

## 2. Extrémy funkcí více proměnných

### Úlohy řešitelné bez věty o multiplikatorech

Nalezněte absolutní extrémy funkce  $f$  na množině  $M$ .

**1.1.**  $f(x, y) = x + y$ ;  $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$

**1.2.**  $f(x, y) = e^x$ ;  $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + 2y^2 \leq 1\}$

**1.3.**  $f(x, y) = x^2 + y$ ;  $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$

**1.4.**  $f(x, y) = x$ ;  $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; 2 \geq x \geq 0, 1 \geq y \geq 0, 2x + y \leq 2\}$

**1.5.**  $f(x, y, z) = (x + y)^2 + (x - y)^2 + z$ ;  $M = [-1; 1] \times [-1; 1] \times [-1; 1]$

**1.6.**  $f(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ ,  $a > 0, b > 0$ ;  $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$

**1.7.**  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$ ;  $M = \mathbf{R}^3$

**1.8.**  $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$ ;  $M = \mathbf{R}^2$

**1.9.**  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ;  $M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ ;  $a > b > c > 0$

**1.10.**  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + 4y^2 = 1\}$

**1.11.** Určete rozměry vodní nádrže ve tvaru kvádrů o objemu  $32m^3$  tak, aby dno a stěny měly dohromady nejmenší povrch.

**1.12.**  $f(x, y, z) = 50x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$ ;  $M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; 80x + 12y + 10z = 24000, x > 0, y > 0, z > 0\}$

**1.13.**  $f(x, y) = (x + y)e^{-2x - 3y}$ ;  $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x \geq 0, y \geq 0\}$

### Úlohy na větu o Lagrangeových multiplikatorech

Řešte následující úlohy na absolutní extrémy funkcí.

**2.1.**  $f(x, y, z) = xyz$ ;  $M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

**2.2.**  $f(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z$ ;  $M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x + y + z = \frac{\pi}{2}, x > 0, y > 0, z > 0\}$

**2.3.**  $f(x, y, z) = xy^2z^3$ ;  $M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x + 2y + 3z = a, x > 0, y > 0, z > 0\}$ ; kde  $a > 0$

**2.4.**  $f(x, y) = x + y$ ;  $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \geq 0, y \geq 0\}$

**2.5.**  $f(x, y) = y$ ;  $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0\}$

**2.6.**  $f(x, y) = x^2 + y$ ;  $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; 4y^3 - 4y + x^2 = 0, y \geq 0\}$

**2.7.**  $f(x, y) = x^4y$ ;  $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^4 + y^4 \leq 16, x \geq -1\}$

**2.8.**  $f(x, y) = 2x + 4y$ ;  $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$

**2.9.**  $f(x, y, z) = e^{-z^2}(x^2 + xy + y^2)$ ;  $M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$

**2.10.**  $f(x, y) = -y^2 + x^2 + \frac{4}{3}x^3$ ;  $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}$

**2.11.**  $f(x, y, z) = xy + yz$ ;  $M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 1\}$

**2.12.**  $f(x, y) = (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2 + y^2)}$ ;  $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + 4y^2 \leq 1\}$

**2.13.**  $f(x, y, z) = z + e^{xy}$ ;  $M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = z^2\}$

**2.14.**  $f(x, y, z) = x^2 + 2xz + y^2 + z$ ;  $M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = y^2 + z^2\}$

**2.15.**  $f(x, y) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$ ;  $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$

