Písemná zkouška z Matematiky III (A)
ZS 2000-2001

Příklad A1: Spočtěte

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(1+\sin^2 x)(1+\sin x)}\, dx. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad A2: Určete vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ a určete báze odpovídajících podprostorů.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad A3: Převeďte symetrickou transformací matici $\mathbb{B}$ na diagonální matici a určete její signaturu.

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad A4: Nalezněte lokální minima a maxima funkce funkce f na $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad A5: Vypočtěte diferenční rovnici s počátečními podmínkami.

$$y(n+3) - y(n+2) + 9y(n+1) - 9y(n) = 0;$$
$$y(1) = 1,\ y(2) = 0,\ y(3) = 0. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Výsledky (A)

Příklad A1: $\frac{1}{4}\log 2 + \pi/8$

Příklad A2: $\lambda_1 = 4,\ \{[-1,0,1]\};\ \lambda_2 = \lambda_3 = 2,\ \{[1,-2,1]\}$

Příklad A3: Signatura: $(2,1,0)$.

Příklad A4: Lokální maximum: $[-1,-1]$; lokální minimum: $[1,1]$; body $[-1,1]$ a $[1,-1]$ jsou podezřelé, ale extrém v nich není.

Příklad A5: $y(n) = \frac{27}{30} + \frac{1}{30}3^n \sin(\frac{\pi}{2}n) + \frac{1}{10}3^n \cos(\frac{\pi}{2}n),\ n \in \mathbb{N}$

Písemná zkouška z Matematiky III (B)
ZS 2000-2001

Příklad B1: Spočtěte

$$\int_0^1 \frac{x^3+x+1}{(x^2+1)(x+2)}\,dx. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad B2: Určete vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ a určete báze odpovídajících podprostorů.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad B3: Převeďte symetrickou transformací matici $\mathbb{B}$ na diagonální matici a určete její signaturu.

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 9 & -5 & -1 \\ -5 & 18 & 10 \\ -1 & 10 & 6 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad B4: Nalezněte lokální minima a maxima funkce funkce f na $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = (x-y)e^{x+y^2}. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad B5: Vypočtěte diferenční rovnici s počátečními podmínkami.

$$y(n+4) + 8y(n+2) + 16y(n) = 0;$$
$$y(1) = 0,\ y(2) = -8,\ y(3) = 0,\ y(4) = 64. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Výsledky (B)

Příklad B1: $1 - \frac{9}{5}\log 3 + \frac{17}{10}\log 2 + \pi/10$

Příklad B2: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1,\ \{[1,0,0],[0,1,1]\}$

Příklad B3: Signatura: $(3,0,0)$.

Příklad B4: Bod $[-3/2,-1/2]$ je podezřelý, ale extrém v něm není, tj. funkce nemá žádné lokální extrémy.

Příklad B5: $y(n) = n2^n\cos(\pi n/2),\ n \in \mathbb{N}$

Písemná zkouška z Matematiky III (C)
ZS 2000-2001

Příklad C1: Spočtěte

$$\int_0^2 \frac{x^2+x+1}{(x^2+2)(x+2)^2}\,dx. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad C2: Určete vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ a určete báze odpovídajících podprostorů.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{pmatrix} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad C3: Převeďte symetrickou transformací matici $\mathbb{B}$ na diagonální matici a určete její signaturu.

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad C4: Nalezněte lokální minima a maxima funkce funkce f na $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = (x^2-y^2)e^{x^2+y^2}. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad C5: Vypočtěte diferenční rovnici s počátečními podmínkami.

$$y(n+3)+y(n+2)+9y(n+1)+9y(n)=0;$$
$$y(1)=-1,\ y(2)=1,\ y(3)=-1. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Výsledky (C)

Příklad C1: $\frac{1}{8}-\frac{1}{6}\log 2+\frac{1}{12}\log 3+\frac{\sqrt{2}}{12}\operatorname{arctg}\sqrt{2}$

Příklad C2: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=4,\ \{[-1,-1,1]\}$

Příklad C3: Signatura: $(1,1,1)$.

Příklad C4: Bod $[0,0]$ je podezřelý, ale extrém v něm není, tj. funkce nemá žádné lokální extrémy.

Příklad C5: $y(n)=(-1)^n,\ n\in\mathbb{N}$

Písemná zkouška z Matematiky III (D)
ZS 2000-2001

Příklad D1: Spočtěte
$$\int_0^{\pi} (x^2 \sin x + e^x)\, dx. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad D2: Určete vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ a určete báze odpovídajících podprostorů.
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad D3: Převeďte symetrickou transformací matici $\mathbb{B}$ na diagonální matici a určete její signaturu.
$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad D4: Nalezněte lokální minima a maxima funkce funkce f na množině $(0,\pi) \times (0,\pi)$
$$f(x,y) = \sin x \sin y. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad D5: Vypočtěte diferenční rovnici s počátečními podmínkami.
$$y(n+4) - 81y(n) = 0;$$
$$y(1) = 3,\ y(2) = 9,\ y(3) = 27,\ y(4) = 81. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Výsledky (D)

Příklad D1: $\pi^2 + e^{\pi} - 5$

Příklad D2: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1,\ \{[3,1,0],[-1,0,1]\}$

Příklad D3: Signatura: $(2,1,0)$.

