

(2 + 2 + 3 + 3 bodů)

Písemná zkouška z Matematiky III pro FSV (C)
ZS 2003-04 (4.2. 2004)

Příklad C1: Spočtěte určitý integrál.

(10 bodů)
$$\int_{-1}^{1} \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+2}}\, dx$$

Příklad C2: V závislosti na parametru $a \in \mathbf{R}$ určete, zda matice je PD, ND, PSD, NSD či ID.

(10 bodů)
$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3a-1 & 2a & 1 \\ 2a & 2a & a \\ 1 & a & 6a-1 \end{pmatrix}$$

Příklad C3: Napište napište Taylorův polynom čtvrtého řádu v bodě 0 funkce v čitateli a jmenovateli a spočtěte limitu.

(10 bodů)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} + 2\cos(\sin(x)) - 3}{x^3(1+x)^{1/3} - \sin(x^3)}$$

Příklad C4: Nalezněte všechny lokální extrémy funkce f v množině M, kde

(10 bodů)
$$f(x,y) = x^2 + x^2y + y^2, \quad M = \mathbf{R}^2$$

Příklad C5: Napište homogenní lineární diferenční rovnici třetího řádu takovou, že posloupnosti $\{2^n\}$, $\{n2^n\}$, $\{3^n\}$ jsou řešeními této rovnice. V nalezené rovnici pak uvažujte pravou stranou rovnou konstantní posloupnosti $\{1\}$ a nalezněte partikulární řešení. (10 bodů)

Příklad C6: Řešte následující úlohy; své odpovědi zdůvodněte.

(1) Najděte dvojici spojitých rostoucích lineárně nezávislých funkcí na $\mathbf{R}$.
(2) Existuje lineární zobrazení $\mathbf{R}^4$ na $\mathbf{R}^2$?
(3) Je
$$M_3 = \{\mathbb{A} \in \mathcal{M}(n\times n);\ \mathbb{A} \text{ má nejvýše tři nenulové prvky}\}$$
vektorovým podprostorem prostoru $\mathcal{M}(n\times n)$ čtvercových matic řádu n $(n \geq 2)$?
(4) Uveďte příklad funkce definované na $\mathbf{R}^3$, která nemá žádný lokální extrém.

(2 + 2 + 3 + 3 bodů)

Písemná zkouška z Matematiky III pro FSV (D)
ZS 2003-04 (11.2. 2004)

Příklad D1: Spočtěte určitý integrál.

(10 bodů)
$$\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$$

Příklad D2: V závislosti na parametru $a \in \mathbf{R}$ určete, zda matice je PD, ND, PSD, NSD či ID.

(10 bodů)
$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & a+2 & 2a \\ a+2 & 3a+2 & 3a \\ 2a & 3a & 2 \end{pmatrix}$$

Příklad D3: Napište napište Taylorův polynom třetího řádu v bodě 0 funkce v čitateli a spočtěte limitu.

(10 bodů)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(2x)\sin(x^2) - x^2}{\mathrm{tg}(x^2)(1+x) - x^2}$$

Příklad D4: Nalezněte všechny lokální extrémy funkce f v množině M, kde

(10 bodů)
$$f(x,y,z) = -x^2 + y^2 + 2xyz + 3x^2y - yz, \quad M = \mathbf{R}^3$$

Příklad D5: Najděte všechna řešení diferenční rovnice

(10 bodů)
$$y(n+4) + 2y(n+2) + y(n) = \cos(\pi n/2) + \sin(\pi n/2).$$

Příklad D6: Řešte následující úlohy; své odpovědi zdůvodněte.

(1) Existuje vlastní podprostor vektorového prostoru $\mathbb{R}^2$, který obsahuje prvky $[1,2]$ a $[2,1]$?
(2) Buď $n \in \mathbb{N}$. Existuje matice $\mathbb{A}$ řádu n, která má jediné vlastní číslo $\lambda = 2$?
(3) Existuje funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, jejíž hessián v libovolném bodě je jednotkovou maticí?
(4) Buď $\mathbb{A} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ symetrická indefinitní matice. Jaká je definitnost matice $\widetilde{\mathbb{A}} = \left(\begin{smallmatrix} c & b \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$?