## Výsledky

- 1.1.** Maximum:  $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ , minimum:  $[-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$ .
- 1.2.** Maximum:  $[1, 0]$ , minimum:  $[-1, 0]$ .
- 1.3.** Maximum:  $[0, 1]$ ,  $[1, 0]$ , minimum:  $[0, 0]$ .
- 1.4.** Maximum:  $[1, 0]$ , minimum:  $[0, t]$ ,  $t \in \langle 0, 1 \rangle$
- 1.5.** Maximum:  $[1, 1, 1]$ ,  $[1, -1, 1]$ ,  $[-1, 1, 1]$ ,  $[-1, -1, 1]$ ; minimum:  $[0, 0, -1]$ .
- 1.6.** Maximum:  $[a/\sqrt{a^2 + b^2}, b/\sqrt{a^2 + b^2}]$ ;  
minimum:  $[-a/\sqrt{a^2 + b^2}, -b/\sqrt{a^2 + b^2}]$ .
- 1.7.** Maxima se nenabývá; minimum:  $[-1, -2, 3]$ .
- 1.8.** Maximum se nabývá v každém bodě jednotkové kružnice; minimum:  $[0, 0]$ .
- 1.9.** Maximum:  $[a, 0, 0]$ ,  $[-a, 0, 0]$ ; minimum:  $[0, 0, 0]$ .
- 1.10.** Maximum:  $[1, 0]$ ,  $[-1, 0]$ ; minimum:  $[0, 0]$ .
- 1.11.** Dno nádrže bude čtverec  $4m \times 4m$  a hloubka nádrže bude  $2m$ .
- 1.12.** Maximum:  $[150, 500, 600]$ ; minima se nenabývá.
- 1.13.** Maximum:  $[1/2, 0]$ ; minimum:  $[0, 0]$ .

**2.1.** Maximum:  $[1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$ ,  $[1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]$ ,  
 $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]$ ,  $[-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$ ;  
minimum:  $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$ ,  $[1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$ ,  
 $[1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]$ ,  $[-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]$ .

**2.2.** Maximum:  $[\pi/6, \pi/6, \pi/6]$ ; minima se nenabývá.

**2.3.** Maximum:  $[a/6, a/6, a/6]$ ; minima se nenabývá.

**2.4.** Maximum:  $[1, 1]$ , minimum:  $[0, 0]$ .

**2.5.** Maximum:  $[\sqrt{3}/2, 1/2]$ ,  $[-\sqrt{3}/2, 1/2]$ ;  
minimum:  $[\sqrt{3}/2, -1/2]$ ,  $[-\sqrt{3}/2, -1/2]$ .

**2.6.** Maximum:  $\left[ \sqrt{7\sqrt{5/12}/3}, \sqrt{5/12} \right]$ ,  $\left[ -\sqrt{7\sqrt{5/12}/3}, \sqrt{5/12} \right]$ ; minimum:  
 $[0, 0]$ .

**2.7.** Množina  $M$  je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce  $f$  je spojitá na  $M$ , takže na  $M$  nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce  $f$  a zkoumejme, zda uvnitř množin  $M$  existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce  $f$  nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^4, \quad [x, y] \in \mathbf{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou nulové pro  $[0, y]$ ;  $y \in (-2, 2)$ . Hranici množiny  $M$  si rozdělme na dvě části:

$$H_1 = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^4 + y^4 = 16, x > -1\},$$
$$H_2 = \{[-1, y] \in \mathbf{R}^2; y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15} \rangle\}.$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině  $H_1$  použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí  $g(x, y) = x^4 + y^4 - 16$ , která je (stejně jako  $f$ ) třídy  $C^1(\mathbf{R}^2)$ . Pro parciální derivace funkce  $g$  platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 4x^3, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 4y^3, \quad [x, y] \in \mathbf{R}^2.$$

Pro každé  $[x, y] \in H_1$  platí  $(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)) \neq (0, 0)$ . Řešme následující soustavu

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^4 + y^4 = 16, \\ (2) \quad & 4x^3y = \lambda 4x^3, \\ (3) \quad & x^4 = \lambda 4y^3. \end{aligned}$$

Z (2) vyplývá, že  $x = 0$  nebo  $y = \lambda$ . V prvním případě dostaneme z (1), že  $y = \pm 2$ . V druhém případě dostaneme z (3), že  $x = \sqrt[4]{2}y$  nebo  $x = -\sqrt[4]{2}y$ . Dosazením do (1) obdržíme body

$$\left[ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}} \right], \left[ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}} \right], \left[ -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}} \right], \left[ -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}} \right],$$

Poslední dva body ovšem nesplňují podmínku  $x > -1$ .