Příklad D4: V bodě $[\pi/2, \pi/2]$ je lokální maximum.

Příklad D5: $y(n) = 3^n,\ n \in \mathbb{N}$

Písemná zkouška z Matematiky III (E)
ZS 2000-2001

Příklad E1: Spočtěte

$$\int_0^{1/2} \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad E2: Určete vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ a určete báze odpovídajících podprostorů.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad E3: Převeďte symetrickou transformací matici $\mathbb{B}$ na diagonální matici a určete její signaturu.

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 \\ 1 & 3 & -4 \\ -6 & -4 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad E4: Nalezněte lokální minima a maxima funkce funkce f na množině $(0,+\infty)\times\mathbb{R}$

$$f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad E5: Nalezněte všechna řešení diferenční rovnice

$$y(n+3) - y(n+2) + y(n+1) - y(n) = 0$$

splňující $y(1) = 0$. (10 bodů)

Výsledky (E)

Příklad E1: $\frac{\pi}{6} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

Příklad E2: $\lambda_1 = 4,\ \{[1,1,2]\};\ \lambda_2 = \lambda_3 = -2,\ \{[-1,-1,1]\}$

Příklad E3: Signatura: $(2,1,0)$.

Příklad E4: V bodě $[4,4]$ je lokální maximum.

Příklad E5: $y(n) = c_1(\sin(\frac{\pi}{2}n) - 1) + c_2\cos(\frac{\pi}{2}n),\ n\in\mathbb{N}$

Písemná zkouška z Matematiky III (F)
ZS 2000-2001

Příklad F1: Spočtěte
$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad F2: Určete vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ a určete báze odpovídajících podprostorů.
$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad F3: Převeďte symetrickou transformací matici $\mathbb{B}$ na diagonální matici a určete její signaturu.
$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -4 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad F4: Nalezněte lokální minima a maxima funkce funkce f na množině $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\setminus\{[0,0]\}$
$$f(x,y) = \log(x^2+y^2+x^2y^2)+x. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad F5: Nalezněte všechna řešení diferenční rovnice
$$y(n+4)+8y(n+2)+16y(n) = 0$$
splňující $y(1)=0$. (10 bodů)

Výsledky (F)

Příklad F1: $\sqrt{3}-\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})-1+\frac{1}{4}\log 3$

Příklad F2: $\lambda_1=-1,\ \{[-3,-2,1]\};\ \lambda_2=\lambda_3=2,\ \{[0,1,-2]\}$

Příklad F3: Signatura: $(2,1,0)$.

Příklad F4: Funkce nemá žádný lokální extrém.

Příklad F5: $y(n)=c_1 2^n \sin\frac{\pi}{2}n + c_2\cos\frac{\pi}{2}n - c_1 n2^n\sin\frac{\pi}{2}n + c_3 n2^n\cos\frac{\pi}{2}n,\ n\in\mathbb{N},\ c_1,c_2,c_3\in\mathbb{R}$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV

ZS 2000-2001

Příklad 1: Spočtěte

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)(x+2)}\,dx \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad 2: Určete vlastní čísla matice $\mathbb{A}$ a určete báze odpovídajících podprostorů.

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 1 & -3 & -9 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 3: Převeďte symetrickou transformací matici $\mathbb{B}$ na diagonální matici a určete její signaturu.

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad 4: Nalezněte lokální minima a maxima funkce funkce f na $\mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = x + xy + xy^2. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Příklad 5: Vypočtěte diferenční rovnici s počátečními podmínkami.

$$y(n+2) - 3y(n+1) + 2y(n) = 2^n n;\ \ y(1) = 1,\ \ y(2) = 1. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Výsledky

Příklad 1: $-\frac{2}{5}\log 3 + \frac{3}{5}\log 2 + \frac{\pi}{20}$

Příklad 2: $\lambda_1 = -4,\ \{[-1,1,0]\};\ \lambda_2 = \lambda_3 = 4,\ \{[2,-1,1]\}$

Příklad 3: Signatura: $(1,1,0)$.

Příklad 4: Podezřelé body: $[-1,1]$, $[0,-1]$. V žádném z nich extrém není.

Příklad 5: $y(n) = n2^{n-1} + 3 - 32^{n-1},\ n \in \mathbb{N}$