(2 + 2 + 3 + 3 bodů)

Písemná zkouška z Matematiky III pro FSV (E)
ZS 2003-04 (18.2. 2004)

Příklad E1: Spočtěte určitý integrál.

(10 bodů)
$$\int_0^1 \sqrt{x^2+2x+2}\,dx$$

Příklad E2: Určete vlastní čísla matice $\mathbb{B}$ a všechny jim příslušné vlastní vektory. Existuje báze prostoru $\mathbf{R}^3$ tvořená vlastními vektory?

(10 bodů)
$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 4 & 6 & -4 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Příklad E3: Pomocí Taylorova polynomu spočtěte limitu.

(10 bodů)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(\sin(x)\cos(x)) + \cos(x) - 2 - x}{x^3}.$$

Příklad E4: Nalezněte všechny lokální extrémy funkce f v množině M, kde

(10 bodů)
$$f(x,y,z) = \sin(x) + \sin(y)\cos(z), \quad M = \mathbf{R} \times (0,\pi) \times \mathbf{R}$$

Příklad E5: Najděte všechna řešení diferenční rovnice

(10 bodů)
$$y(n+4) - y(n) = n.$$

Příklad E6: Řešte následující úlohy; své odpovědi zdůvodněte.

(1) Buď $n \geq 2$. Najděte matici $\mathbb{A}$ řádu n, která má právě dvě vlastní čísla $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$.
(2) Existuje bilineární forma $B : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ taková, že $B(\mathbf{o}, u) \neq 0$ pro některé $u \in \mathbf{R}^n$ ($\mathbf{o}$ označuje nulový vektor)?
(3) Existuje prosté lineární zobrazení $\mathbf{R}^3$ na prostor všech polynomů stupně nejvýše 2?
(4) Najděte příklad funkce $f \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$, pro jejíž Taylorovy polynomy 1. řádu v bodech 0 a 1 platí:
$$T_1^0(x) = x,\ T_1^1(x) = \frac{1}{2}.$$

(2 + 2 + 3 + 3 bodů)

Písemná zkouška z Matematiky III pro FSV (F)
ZS 2003-04 (25.2. 2004)

Příklad F1: Spočtěte určitý integrál.

(10 bodů)
$$\int_0^{\sqrt{5}} \frac{x^2+2}{(x^2+5)^2}\,dx$$

Příklad F2: V závislosti na parametru $a \in \mathbf{R}$ určete, zda matice je PD, ND, PSD, NSD či ID.

(10 bodů)
$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3a+1 & 4a+1 & 1+a \\ 4a+1 & 6a+1 & 2a+1 \\ 1+a & 2a+1 & 3a+1 \end{pmatrix}$$

Příklad F3: Spočtěte limitu.

(10 bodů)
$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^x - 1 - x^2}{\cos(\sin(x)) - \cos(x) + x^3}$$

Příklad F4: Nalezněte všechny lokální extrémy funkce f v množině M, kde

(10 bodů)
$$f(x,y) = (x^2+x)\cos y, \quad M = \mathbf{R}^2$$

Příklad F5: Najděte všechna řešení diferenční rovnice

(10 bodů)
$$y(n+3) + 5y(n+2) + 8y(n+1) + 4y(n) = 37 + 42n + 18n^2.$$

Příklad F6: Řešte následující úlohy; své odpovědi zdůvodněte.

(1) Uveďte příklad lineárního zobrazení z $\mathcal{C}(\mathbf{R})$ do $\mathcal{C}(\mathbf{R})$.

(2) Najděte příklad funkce $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, pro jejíž Taylorovy polynomy 1. řádu v bodech 0 a 1 platí:
$$T_1^0(x) = x,\ T_1^1(x) = \frac{1}{2}.$$

(3) Buď $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pozitivně definitní matice. Existuje $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, že $\alpha\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}$ je indefinitní?

(4) Existuje indefinitní matice $\mathbb{A} \in M(n \times n)$, pro kterou platí
$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jj} \end{vmatrix} \geq 0, \qquad j = 1, \dots, n\ ?$$

(2 + 2 + 3 + 3 bodů)