Zkoumejme chování na množině  $H_2$ . Funkce  $f$  má na  $H_2$  tvar:

$$f(-1, y) = y, \quad y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15} \rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou

$$[-1, \sqrt[4]{15}], \quad [-1, -\sqrt[4]{15}]$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že  $f$  nabývá maxima na množině  $M$  v bodě  $\left[ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}} \right]$  a minima v bodě  $\left[ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}} \right]$ .

**2.8.** Množina  $M$  je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce  $f$  je spojitá na  $M$ , takže na  $M$  nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce  $f$  a zkoumejme, zda uvnitř množiny  $M$  existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce  $f$  nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4, \quad [x, y] \in \mathbf{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou vždy nenulové a proto  $f$  nabývá extrémů na hranici  $M$ . Hranici množiny  $M$  si rozdělme na tři části:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1, x > 0, y > 0\}, \\ H_2 &= \{[0, y] \in \mathbf{R}^2; y \in \langle 0, 1 \rangle\}, \\ H_3 &= \{[x, 0] \in \mathbf{R}^2; x \in \langle 0, 1 \rangle\}. \end{aligned}$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině  $H_1$  použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí  $g(x, y) = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} - 1$ , která

je (stejně jako  $f$ ) třídy  $C^1$  na prvním otevřeném kvadrantu. Pro parciální derivace funkce  $g$  platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{4}x^{-3/4}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{4}y^{-3/4}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

Pro každé  $[x, y] \in H_1$  platí  $(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)) \neq (0, 0)$ . Řešme následující soustavu

$$\begin{aligned} (1) \quad & \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1, \\ (2) \quad & 2 = \lambda \frac{1}{4}x^{-3/4}, \\ (3) \quad & 4 = \lambda \frac{1}{4}y^{-3/4}. \end{aligned}$$

Z (2) a (3) vyplývá, že  $x = 2\sqrt[3]{2}y$ . Dosazením do (1) obdržíme podezřelý bod

$$\left[ \frac{2^{4/3}}{(2^{1/3} + 1)^4}, \frac{1}{(2^{1/3} + 1)^4} \right].$$

Zkoumejme chování na množině  $H_2$ . Funkce  $f$  má na  $H_2$  tvar:

$$f(0, y) = 4y, \quad y \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou  $[0, 0]$ ,  $[0, 1]$ .

Podobně zkoumejme chování na množině  $H_3$ . Funkce  $f$  má na  $H_3$  tvar:

$$f(x, 0) = 2x, \quad x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Podezřelými body tedy jsou  $[0, 0]$ ,  $[1, 0]$ .

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že  $f$  nabývá maxima na množině  $M$  v bodě  $[0, 1]$  a minima v bodě  $[0, 0]$ .

**2.9.** Množina  $M$  je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní (jedná se o plášť válce bez podstav). Funkce  $f$  je spojitá na  $M$ , takže na  $M$  nabývá svého maxima i minima. Vnitřek množiny  $M$  je prázdný. Z tvaru funkce  $f$  vyplývá, že

$$f(x, y, 1) = f(x, y, -1) < f(x, y, z) < f(x, y, 0), \quad [x, y, z] \in \mathbf{R}^3, \quad z \in (-1, 1) \setminus \{0\}.$$

Maxima se musí tedy nabývat na množině  $M \cap \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; z = 0\}$  a minima na množině  $M \cap \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3; z = -1 \text{ nebo } z = 1\}$ . Položme  $g(x, y) = x^2 + xy + y^2$  a vyšetřujme extrémů  $g$  na množině  $H = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$  metodou Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí  $h(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . Platí  $g, h \in C^1(\mathbf{R}^2)$ . Pro parciální derivace funkce  $h$  platí

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Pro každé  $[x, y] \in H$  máme  $(\frac{\partial h}{\partial x}(x, y), \frac{\partial h}{\partial y}(x, y)) \neq (0, 0)$ . Řešme následující soustavu

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^2 + y^2 = 1, \\ (2) \quad & 2x + y = \lambda 2x, \\ (3) \quad & x + 2y = \lambda 2y. \end{aligned}$$

Sečtením (2) a (3) dostaneme

$$(3 - 2\lambda)(x + y) = 0.$$

To znamená, že buď  $x = -y$  nebo  $\lambda = 3/2$ . V prvním případě dostaneme z (1) podezřelé body

$$[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}], [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}].$$

Ve druhém případě s pomocí (2) odvodíme  $x = y$  a (1) dává podezřelé body

$$[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}], [-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}].$$

Funkce  $g$  nabývá minima na množině  $H$  v bodech  $[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$ ,  $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$  a maxima v bodech  $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ ,  $[-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$ .

Z výše uvedeného výpočtu vyplývá, že funkce  $f$  nabývá minima v bodech

$$[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -1], [1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, -1], [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1], [1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1]$$

a maxima v bodech

$$[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0], [-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0].$$

**2.10.** Množina  $M$  je omezená a uzavřená (jedná se o průnik uzavřeného kruhu s uzavřenou polorovinou), a proto je kompaktní. Funkce  $f$  je spojitá na  $M$ , takže na  $M$  nabývá svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body nejprve uvnitř množiny  $M$ . Spočteme parciální derivace  $f$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 4x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y.$$

Obě parciální derivace jsou nulové v bodech  $[-1/2, 0]$ ,  $[0, 0]$ . Pouze první bod však patří do vnitřku množiny  $M$ .

Hranici množiny  $M$  si rozdělíme na dvě části:

$$H_1 = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x = 0, y \in [-2, 2]\},$$
$$H_2 = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 = 4, x < 0\}.$$

Na množině  $H_1$  má funkce  $f$  podezřelé body:  $[0, 2]$ ,  $[0, -2]$ ,  $[0, 0]$ , protože  $f(0, y) = -y^2$ . Podezřelé body na  $H_2$  budeme hledat metodou Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ . Funkce  $f$  i  $g$  jsou třídy  $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$ . Na množině  $H_2$  je vždy  $(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}) \neq (0, 0)$ . Řešme následující soustavu

$$(1) \quad x^2 + y^2 = 4,$$
$$(2) \quad 2x + 4x^2 = \lambda 2x,$$
$$(3) \quad -2y = \lambda 2y.$$

Z (3) dostaneme, že  $\lambda = -1$  nebo  $y = 0$ . První možnost spolu s (2) dává, že  $x = 0$  nebo  $x = -1$ . Pomocí (1) dopočteme pro tato  $x$  příslušná  $y$  a dostaneme body

$$[0, 2], [0, -2], [-1, \sqrt{3}], [-1, -\sqrt{3}].$$

První dva ovšem neleží v  $H_2$ . Pokud  $y = 0$ , pak z (1) dostáváme bod  $[-2, 0]$  a bod  $[2, 0]$ , který ovšem neleží v  $H_2$ .

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že  $f$  nabývá maxima v bodě  $[-1/2, 0]$  a minima v bodě  $[-2, 0]$ .

**2.11.** Množina  $M$  je omezená a uzavřená (jedná se o průnik sféry a roviny), a proto je kompaktní. Funkce  $f$  je spojitá na  $M$ , takže na  $M$  nabývá svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina  $M$  je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) = x + y + z - 1.$$

Obě funkce  $g_1, g_2$  jsou třídy  $C^1(\mathbf{R}^2)$  stejně jako funkce  $f$ . Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y, & \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y, z) = 2x, & \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y, z) = 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x + z, & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y, z) = 2y, & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y, z) = 1, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = y, & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y, z) = 2z, & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y, z) = 1. \end{array}$$

Vektory  $(2x, 2y, 2z), (1, 1, 1)$  jsou lineárně závislé, právě když  $x = y = z$ . Žádný takový bod ovšem neleží v množině  $M$ . Nyní budeme řešit následující soustavu

$$\begin{array}{ll} (1) & y = \lambda_1 2x + \lambda_2, \\ (2) & x + z = \lambda_1 2y + \lambda_2, \\ (3) & y = \lambda_1 2z + \lambda_2, \\ (4) & x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ (5) & x + y + z = 1. \end{array}$$

Z (1) a (3) vyplývá  $\lambda_1 x = \lambda_1 z$ . To znamená, že máme dvě možnosti: buď  $\lambda_1 = 0$  nebo  $x = z$ .

V prvním případě dostaneme nejprve z (1)  $y = \lambda_2$ . Odtud a z (2) obdržíme  $x + z = y$ . Tento vztah spolu s (4) a (5) dává podezřelé body

$$\left[ (1 - \sqrt{5})/4, 1/2, (1 + \sqrt{5})/4 \right], \quad \left[ (1 + \sqrt{5})/4, 1/2, (1 - \sqrt{5})/4 \right].$$

Ve druhém případě dostaneme pomocí vztahů (4) a (5) podezřelé body

$$[0, 1, 0], \quad [2/3, -1/3, 2/3].$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že funkce  $f$  nabývá na množině  $M$  minima v bodě  $[2/3, -1/3, 2/3]$  a maxima nabývá v prvních dvou podezřelých bodech.

**2.12.** Množina  $M$  je omezená a uzavřená (jedná se o elipsu), a proto je kompaktní. Funkce  $f$  je spojitá na  $M$ , takže na  $M$  nabývá svého maxima i minima.

Hledejme nejprve podezřelé body uvnitř množiny  $M$ . Pro parciální derivace funkce  $f$  platí:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-4x), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 14y \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-2y).\end{aligned}$$

Uvnitř množiny  $M$  hledáme ty body, kde jsou obě parciální derivace nulové. To jsou právě ty body z  $M$ , které splňují

$$\begin{aligned}2x(1 - 2(x^2 + 7y^2)) &= 0, \\ 2y(7 - (x^2 + 7y^2)) &= 0.\end{aligned}$$

Řešením této soustavy jsou body  $[0, 0]$ ,  $[1/\sqrt{2}, 0]$ ,  $[-1/\sqrt{2}, 0]$ ,  $[0, 1]$ ,  $[0, -1]$ , pouze první tři však leží uvnitř množiny  $M$ .

Podezřelé body na hranici  $M$  hledáme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina  $H(M)$  je určena pomocí vazebné funkce

$$g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 1.$$

Funkce  $f$  i  $g$  jsou třídy  $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$ . Pro parciální derivace  $g$  platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 8y.$$

Vektor  $(2x, 8y)$  je nulový, právě když  $[x, y] = [0, 0]$ . Tento bod ovšem neleží na hranici množiny  $M$ . Nyní budeme řešit následující soustavu

$$\begin{aligned}(1) \quad & 2x \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-4x) = 2\lambda x, \\ (2) \quad & 14y \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-2y) = 8\lambda y, \\ (3) \quad & x^2 + 4y^2 = 1.\end{aligned}$$

Z (1) vyplývá, že  $x = 0$  nebo  $e^{-(2x^2+y^2)}(1 - 2(x^2 + 7y^2)) = \lambda$  a z (2) vyplývá, že  $y = 0$  nebo  $e^{-(2x^2+y^2)}(7 - (x^2 + 7y^2)) = 4\lambda$ . Pokud  $x = 0$ , pak podle (3) je  $y = \pm 1/2$ . Pokud  $y = 0$ , pak podle (3) je  $x = \pm 1$ . V případě, že  $x \neq 0$  a  $y \neq 0$ , musí být

$$4e^{-(2x^2+y^2)}(1 - 2(x^2 + 7y^2)) = e^{-(2x^2+y^2)}(7 - (x^2 + 7y^2)).$$

Odtud plyne  $7(x^2 + 7y^2) = -3$ , což je spor.

Nalezli jsme tyto podezřelé body

$$[0, 0], [1/\sqrt{2}, 0], [-1/\sqrt{2}, 0], [0, 1/2], [0, -1/2], [1, 0], [-1, 0].$$

Funkce  $f$  nabývá maxima v bodech  $[0, 1/2]$ ,  $[0, -1/2]$  a minima v bodě  $[0, 0]$ .

**2.13.** Množina  $M$  je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce  $f$  je spojitá na  $M$ , takže na  $M$  nabývá svého maxima i minima. Množina  $M$  má prázdný vnitřek.

Podezřelé body hledejme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina  $M$  je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

Funkce  $f$ ,  $g_1$  i  $g_2$  jsou třídy  $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^3)$ . Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= e^{xy}y, & \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y, z) &= 2x, & \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y, z) &= 2x, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= e^{xy}x, & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y, z) &= 2y, & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y, z) &= 2y, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= 1, & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y, z) &= 2z, & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y, z) &= -2z. \end{aligned}$$

Vektory  $(2x, 2y, 2z)$ ,  $(2x, 2y, -2z)$  jsou lineárně závislé, právě když  $z = 0$  nebo  $x = y = 0$ . Žádný takový bod neleží v množině  $M$ . Nyní budeme řešit následující soustavu

$$\begin{aligned} (1) \quad & e^{xy}y = \lambda_1 2x + \lambda_2 2x, \\ (2) \quad & e^{xy}x = \lambda_1 2y + \lambda_2 2y, \\ (3) \quad & 1 = \lambda_1 2z - \lambda_2 2z, \\ (4) \quad & x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ (5) \quad & x^2 + y^2 - z^2 = 0. \end{aligned}$$

Z (4) a (5) vyplývá, že  $z = \pm 1/\sqrt{2}$ . Odečteme-li (1) od (2) dostaneme

$$e^{xy}(x - y) = -2(\lambda_1 + \lambda_2)(x - y).$$

Z poslední rovnice plyne, že buď  $x = y$  nebo  $e^{xy} = -2(\lambda_1 + \lambda_2)$ . V prvním případě dopočítáme ze (4) tyto podezřelé body

$$[1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], [1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}], [-1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}], [-1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Ve druhém případě dosadíme za  $e^{xy}$  do (1) a dostaneme

$$-2y(\lambda_1 + \lambda_2) = 2x(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Nyní máme opět dvě možnosti: buď  $x = -y$  nebo  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ . První možnost dává podezřelé body

$$[1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}], [1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}], [-1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], [-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Druhá možnost spolu s (1) a (2) dává  $x = y = 0$ . Toto však nemůže nastat vzhledem ke (4) a (5).

Funkce  $f$  nabývá maxima v bodech

$$[1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}], \quad [-1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}]$$



a minima

$$[-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}], \quad [1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}].$$

#### 2.14. Položme

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \quad g_2(x, y, z) = x - y^2 - z^2.$$

Obě funkce jsou spojité a proto je množina  $M$  uzavřená. Množina  $M$  je obsažena v jednotkové kouli o středu v počátku - je tedy omezená. Z charakterizace kompaktních podmnožin  $\mathbf{R}^n$  vyplývá, že  $M$  je kompaktní. Funkce  $f$  je spojitá a proto nabývá na  $M$  svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Vidíme, že  $f, g_1, g_2 \in C^1(\mathbf{R}^3)$ .

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2z & \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) = 2x & \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) = 2y & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) = -2y \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y) = 2x + 1 & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y) = 2z & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y) = -2z \end{array}$$

Zkoumejme pro která  $[x, y, z] \in M$  jsou vektory  $(2x, 2y, 2z)$ ,  $(1, -2y, -2z)$  lineárně závislé. Jde tedy o to zjistit, kdy je hodnost následující matice menší než 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2y & -2z \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

Třetí řádkovou elementární úpravou dostaneme

$$\begin{pmatrix} 1 & -2y & -2z \\ 2x + 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnost této matice je menší než 2, právě když  $x = -\frac{1}{2}$  nebo  $y = z = 0$ . Není obtížné dosazením zjistit, že body splňující některou z těchto podmínek nemohou ležet v  $M$ .

Nyní řešme soustavu:

$$\begin{array}{ll} (1) & x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ (2) & x = y^2 + z^2 \\ (3) & 2x + 2z = 2\lambda_1 x + \lambda_2 \\ (4) & 2y = 2\lambda_1 y - 2\lambda_2 y \\ (5) & 2x + 1 = 2\lambda_1 z - 2\lambda_2 z \end{array}$$

Z (1) a (2) vyplývá  $x^2 + x - 1 = 0$ , tj.  $x = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$ . Vzhledem k (2) musí být  $x$  nezáporné a proto nás zajímá pouze kladný kořen kvadratické rovnice, tj.

$$(6) \quad x = (\sqrt{5} - 1)/2.$$

Z (4) vyplývá, že buď  $y = 0$  nebo  $\lambda_1 - \lambda_2 = 1$ . V prvním případě vypočteme z (2) a (6), že  $z = \pm\sqrt{(\sqrt{5}-1)/2}$ . Odtud dostáváme podezřelé body

$$\left[ (\sqrt{5}-1)/2, 0, \sqrt{(\sqrt{5}-1)/2} \right], \quad \left[ (\sqrt{5}-1)/2, 0, -\sqrt{(\sqrt{5}-1)/2} \right].$$

Ve druhém případě plyne z (5)  $x + \frac{1}{2} = z$ . Takže  $z = \sqrt{5}/2$ . Z (2) plyne  $y^2 = x - z^2$ . Po dosazení máme  $y^2 = (2\sqrt{5} - 7)/4 < 0$  – což není možné.

Dosazením zjistíme, že funkce  $f$  nabývá na  $M$  svého maxima v prvním podezřelém bodě a minima ve druhém.

**2.15.** Množina  $M$  je uzavřená a omezená (jedná se o průnik uzavřeného kruhu a uzavřeného prvního kvadrantu) – je tedy kompaktní. Funkce  $f$  je spojitá na celém  $\mathbf{R}^2$  a proto musí nabývat maxima i minima na množině  $M$ . Zkoumejme chování funkce  $f$  nejprve na vnitřku množiny  $M$ .

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Uvnitř množiny  $M$  jsou obě parciální derivace funkce  $f$  nenulové, proto uvnitř  $M$  není žádný podezřelý bod. Hranici množiny  $M$  rozdělme na tři části:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{[x, 0]; x \in \langle 0, 1 \rangle\}, \\ H_2 &= \{[0, y]; y \in \langle 0, 1 \rangle\}, \\ H_3 &= \{[x, y]; x > 0, y > 0, x^2 + y^2 = 1\}. \end{aligned}$$

Je-li  $[x, y] \in H_1$ , platí  $f(x, y) = \arctg x$ . Funkce  $\arctg$  je rostoucí a proto podezřelými body jsou  $[0, 0]$  a  $[1, 0]$ . Podobně je tomu na množině  $H_2$ . Tam dostáváme podezřelé body  $[0, 0]$  a  $[0, 1]$ . Na  $H_3$  použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Nechtě  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ . Vidíme, že  $f, g \in C^1(\mathbf{R}^2)$ . Pro parciální derivace  $g$  platí:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y.$$

Vektor  $(2x, 2y)$  je nulový, právě když  $[x, y] = [0, 0]$  – tento bod ovšem neleží v  $H_3$ . Nyní je třeba vyřešit následující soustavu

$$\begin{aligned} (1) \quad & x^2 + y^2 = 1 \\ (2) \quad & \frac{1}{1+x^2} = \lambda 2x \\ (3) \quad & \frac{1}{1+y^2} = \lambda 2y \end{aligned}$$

Z (2) a (3) vyplývá

$$(4) \quad \lambda 2x(1+x^2) = \lambda 2y(1+y^2).$$

Z (2) vyplývá, že  $\lambda \neq 0$ . Proto můžeme (4) upravit na tvar

$$x - y = -(x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

Platí tedy buď  $x = y$  nebo  $-1 = x^2 + xy + y^2$ . Druhá možnost však nastat nemůže, neboť prvky z  $H_3$  mají obě souřadnice kladné. První možnost spolu s (1) dává další podezřelý bod  $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ .

Nalezli jsme tyto podezřelé body:

$$[0, 0], \quad [0, 1], \quad [1, 0], \quad [1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}].$$

Porovnáním funkčních hodnot funkce  $f$  v uvedených bodech (provedte podrobně) zjistíme, že  $f$  nabývá svého minima v bodě  $[0, 0]$  a maxima v bodě  $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ .