Matematika 2

LS 2016-17

Miroslav Zelený

5. Funkce více proměnných
6. Maticový počet
7. Číselné řady
8. Integrál

5. Funkce více proměnných

5.1. $\mathbf{R}^n$ jako metrický a lineární prostor

Definice

Množinou $\mathbf{R}^n$, $n \in \mathbf{N}$, rozumíme množinu všech uspořádaných n-tic reálných čísel.

5.1. $\mathbf{R}^n$ jako metrický a lineární prostor

Definice

Množinou $\mathbf{R}^n$, $n \in \mathbf{N}$, rozumíme množinu všech uspořádaných n-tic reálných čísel.

Definice

Euklidovskou metrikou (vzdáleností) na $\mathbf{R}^n$ rozumíme funkci $\rho\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \langle 0, +\infty)$ definovanou předpisem

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Číslo $\rho(x, y)$ nazýváme **vzdáleností bodu x od bodu y.**

Věta 5.1 (vlastnosti euklidovské metriky)

Euklidovská metrika ρ má následující vlastnosti:

(i) $\forall x, y \in \mathbf{R}^n\colon \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

Věta 5.1 (vlastnosti euklidovské metriky)

Euklidovská metrika ρ má následující vlastnosti:

(i) $\forall x, y \in \mathbf{R}^n\colon \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(ii) $\forall x, y \in \mathbf{R}^n\colon \rho(x,y) = \rho(y,x)$,

Věta 5.1 (vlastnosti euklidovské metriky)

Euklidovská metrika ρ *má následující vlastnosti:*

(i) $\forall x, y \in \mathbf{R}^n\colon \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(ii) $\forall x, y \in \mathbf{R}^n\colon \rho(x, y) = \rho(y, x)$,

(iii) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}^n\colon \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ *(trojúhelníková nerovnost),*

Věta 5.1 (vlastnosti euklidovské metriky)

Euklidovská metrika ρ má následující vlastnosti:

(i) $\forall x, y \in \mathbf{R}^n\colon \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(ii) $\forall x, y \in \mathbf{R}^n\colon \rho(x,y) = \rho(y,x)$,

(iii) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}^n\colon \rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ *(trojúhelníková nerovnost),*

(iv) $\forall x, y \in \mathbf{R}^n\, \forall \lambda \in \mathbf{R}\colon \rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\rho(x,y)$,

Věta 5.1 (vlastnosti euklidovské metriky)

Euklidovská metrika ρ má následující vlastnosti:

(i) $\forall x, y \in \mathbf{R}^n\colon \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

(ii) $\forall x, y \in \mathbf{R}^n\colon \rho(x, y) = \rho(y, x)$,

(iii) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}^n\colon \rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$ *(trojúhelníková nerovnost)*,

(iv) $\forall x, y \in \mathbf{R}^n \, \forall \lambda \in \mathbf{R}\colon \rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x, y)$,

(v) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}^n\colon \rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$.

Definice

Nechť $x \in \mathbf{R}^n$, $r > 0$. Množinu $B(x,r)$ definovanou předpisem

$$B(x,r) = \{y \in \mathbf{R}^n; \rho(x,y) < r\}$$

nazýváme **otevřenou koulí o poloměru** r **a středu** x nebo také **okolím bodu** x.

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$, $x \in \mathbf{R}^n$. Řekneme, že $x \in \mathbf{R}^n$ je **vnitřním bodem množiny** M, jestliže existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset M$.

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$, $x \in \mathbf{R}^n$. Řekneme, že $x \in \mathbf{R}^n$ je **vnitřním bodem množiny** M, jestliže existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset M$.

Definice

Množina $M \subset \mathbf{R}^n$ se nazývá **otevřená v** $\mathbf{R}^n$, jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem. Doplňky otevřených množin (tj. množiny tvaru $\mathbf{R}^n \setminus G$, kde G je otevřená množina) nazýváme **uzavřenými množinami v** $\mathbf{R}^n$.

Věta 5.2 (vlastnosti otevřených množin)

(i) *Prázdná množina a celý prostor* $\mathbf{R}^n$ *jsou otevřené v* $\mathbf{R}^n$*.*

Věta 5.2 (vlastnosti otevřených množin)

(i) *Prázdná množina a celý prostor* $\mathbf{R}^n$ *jsou otevřené v* $\mathbf{R}^n$.

(ii) *Nechť množiny* $G_\alpha \subset \mathbf{R}^n$, $\alpha \in A$, *jsou otevřené v* $\mathbf{R}^n$. *Pak* $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ *je otevřená množina v* $\mathbf{R}^n$.

Věta 5.2 (vlastnosti otevřených množin)

(i) *Prázdná množina a celý prostor* $\mathbf{R}^n$ *jsou otevřené v* $\mathbf{R}^n$.

(ii) *Nechť množiny* $G_\alpha \subset \mathbf{R}^n$, $\alpha \in A$, *jsou otevřené v* $\mathbf{R}^n$. *Pak* $\bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha$ *je otevřená množina v* $\mathbf{R}^n$.

(iii) *Nechť množiny* G_i, $i = 1, \ldots, m$, *jsou otevřené. Pak* $\bigcap_{i=1}^m G_i$ *je otevřená množina v* $\mathbf{R}^n$.

Věta 5.3 (vlastnosti uzavřených množin)

(i) *Prázdná množina a celý prostor* $\mathbf{R}^n$ *jsou uzavřené v* $\mathbf{R}^n$.

Věta 5.3 (vlastnosti uzavřených množin)

(i) *Prázdná množina a celý prostor* $\mathbf{R}^n$ *jsou uzavřené v* $\mathbf{R}^n$*.*

(ii) *Nechť množiny* $F_\alpha \subset \mathbf{R}^n,\ \alpha \in A, A \neq \emptyset$*, jsou uzavřené v* $\mathbf{R}^n$. *Pak* $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ *je uzavřená množina v* $\mathbf{R}^n$*.*

Věta 5.3 (vlastnosti uzavřených množin)

(i) *Prázdná množina a celý prostor* $\mathbf{R}^n$ *jsou uzavřené v* $\mathbf{R}^n$.

(ii) *Nechť množiny* $F_\alpha \subset \mathbf{R}^n,\ \alpha \in A, A \neq \emptyset$, *jsou uzavřené v* $\mathbf{R}^n$. *Pak* $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$ *je uzavřená množina v* $\mathbf{R}^n$.

(iii) *Nechť množiny* $F_i,\ i = 1, \dots, m$, *jsou uzavřené. Pak* $\bigcup_{i=1}^m F_i$ *je uzavřená množina v* $\mathbf{R}^n$.

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ a $x \in \mathbf{R}^n$. Řekneme, že x je **hraničním bodem množiny** M, pokud pro každé $r > 0$ platí $B(x, r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x, r) \cap (\mathbf{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$.

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ a $x \in \mathbf{R}^n$. Řekneme, že x je **hraničním bodem množiny** M, pokud pro každé $r > 0$ platí $B(x, r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x, r) \cap (\mathbf{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$. **Hranicí množiny** M rozumíme množinu všech hraničních bodů M.

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ a $x \in \mathbf{R}^n$. Řekneme, že x je **hraničním bodem množiny** M, pokud pro každé $r > 0$ platí $B(x,r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x,r) \cap (\mathbf{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$. **Hranicí množiny** M rozumíme množinu všech hraničních bodů M. Značíme ji $H(M)$.

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$. **Vnitřkem** množiny M rozumíme množinu všech vnitřních bodů množiny M.

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$. **Vnitřkem** množiny M rozumíme množinu všech vnitřních bodů množiny M. **Uzávěrem** množiny M rozumíme množinu $M \cup H(M)$.

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$. **Vnitřkem** množiny M rozumíme množinu všech vnitřních bodů množiny M. **Uzávěrem** množiny M rozumíme množinu $M \cup H(M)$. Vnitřek množiny M budeme značit $\operatorname{int} M$ a pro uzávěr množiny M vyhradíme symbol $\overline{M}$.

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$. **Vnitřkem** množiny M rozumíme množinu všech vnitřních bodů množiny M. **Uzávěrem** množiny M rozumíme množinu $M \cup H(M)$. Vnitřek množiny M budeme značit $\operatorname{int} M$ a pro uzávěr množiny M vyhradíme symbol $\overline{M}$.

Definice

Řekneme, že množina M je **omezená v $\mathbf{R}^n$**, jestliže existuje $r > 0$ tak, že $M \subset B(\mathbf{o}, r)$.

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$, $x \in M$ a $f\colon M \to \mathbf{R}$. Řekneme, že f je **spojitá v bodě** x **vzhledem k** M, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\ \forall y \in B(x, \delta) \cap M\colon\ f(y) \in B(f(x), \varepsilon).$$

5.2 Spojitost funkcí z $\mathbf{R}^n$

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$, $x \in M$ a $f\colon M \to \mathbf{R}$. Řekneme, že f je **spojitá v bodě** x **vzhledem k** M, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\ \forall y \in B(x,\delta) \cap M\colon f(y) \in B(f(x),\varepsilon).$$

Definice

Nechť $x^j \in \mathbf{R}^n$ pro každé $j \in \mathbf{N}$ a $x \in \mathbf{R}^n$. Říkáme, že posloupnost $\{x^j\}_{j=1}^{\infty}$ **konverguje k** x, pokud $\lim_{j\to\infty} \rho(x, x^j) = 0$.

5.2 Spojitost funkcí z $\mathbf{R}^n$

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$, $x \in M$ a $f\colon M \to \mathbf{R}$. Řekneme, že f je **spojitá v bodě** x **vzhledem k** M, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\ \forall y \in B(x,\delta) \cap M\colon f(y) \in B(f(x), \varepsilon).$$

Definice

Nechť $x^j \in \mathbf{R}^n$ pro každé $j \in \mathbf{N}$ a $x \in \mathbf{R}^n$. Říkáme, že posloupnost $\{x^j\}_{j=1}^{\infty}$ **konverguje k** x, pokud $\lim_{j\to\infty} \rho(x, x^j) = 0$. Značíme $x^j \to x$.

5.2 Spojitost funkcí z $\mathbf{R}^n$

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$, $x \in M$ a $f\colon M \to \mathbf{R}$. Řekneme, že f je **spojitá v bodě** x **vzhledem k** M, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\ \forall y \in B(x,\delta) \cap M\colon f(y) \in B(f(x),\varepsilon).$$

Definice

Nechť $x^j \in \mathbf{R}^n$ pro každé $j \in \mathbf{N}$ a $x \in \mathbf{R}^n$. Říkáme, že posloupnost $\{x^j\}_{j=1}^{\infty}$ **konverguje k** x, pokud $\lim_{j\to\infty} \rho(x, x^j) = 0$. Značíme $x^j \to x$. Prvek x nazýváme **limitou posloupnosti** $\{x^j\}_{j=1}^{\infty}$.

Věta 5.4

Nechť $x^j \in \mathbf{R}^n$ *pro každé* $j \in \mathbf{N}$ *a* $x \in \mathbf{R}^n$*. Posloupnost* $\{x^j\}_{j=1}^{\infty}$ *konverguje k* x *právě tehdy, když posloupnost* $\{x_i^j\}_{j=1}^{\infty}$ *konverguje k* x_i *pro každé* $i \in \{1, \dots, n\}$*.*

Věta 5.5 (Heine)

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$, $x \in M$ a $f : M \to \mathbf{R}$. Pak je ekvivalentní:

(i) *f je spojitá v x vzhledem k M,*

(ii) $\lim_{j\to\infty} f(x^j) = f(x)$ *pro každou posloupnost* $\{x^j\}_{j=1}^{\infty}$ *splňující* $x^j \in M$ *pro* $j \in \mathbf{N}$ *a* $\lim_{j\to\infty} x^j = x$.

Věta 5.5 (Heine)

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$, $x \in M$ *a* $f : M \to \mathbf{R}$. *Pak je ekvivalentní:*

(i) f *je spojitá v* x *vzhledem k* M,

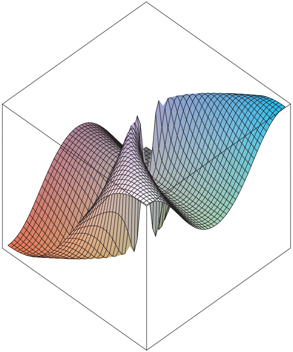
(ii) $\lim_{j\to\infty} f(x^j) = f(x)$ *pro každou posloupnost* $\{x^j\}_{j=1}^{\infty}$ *splňující* $x^j \in M$ *pro* $j \in \mathbf{N}$ *a* $\lim_{j\to\infty} x^j = x$.

Definice

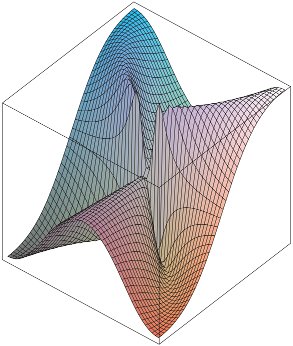
Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ a $f : M \to \mathbf{R}$. Řekneme, že f je **spojitá na** M, jestliže je spojitá v každém bodě $x \in M$ vzhledem k M.

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$



$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$



Definice

Množinu $M \subset \mathbf{R}^n$ nazýváme **kompaktní**, pokud z každé posloupnosti prvků množiny M lze vybrat konvergentní posloupnost s limitou v M.

Definice

Množinu $M \subset \mathbf{R}^n$ nazýváme **kompaktní**, pokud z každé posloupnosti prvků množiny M lze vybrat konvergentní posloupnost s limitou v M.

Lemma 5.6

Nechť $F \subset \mathbf{R}^n$ je uzavřená množina a $\{x^j\}$ je posloupnost prvků množiny F mající limitu $x \in \mathbf{R}^n$. Pak $x \in F$.

Definice

Množinu $M \subset \mathbf{R}^n$ nazýváme **kompaktní**, pokud z každé posloupnosti prvků množiny M lze vybrat konvergentní posloupnost s limitou v M.

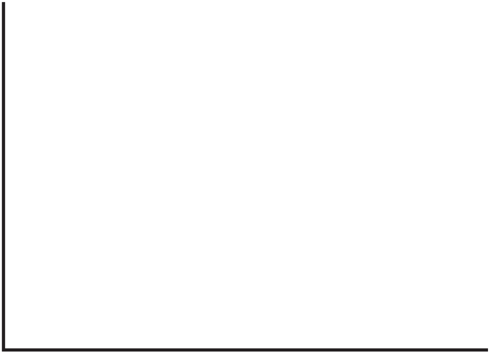
Lemma 5.6

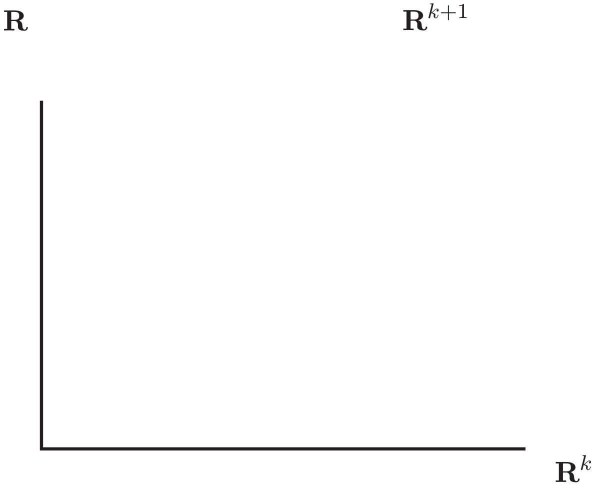
Nechť $F \subset \mathbf{R}^n$ je uzavřená množina a $\{x^j\}$ je posloupnost prvků množiny F mající limitu $x \in \mathbf{R}^n$. Pak $x \in F$.

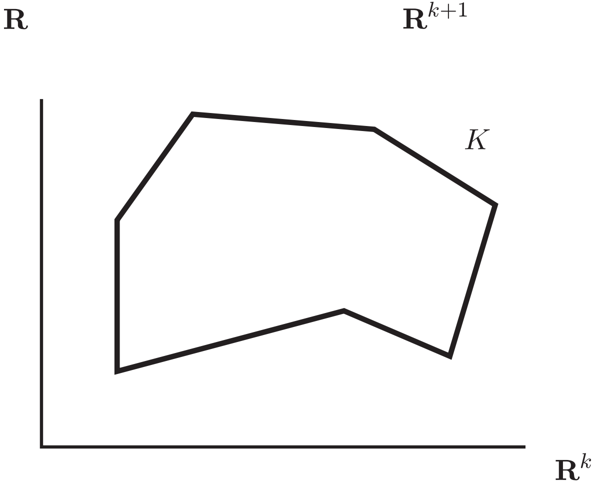
Věta 5.7 (charakterizace kompaktních množin v $\mathbf{R}^n$)

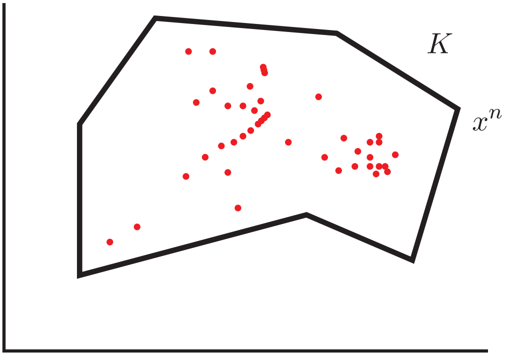
Množina $M \subset \mathbf{R}^n$ je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená.

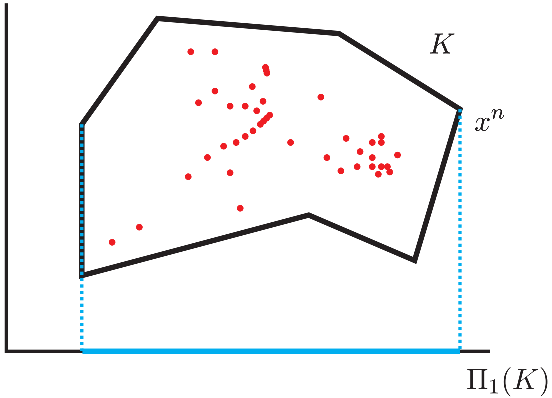
$\mathbf{R}^{k+1}$

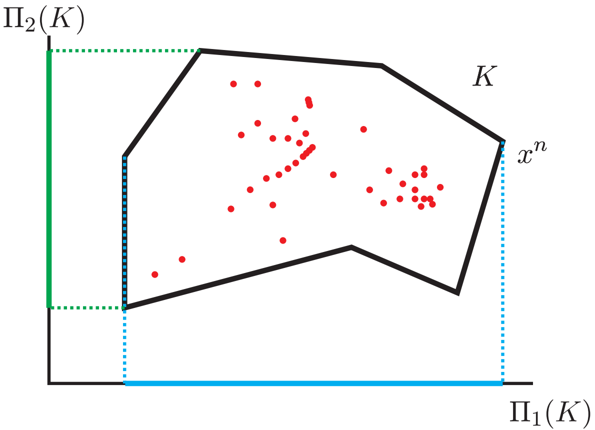


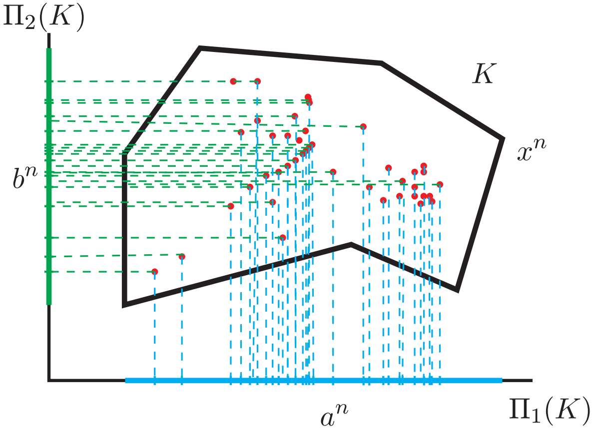

$\mathbf{R}$
$\mathbf{R}^{k+1}$
$\mathbf{R}^k$


$\mathbf{R}$
$\mathbf{R}^{k+1}$
K
$\mathbf{R}^k$

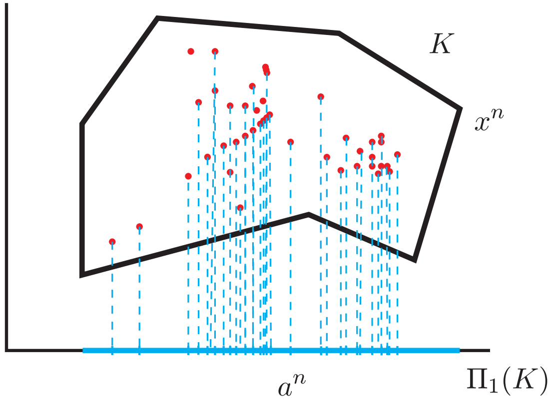

K
x^n

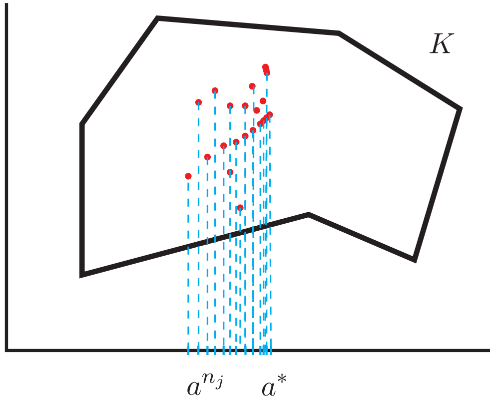

K
x^n
$\Pi_1(K)$

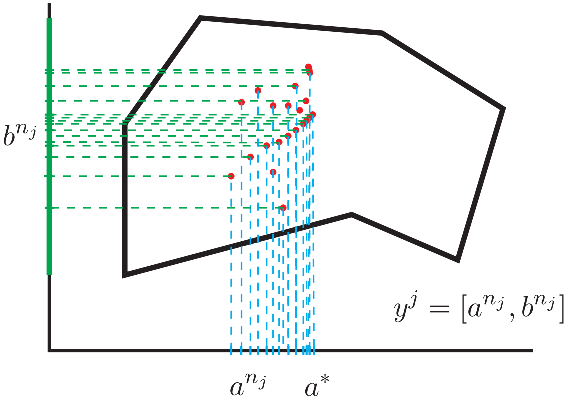

$\Pi_2(K)$
K
x^n
$\Pi_1(K)$



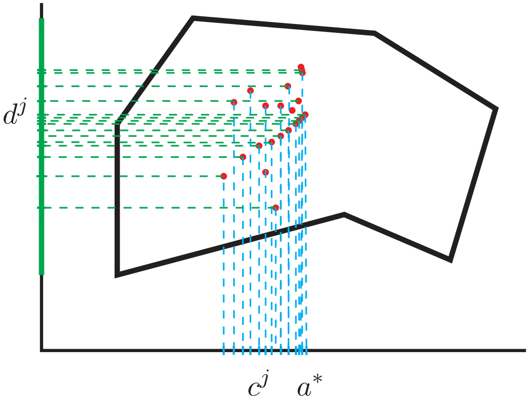
$\Pi_2(K)$
K
x^n
b^n
a^n
$\Pi_1(K)$


K
x^n
a^n
$\Pi_1(K)$

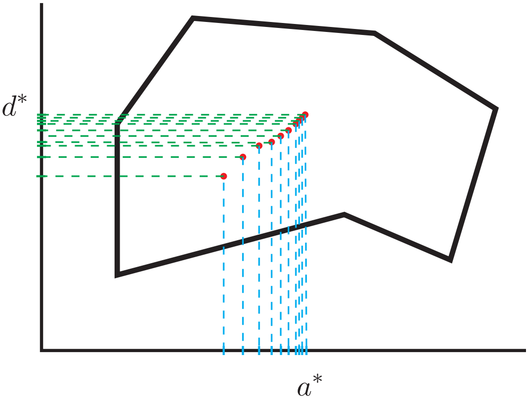

K
a^{n_j}
a^*



b^{n_j}
$y^j = [a^{n_j}, b^{n_j}]$
a^{n_j}
a^*



d^j
c^j
a^*


d^*
a^*

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$, $x \in M$ a f je funkce definovaná alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima (minima) na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M\colon f(y) \leq f(x)$$
$$\bigl(\forall y \in M\colon f(y) \geq f(x)\bigr).$$

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$, $x \in M$ a f je funkce definovaná alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima (minima) na** M, jestliže platí

$$\forall y \in M\colon f(y) \leq f(x)$$
$$\big(\forall y \in M\colon f(y) \geq f(x)\big).$$

Řekneme, že f má v bodě x **lokální maximum (lokální minimum) vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall y \in B(x, \delta) \cap M\colon f(y) \leq f(x)$$
$$\big(\forall y \in B(x, \delta) \cap M\colon f(y) \geq f(x)\big).$$

Definice

Řekneme, že f má v bodě x **ostré lokální maximum (ostré lokální minimum) vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall y \in (B(x,\delta) \setminus \{x\}) \cap M \colon f(y) < f(x)$$
$$\big(\forall y \in (B(x,\delta) \setminus \{x\}) \cap M \colon f(y) > f(x)\big).$$

Věta 5.8

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ *je neprázdná kompaktní množina a* $f\colon M \to \mathbf{R}$ *je spojitá na* M*. Pak* f *nabývá na* M *svého maxima i minima.*

Věta 5.8

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ *je neprázdná kompaktní množina a* $f: M \to \mathbf{R}$ *je spojitá na* M*. Pak* f *nabývá na* M *svého maxima i minima.*

Důsledek 5.9

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ *je neprázdná kompaktní množina a* $f: M \to \mathbf{R}$ *je spojitá na* M*. Pak* f *je omezená na* M*.*

5.3 Parciální derivace

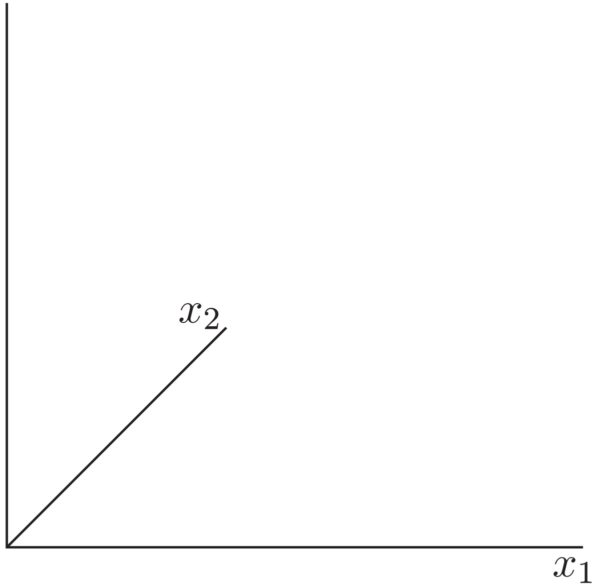
Definice

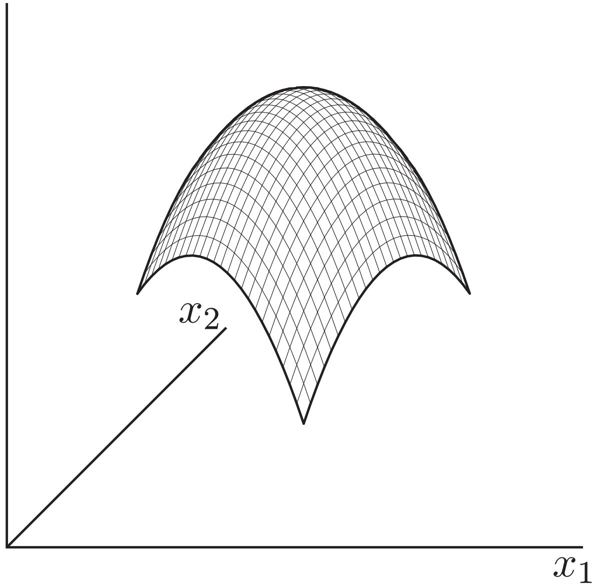
Nechť f je funkce n proměnných, $j \in \{1, \dots, n\}$ a $a \in \mathbf{R}^n$. Pak číslo

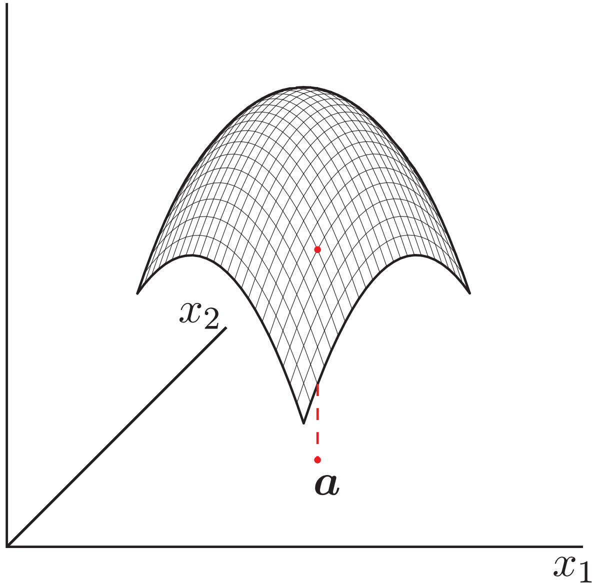
$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te^j) - f(a)}{t}$$

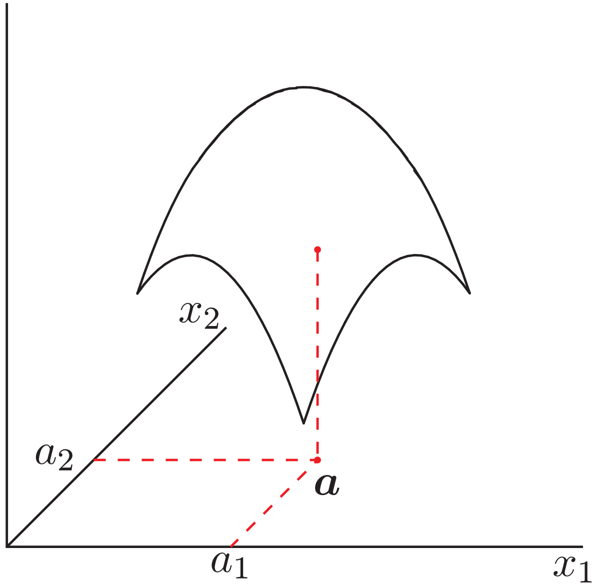
$$\left(= \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t} \right)$$

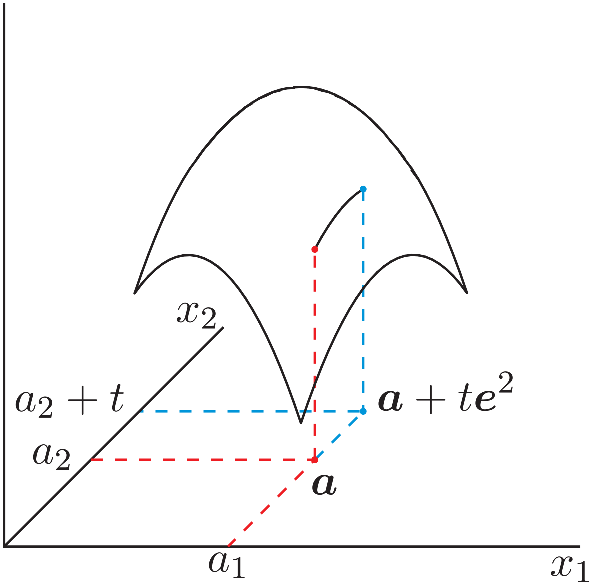
nazýváme **parciální derivací (prvního řádu) funkce** f **podle** j**-té proměnné v bodě** a (pokud limita existuje).

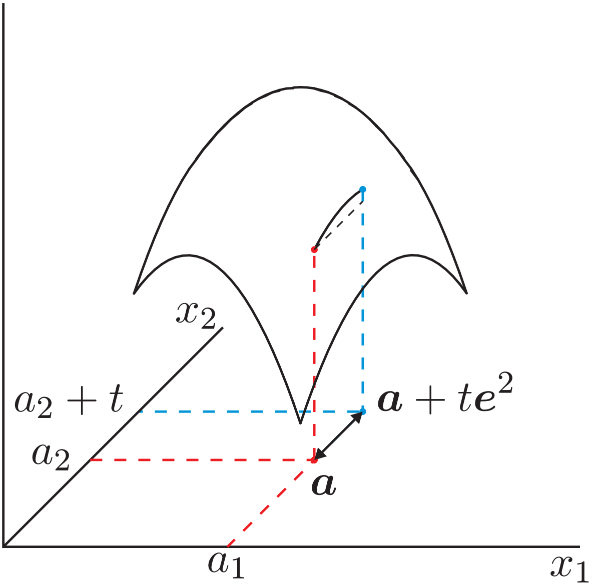

x_2
x_1

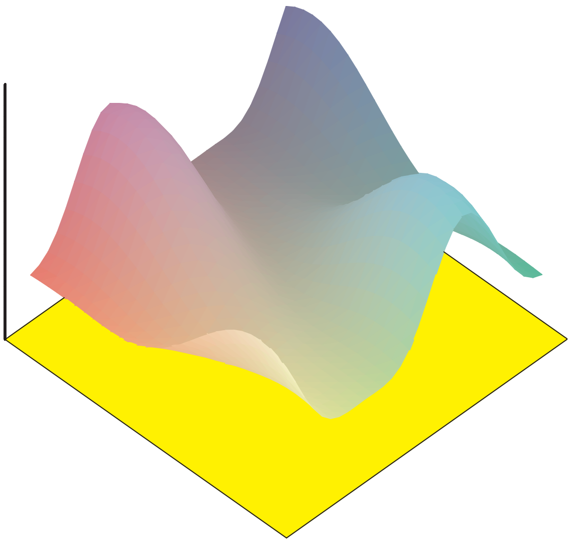

x_2
x_1

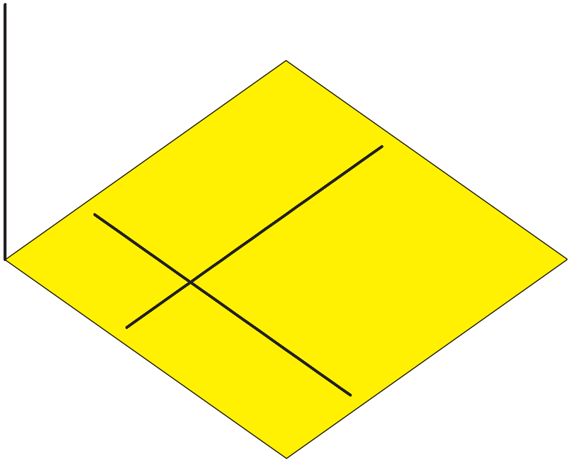

x_2
a
x_1

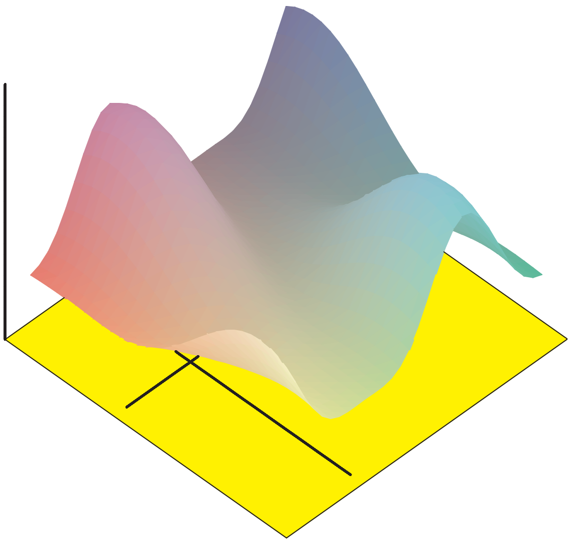

x_2
a_2
$\boldsymbol{a}$
a_1
x_1

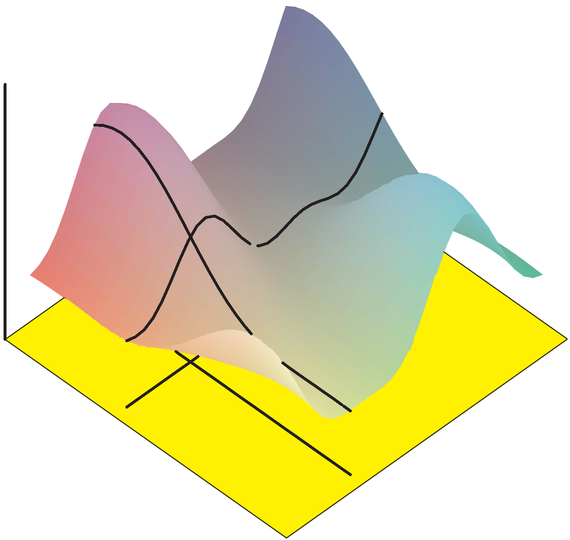

x_2
$a_2 + t$
$\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^2$
a_2
$\boldsymbol{a}$
a_1
x_1

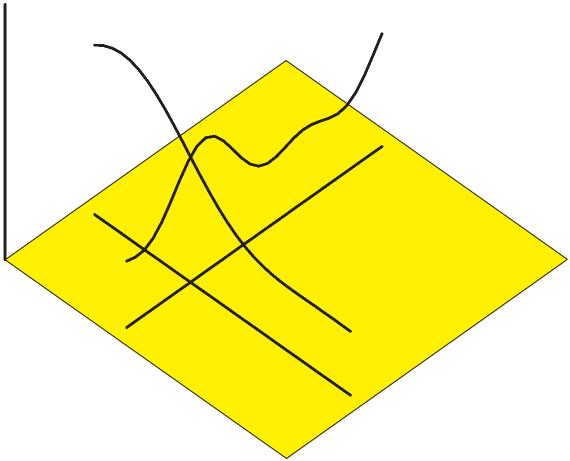

x_2
$a_2 + t$
$\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{e}^2$
a_2
$\boldsymbol{a}$
a_1
x_1

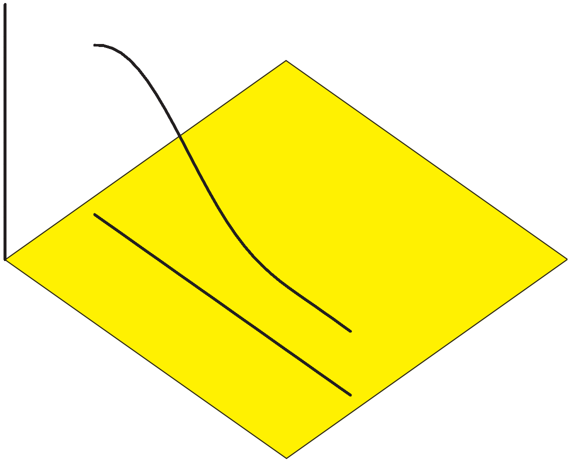


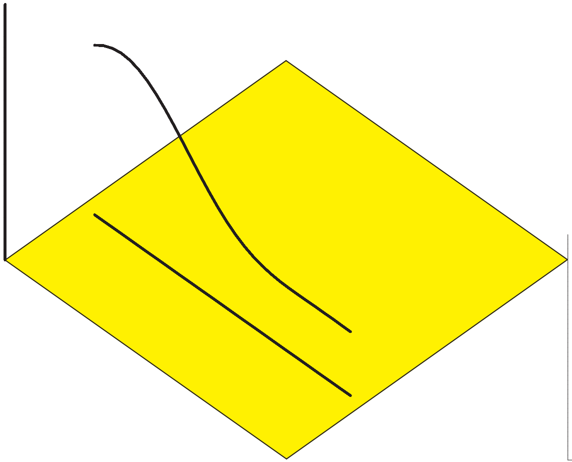


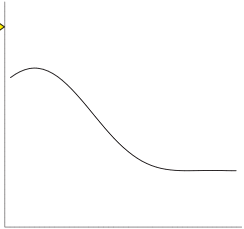


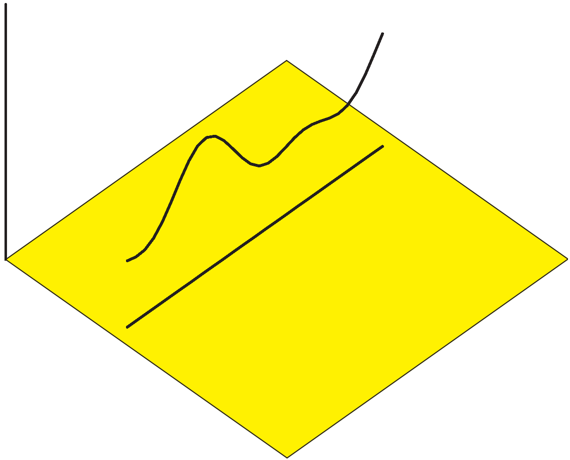


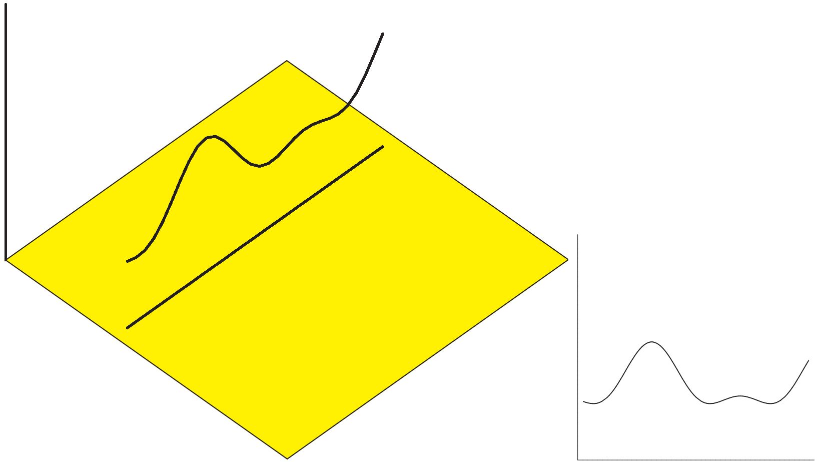












Definice

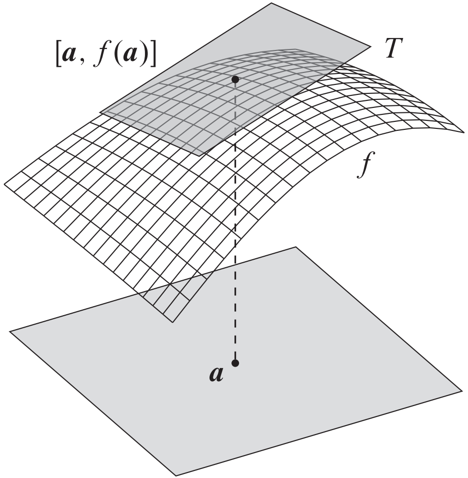
Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je neprázdná a otevřená. Nechť funkce f má v každém bodě množiny G spojité všechny parciální derivace (tj. funkce $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x),\ j = 1, \dots, n$, jsou spojité v každém bodě G). Pak říkáme, že funkce f je **třídy $\mathcal{C}^1$ na G**. Značíme $f \in \mathcal{C}^1(G)$.

Definice

Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $a \in G$ a $f \in \mathcal{C}^1(G)$. Pak graf funkce

$$
\begin{aligned}
T\colon x \mapsto f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)(x_2 - a_2) \\
+ \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n), x \in \mathbf{R}^n
\end{aligned}
$$

se nazývá **tečnou nadrovinou** ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$.


$[\boldsymbol{a}, f(\boldsymbol{a})]$
T
f
$\boldsymbol{a}$

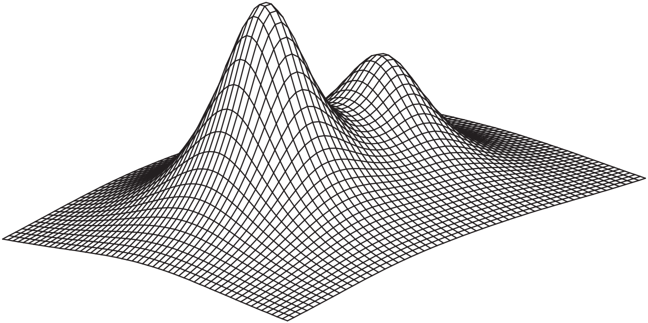
Věta 5.10

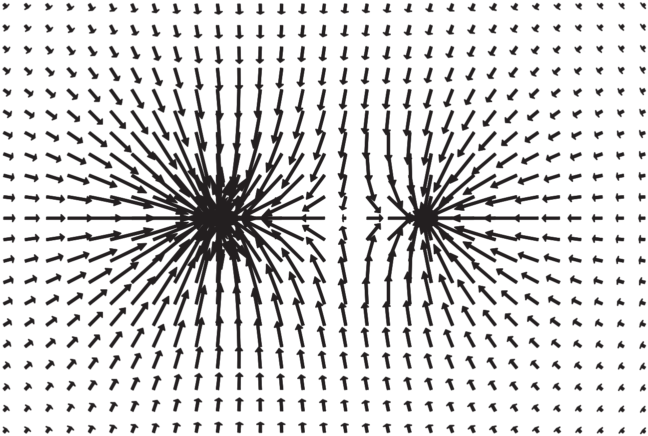
Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $f \in \mathcal{C}^1(G)$. Pak f je spojitá na G.

Definice

Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $a \in G$ a $f \in \mathcal{C}^1(G)$.
Gradientem funkce f **v bodě** a rozumíme vektor

$$\nabla f(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right].$$





Věta 5.11

Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ *je otevřená,* $a \in G$, $j \in \{1, \dots, n\}$. *Nechť funkce* $f\colon G \to \mathbf{R}$ *má v bodě a lokální extrém (vzhledem ke G). Pak buď* $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ *neexistuje nebo je rovna nule.*

Věta 5.12 (derivace složené funkce)

Nechť $r, s \in \mathbf{N}$ *a nechť* $G \subset \mathbf{R}^s$, $H \subset \mathbf{R}^r$ *jsou otevřené množiny. Nechť* $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in \mathcal{C}^1(G)$ *a* $f \in \mathcal{C}^1(H)$. *Je-li složená funkce* $F\colon G \to \mathbf{R}$ *určená předpisem*

$$F(x) = f(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_r(x))$$

definována na G, pak $F \in \mathcal{C}^1(G)$. *Pro* $a \in G$ *označme* $b = [\varphi_1(a), \dots, \varphi_r(a)]$. *Pak pro* $j \in \{1, \dots, s\}$ *platí*

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_i}(b) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a).$$

Věta 5.13

Nechť $i, j \in \mathbf{N},\ i \leq n,\ j \leq n$ *a funkce* f *má na okolí bodu* $a \in \mathbf{R}^n$ *obě derivace* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, *a tyto jsou v bodě a spojité. Pak platí* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

Věta 5.13

Nechť $i, j \in \mathbf{N},\ i \leq n,\ j \leq n$ *a funkce* f *má na okolí bodu* $a \in \mathbf{R}^n$ *obě derivace* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, *a tyto jsou v bodě a spojité. Pak platí* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

Definice

Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina. Řekneme, že funkce f je **třídy** $\mathcal{C}^\infty$ **na** G, má-li f všechny parciální derivace všech řádů spojité na množině G. Značíme $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$.

5.4 Věta o implicitních funkcích

Věta 5.14

Nechť $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$ *je otevřená množina,* $F\colon G \to \mathbf{R}$*,* $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$*,* $\tilde{y} \in \mathbf{R}$*,* $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ *a nechť platí:*

5.4 Věta o implicitních funkcích

Věta 5.14

Nechť $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$ *je otevřená množina,* $F\colon G \to \mathbf{R}$*,* $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$*,* $\tilde{y} \in \mathbf{R}$*,* $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ *a nechť platí:*

(i) $F \in \mathcal{C}^1(G)$,

5.4 Věta o implicitních funkcích

Věta 5.14

Nechť $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$ *je otevřená množina,* $F\colon G \to \mathbf{R}$, $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbf{R}$, $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ *a nechť platí:*

(i) $F \in \mathcal{C}^1(G)$,

(ii) $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$,

5.4 Věta o implicitních funkcích

Věta 5.14

Nechť $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$ *je otevřená množina,* $F\colon G \to \mathbf{R}$*,* $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$*,* $\tilde{y} \in \mathbf{R}$*,* $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ *a nechť platí:*

(i) $F \in \mathcal{C}^1(G)$,

(ii) $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$,

(iii) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$.

5.4 Věta o implicitních funkcích

Věta 5.14

Nechť $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F\colon G \to \mathbf{R}$, $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbf{R}$, $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ a nechť platí:

(i) $F \in \mathcal{C}^1(G)$,

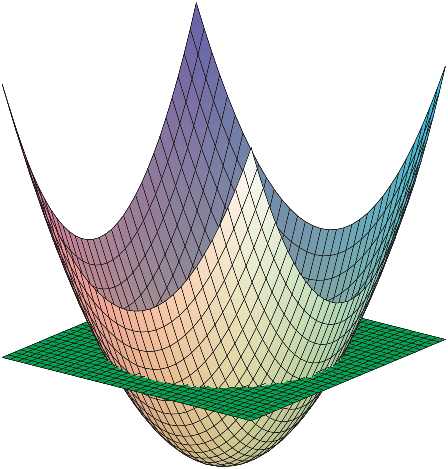
(ii) $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$,

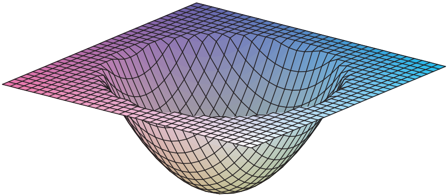
(iii) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$.

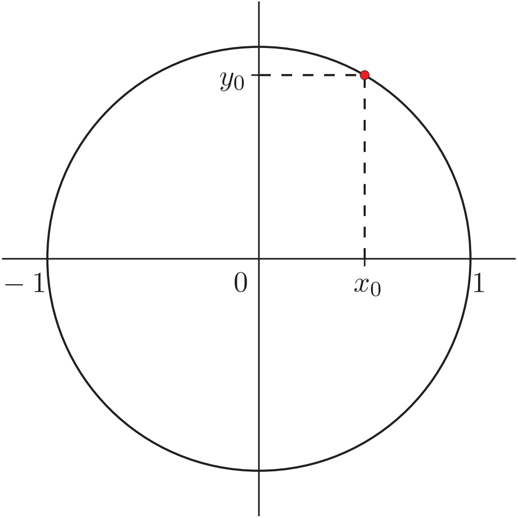
Pak existuje okolí $U \subset \mathbf{R}^n$ bodu $\tilde{x}$ a okolí $V \subset \mathbf{R}$ bodu $\tilde{y}$ tak, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(x, y) = 0$ a píšeme-li $y = \varphi(x)$, pak $\varphi \in \mathcal{C}^1(U)$ a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))},$$

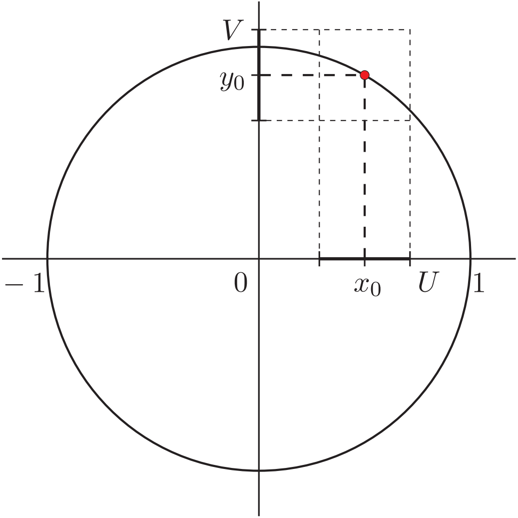
kde $j \in \{1, \dots, n\}$, $x \in U$.



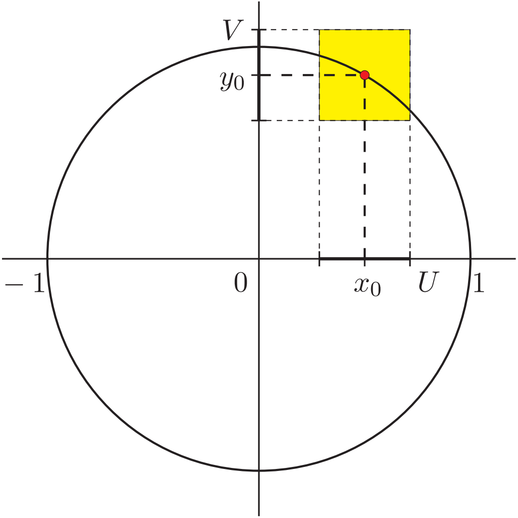




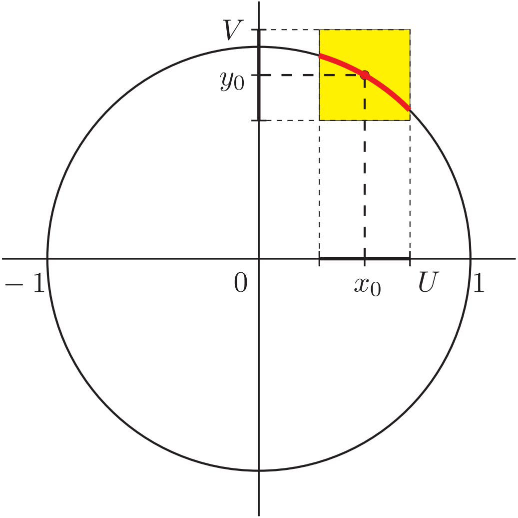
y_0
-1
0
x_0
1



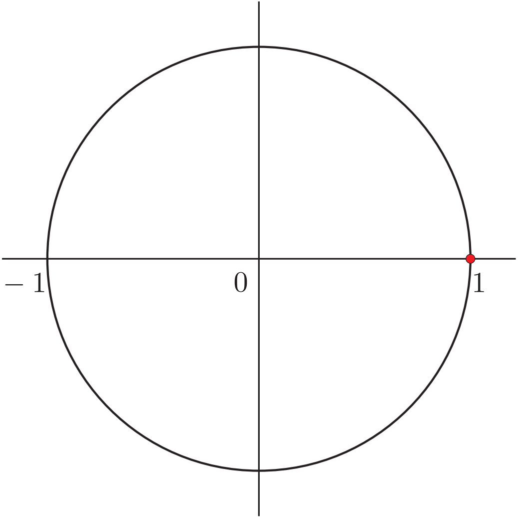
V
y_0
-1
0
x_0
U
1



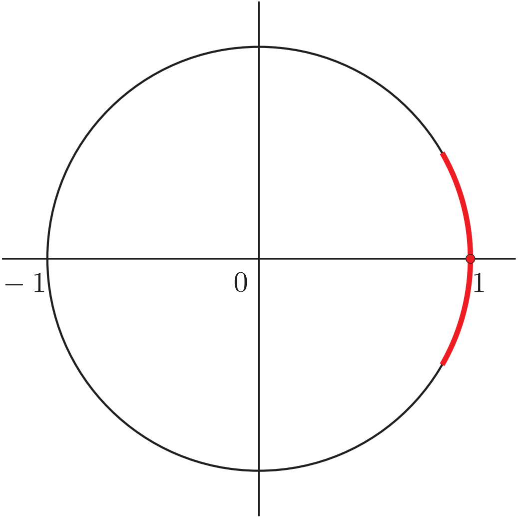
V
y_0
-1
0
x_0
U
1



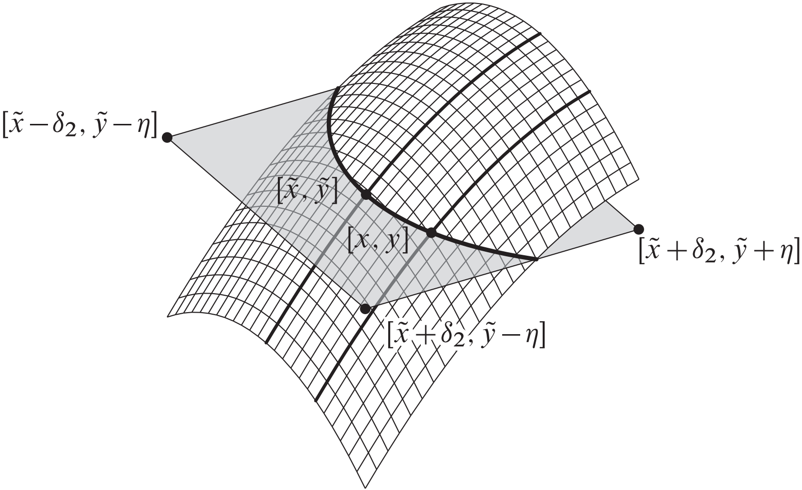
V
y_0
-1
0
x_0
U
1



-1
0
1



-1
0
1


$[\tilde{x}-\delta_2, \tilde{y}-\eta]$
$[\tilde{x}, \tilde{y}]$
$[x, y]$
$[\tilde{x}+\delta_2, \tilde{y}+\eta]$
$[\tilde{x}+\delta_2, \tilde{y}-\eta]$

Věta 5.15

Nechť $G \subset \mathbf{R}^{n+m}$ *je otevřená množina,* $F_j\colon G \to \mathbf{R}$*,* $j = 1, \dots, m$*,* $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$*,* $\tilde{y} \in \mathbf{R}^m$*,* $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ *a nechť platí:*

Věta 5.15

Nechť $G \subset \mathbf{R}^{n+m}$ je otevřená množina, $F_j\colon G \to \mathbf{R}$, $j = 1, \dots, m$, $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbf{R}^m$, $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ a nechť platí:

(i) *$F_j \in \mathcal{C}^1(G)$ pro $j \in \{1, \dots, m\}$,*

Věta 5.15

Nechť $G \subset \mathbf{R}^{n+m}$ je otevřená množina, $F_j \colon G \to \mathbf{R}$, $j = 1, \dots, m$, $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbf{R}^m$, $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ a nechť platí:

(i) *$F_j \in \mathcal{C}^1(G)$ pro $j \in \{1, \dots, m\}$,*

(ii) *$F_j(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ pro $j \in \{1, \dots, m\}$,*

Věta 5.15

Nechť $G \subset \mathbf{R}^{n+m}$ je otevřená množina, $F_j\colon G \to \mathbf{R}$, $j = 1, \dots, m$, $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbf{R}^m$, $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ a nechť platí:

(i) $F_j \in \mathcal{C}^1(G)$ *pro* $j \in \{1, \dots, m\}$,

(ii) $F_j(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ *pro* $j \in \{1, \dots, m\}$,

(iii) $\left| \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_m)} \right|_{(\tilde{x}, \tilde{y})} \neq 0$.

Věta 5.15

Nechť $G \subset \mathbf{R}^{n+m}$ je otevřená množina, $F_j\colon G \to \mathbf{R}$, $j = 1, \dots, m$, $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbf{R}^m$, $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ a nechť platí:

(i) $F_j \in \mathcal{C}^1(G)$ *pro* $j \in \{1, \dots, m\}$,

(ii) $F_j(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ *pro* $j \in \{1, \dots, m\}$,

(iii) $\left|\frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_m)}\right|_{(\tilde{x}, \tilde{y})} \neq 0.$

Pak existuje okolí $U \subset \mathbf{R}^n$ bodu $\tilde{x}$ a okolí $V \subset \mathbf{R}^m$ bodu $\tilde{y}$ tak, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F_j(x, y) = 0$ pro každé $j \in \{1, \dots, m\}$ a píšeme-li $y_j = \varphi_j(x)$, $j \in \{1, \dots, m\}$, pak $\varphi_j \in \mathcal{C}^1(U)$.

5.5 Lagrangeova věta o multiplikátorech

Věta 5.16

Nechť $G \subset \mathbf{R}^2$ *je otevřená množina,* $f, g \in \mathcal{C}^1(G)$*,* $M = \{[x, y] \in G;\ g(x, y) = 0\}$ *a* $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in M$ *je bodem lokálního extrému funkce* f *vzhledem k množině* M*.*

Věta 5.16

Nechť $G \subset \mathbf{R}^2$ je otevřená množina, $f, g \in \mathcal{C}^1(G)$, $M = \{[x, y] \in G;\ g(x, y) = 0\}$ a $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(I)

$$\nabla g(\tilde{x}, \tilde{y}) = \mathbf{o},$$

5.5 Lagrangeova věta o multiplikátorech

Věta 5.16

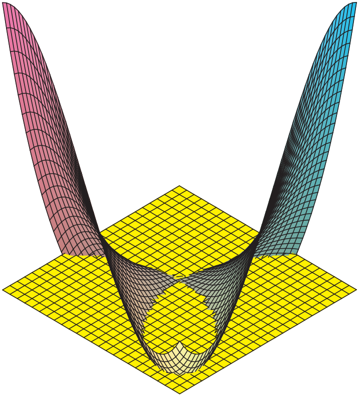
Nechť $G \subset \mathbf{R}^2$ je otevřená množina, $f, g \in \mathcal{C}^1(G)$, $M = \{[x,y] \in G;\ g(x,y) = 0\}$ a $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

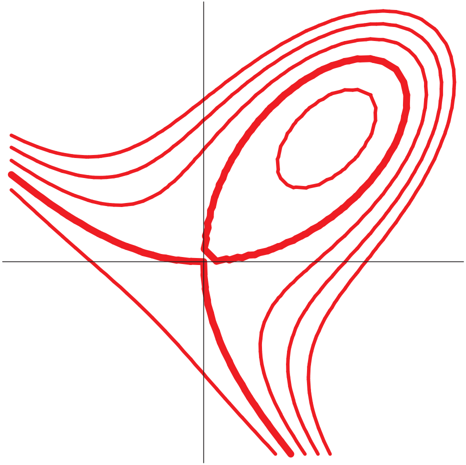
(I)

$$\nabla g(\tilde{x}, \tilde{y}) = \mathbf{o},$$

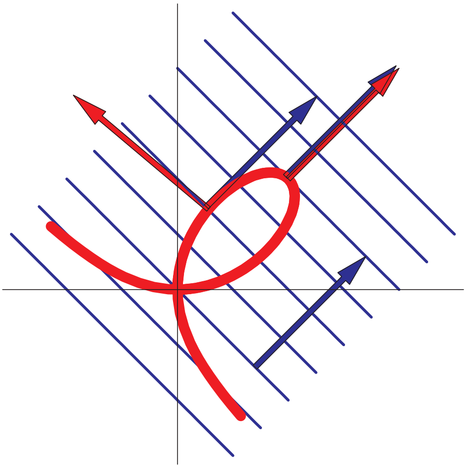
(II) *existuje reálné číslo $\lambda \in \mathbf{R}$ splňující*

$$\nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}) + \lambda \cdot \nabla g(\tilde{x}, \tilde{y}) = \mathbf{o}.$$






DESCARTES
Rene
Cartesins
1596-1650
85
LEKE
FILOZOFE DHE MATEMATIKANE TE SHQUAR
SHQIPERIA
M. TEMO
1996
A. MATSOUKIS S.A.



Věta 5.17

Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ *je otevřená množina,* $f, g_1, \dots, g_m \in \mathcal{C}^1(G)$*,* $m < n$*,*

$$M = \{z \in G;\ g_1(z) = 0, g_2(z) = 0, \dots, g_m(z) = 0\}$$

a bod $\tilde{z} \in M$ *je bodem lokálního extrému funkce* f *vzhledem k* M*.*

Věta 5.17

Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $f, g_1, \ldots, g_m \in \mathcal{C}^1(G)$, $m < n$,

$$M = \{z \in G;\ g_1(z) = 0, g_2(z) = 0, \ldots, g_m(z) = 0\}$$

a bod $\tilde{z} \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k M.
Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(I) *vektory*

$$\nabla g_1(\tilde{z}), \nabla g_2(\tilde{z}), \ldots, \nabla g_m(\tilde{z})$$

jsou lineárně závislé,

Věta 5.17

Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $f, g_1, \ldots, g_m \in \mathcal{C}^1(G)$, $m < n$,

$$M = \{z \in G;\ g_1(z) = 0, g_2(z) = 0, \ldots, g_m(z) = 0\}$$

a bod $\tilde{z} \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k M.
Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(I) *vektory*

$$\nabla g_1(\tilde{z}), \nabla g_2(\tilde{z}), \ldots, \nabla g_m(\tilde{z})$$

jsou lineárně závislé,

(II) *existují reálná čísla $\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ splňující*

$$\nabla f(\tilde{z}) + \lambda_1 \cdot \nabla g_1(\tilde{z}) + \lambda_2 \cdot \nabla g_2(\tilde{z}) + \cdots + \lambda_m \cdot \nabla g_m(\tilde{z}) = \mathbf{o}.$$

5.6 Funkce konkávní a kvazikonkávní

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$. Řekneme, že M je **konvexní** množina, jestliže platí:

$$\forall x,\ y \in M\ \forall t \in \langle 0, 1 \rangle :\ tx + (1 - t)y \in M.$$

5.6 Funkce konkávní a kvazikonkávní

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$. Řekneme, že M je **konvexní** množina, jestliže platí:

$$\forall x,\ y \in M\ \forall t \in \langle 0, 1\rangle :\ tx + (1-t)y \in M.$$

Věta 5.18 (o střední hodnotě)

Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní otevřená množina, $f \in \mathcal{C}^1(G),\ a \in G, b \in G$. Pak existuje $t_0 \in (0,1)$ tak, že

$$f(a) - f(b) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t_0 a + (1-t_0)b)(a_i - b_i).$$

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní množina a funkce f je definována na M. Řekneme, že f je

- **konkávní** funkce na M, jestliže

$$\forall a, b \in M \forall t \in \langle 0, 1\rangle : \\ f(ta + (1-t)b) \geq tf(a) + (1-t)f(b),$$

Definice

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní množina a funkce f je definována na M. Řekneme, že f je

- **konkávní** funkce na M, jestliže

$$\forall a, b \in M \, \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : \quad f(ta + (1-t)b) \geq tf(a) + (1-t)f(b),$$

- **ryze konkávní** funkce na M, jestliže

$$\forall a, b \in M, a \neq b \, \forall t \in (0, 1) : \quad f(ta + (1-t)b) > tf(a) + (1-t)f(b),$$

- **kvazikonkávní na** M, jestliže

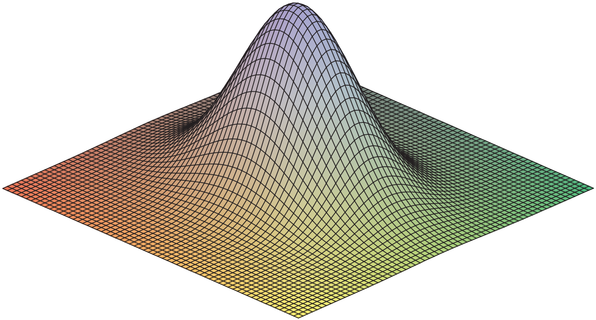
$$\forall a, b \in M, f(b) \geq f(a) \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : \\ f(ta + (1-t)b) \geq f(a),$$

- **kvazikonkávní na** M, jestliže

$$\forall a, b \in M, f(b) \geq f(a) \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : \\ f(ta + (1-t)b) \geq f(a),$$

- **ryze kvazikonkávní na** M, jestliže

$$\forall a, b \in M, a \neq b, f(b) \geq f(a) \forall t \in (0, 1) : \\ f(ta + (1-t)b) > f(a).$$



Věta 5.19

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní množina a f je funkce definovaná na M. Pak platí:

(i) *Je-li f konkávní na M, pak je i kvazikonkávní na M.*

Věta 5.19

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní množina a f je funkce definovaná na M. Pak platí:

(i) *Je-li f konkávní na M, pak je i kvazikonkávní na M.*

(ii) *Je-li f ryze konkávní na M, pak je i ryze kvazikonkávní na M.*

Věta 5.19

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní množina a f je funkce definovaná na M. Pak platí:

(i) *Je-li f konkávní na M, pak je i kvazikonkávní na M.*

(ii) *Je-li f ryze konkávní na M, pak je i ryze kvazikonkávní na M.*

Věta 5.20

Nechť funkce f je konkávní na otevřené konvexní množině G. Pak f je spojitá na G.

Věta 5.21

Nechť funkce f je konkávní na konvexní množině M. Pak pro každé $\alpha \in \mathbf{R}$ je množina $Q_\alpha = \{x \in M;\ f(x) \geq \alpha\}$ konvexní.

Věta 5.21

Nechť funkce f je konkávní na konvexní množině M. Pak pro každé $\alpha \in \mathbf{R}$ je množina $Q_\alpha = \{x \in M;\ f(x) \geq \alpha\}$ konvexní.

Věta 5.22

Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní otevřená množina a $f \in \mathcal{C}^1(G)$. Pak je funkce f konkávní na G právě tehdy, když platí

$$\forall x,\ y \in G\colon f(y) \leq f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(y_i - x_i).$$

Věta 5.23

Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ *je konvexní otevřená množina a* $f \in \mathcal{C}^1(G)$ *je konkávní na* G*. Je-li* $a \in G$ *stacionárním bodem funkce* f*, pak je* a *bodem maxima funkce* f*.*

Věta 5.24

Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní otevřená množina a $f \in \mathcal{C}^1(G)$. Pak je funkce f ryze konkávní na G právě tehdy, když

$$\forall x, y \in G, x \neq y \colon f(y) < f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(y_i - x_i).$$

Věta 5.25

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní množina a f je funkce definovaná na M. Funkce f je kvazikonkávní na M právě tehdy, když pro každé $\alpha \in \mathbf{R}$ je množina

$$Q_\alpha = \{x \in M;\ f(x) \geq \alpha\}$$

konvexní.

Věta 5.25

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ *je konvexní množina a* f *je funkce definovaná na* M*. Funkce* f *je kvazikonkávní na* M *právě tehdy, když pro každé* $\alpha \in \mathbf{R}$ *je množina*

$$Q_\alpha = \{x \in M;\ f(x) \geq \alpha\}$$

konvexní.

Věta 5.26

Nechť f *je ryze kvazikonkávní funkce na konvexní množině* $M \subset \mathbf{R}^n$*. Pokud* f *nabývá na* M *svého maxima, pak ho nabývá právě v jednom bodě.*

Důsledek 5.27

Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní, omezená, uzavřená a neprázdná množina a f je spojitá a ryze kvazikonkávní funkce na M. Pak f nabývá maxima na M právě v jednom bodě.

6. Maticový počet

6.1 Základní operace s maticemi

Definice

Tabulku

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

kde $a_{ij} \in \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, nazýváme **maticí typu** $m \times n$. Je-li $m = n$, pak mluvíme o **čtvercové matici řádu** n. Množinu všech matic typu $m \times n$ značíme $M(m \times n)$.

O n-tici čísel

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}),$$

kde $i \in \{1, \dots, m\}$, mluvíme jako o ***i*-tém řádku** matice (1) a o m-tici čísel

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},$$

kde $j \in \{1, \dots, n\}$, jako o ***j*-tém sloupci** matice (1). Matici (1) značíme také symbolem $(a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$.

Definice

Řekneme, že matice $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$, $\mathbb{B} = (b_{uv})_{\substack{u=1..p \\ v=1..s}}$ se rovnají, jestliže platí $m = p$, $n = s$ a $a_{ij} = b_{ij}$ pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Definice

Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(m \times n)$, $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$, $\mathbb{B} = (b_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Pak **součtem matic** $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ rozumíme matici

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ a_{31} + b_{31} & \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Součinem reálného čísla λ a matice $\mathbb{A}$ rozumíme matici

$$\lambda\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \lambda a_{31} & \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Definice

Nechť $\mathbb{A} = (a_{is})_{\substack{i=1..m \\ s=1..n}}$ je matice typu $m \times n$ a $\mathbb{B} = (b_{sj})_{\substack{s=1..n \\ j=1..k}}$ je matice typu $n \times k$. **Součinem matic** $\mathbb{A}$ a $\mathbb{B}$ rozumíme matici $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = (c_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..k}}$ typu $m \times k$, kde

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, k.$$

Zpravidla budeme psát místo $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ pouze $\mathbb{A}\mathbb{B}$.

Věta 6.1 (vlastnosti maticového násobení)

Platí:

(i) $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in M(n \times n): \ (\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbb{C} = \mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C})$,

Věta 6.1 (vlastnosti maticového násobení)

Platí:

(i) $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in M(n \times n): \ (\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbb{C} = \mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C})$,

(ii) $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in M(n \times n): \ \mathbb{A}(\mathbb{B} + \mathbb{C}) = \mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{A}\mathbb{C}$,

Věta 6.1 (vlastnosti maticového násobení)

Platí:

(i) $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in M(n \times n): \ (\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbb{C} = \mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C})$,

(ii) $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in M(n \times n): \ \mathbb{A}(\mathbb{B} + \mathbb{C}) = \mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{A}\mathbb{C}$,

(iii) $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in M(n \times n): \ (\mathbb{A} + \mathbb{B})\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{C} + \mathbb{B}\mathbb{C}$,

Věta 6.1 (vlastnosti maticového násobení)

Platí:

(i) $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in M(n \times n): \ (\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbb{C} = \mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C})$,

(ii) $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in M(n \times n): \ \mathbb{A}(\mathbb{B} + \mathbb{C}) = \mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{A}\mathbb{C}$,

(iii) $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in M(n \times n): \ (\mathbb{A} + \mathbb{B})\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{C} + \mathbb{B}\mathbb{C}$,

(iv) $\exists! \mathbb{I} \in M(n \times n) \, \forall \mathbb{A} \in M(n \times n): \ \mathbb{I}\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{I} = \mathbb{A}$
*(existence a jednoznačnost **jednotkové matice** $\mathbb{I}$).*

Definice

Transponovanou maticí k matici

$$\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$$

rozumíme matici

$$\mathbb{A}^T = (a^t_{uv})_{\substack{u=1..n \\ v=1..m}}$$

kde $a^t_{uv} = a_{vu}$ pro každé $u \in \{1, \ldots, n\}$, $v \in \{1, \ldots, m\}$.

Věta 6.2 (vlastnosti transponovaných matic)

Platí:

(i) $\forall \mathbb{A} \in M(m \times n)\colon (\mathbb{A}^T)^T = \mathbb{A}$,

Věta 6.2 (vlastnosti transponovaných matic)

Platí:

(i) $\forall \mathbb{A} \in M(m \times n) \colon (\mathbb{A}^T)^T = \mathbb{A}$,

(ii) $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(m \times n) \colon (\mathbb{A} + \mathbb{B})^T = \mathbb{A}^T + \mathbb{B}^T$,

Věta 6.2 (vlastnosti transponovaných matic)

Platí:

(i) $\forall \mathbb{A} \in M(m \times n)\colon (\mathbb{A}^T)^T = \mathbb{A}$,

(ii) $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(m \times n)\colon (\mathbb{A} + \mathbb{B})^T = \mathbb{A}^T + \mathbb{B}^T$,

(iii) $\forall \mathbb{A} \in M(m \times k)\, \forall \mathbb{B} \in M(k \times n)\colon (\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T \mathbb{A}^T$.

6.2 Regulární matice

Definice

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Řekneme, že $\mathbb{A}$ je **regulární**, pokud existuje $\mathbb{B} \in M(n \times n)$ taková, že

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}.$$

6.2 Regulární matice

Definice

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Řekneme, že $\mathbb{A}$ je **regulární**, pokud existuje $\mathbb{B} \in M(n \times n)$ taková, že

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}.$$

Definice

Nechť $\mathbb{A}$ je regulární matice. Matici $\mathbb{B}$ splňující $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}$ pak nazýváme **inverzní maticí** k matici $\mathbb{A}$. Značíme ji $\mathbb{A}^{-1}$.

Věta 6.3 (regularita a maticové operace)

Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(n \times n)$ *jsou regulární matice. Pak platí:*

(i) $\mathbb{A}^{-1}$ *je regulární matice a* $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$,

Věta 6.3 (regularita a maticové operace)

Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(n \times n)$ *jsou regulární matice. Pak platí:*

(i) $\mathbb{A}^{-1}$ *je regulární matice a* $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$*,*

(ii) $\mathbb{A}^{T}$ *je regulární matice a* $(\mathbb{A}^{T})^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^{T}$*,*

Věta 6.3 (regularita a maticové operace)

Nechť $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(n \times n)$ *jsou regulární matice. Pak platí:*

(i) $\mathbb{A}^{-1}$ *je regulární matice a* $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$,

(ii) $\mathbb{A}^{T}$ *je regulární matice a* $(\mathbb{A}^{T})^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^{T}$,

(iii) $\mathbb{A}\mathbb{B}$ *je regulární matice a* $(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}$.

Definice

Nechť $k, n \in \mathbf{N}$. Mějme řádkové vektory $\mathbf{v}^1 = (v_1^1, \ldots, v_n^1)$, $\ldots$, $\mathbf{v}^k = (v_1^k, \ldots, v_n^k)$. **Lineární kombinací** vektorů $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k$ rozumíme řádkový vektor tvaru

$$\lambda_1 \mathbf{v}^1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{v}^k,$$

kde $\lambda_i \in \mathbf{R}, \; i = 1, \ldots, k$.

Definice

Nechť $k, n \in \mathbf{N}$. Mějme řádkové vektory $\mathbf{v}^1 = (v_1^1, \dots, v_n^1)$, $\dots$, $\mathbf{v}^k = (v_1^k, \dots, v_n^k)$. **Lineární kombinací** vektorů $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k$ rozumíme řádkový vektor tvaru

$$\lambda_1 \mathbf{v}^1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{v}^k,$$

kde $\lambda_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, k$. **Triviální lineární kombinací** vektorů $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k$ rozumíme lineární kombinaci

$$0 \cdot \mathbf{v}^1 + \cdots + 0 \cdot \mathbf{v}^k.$$

Definice

Řekneme, že vektory $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k$ jsou **lineárně nezávislé**, jestliže platí

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}: \ \lambda_1 \mathbf{v}^1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{v}^k = \mathbf{o} \\ \Rightarrow \ \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0,$$

Definice

Řekneme, že vektory $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k$ jsou **lineárně nezávislé**, jestliže platí

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}: \ \lambda_1 \mathbf{v}^1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{v}^k = \mathbf{o} \Rightarrow \ \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0,$$

neboli mezi všemi lineárními kombinacemi řádkových vektorů $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k$ je rovna nulovému řádkovému vektoru, který značíme $\mathbf{o}$, jenom triviální lineární kombinace.

Definice

Nechť $\mathbb{A} \in M(m \times n)$. **Hodností matice** $\mathbb{A}$ rozumíme maximální počet lineárně nezávislých řádků (tj. řádkových vektorů). Hodnost matice $\mathbb{A}$ značíme $h(\mathbb{A})$.

Definice

Řekneme, že matice $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ je **schodovitá**, jestliže pro každé $i \in \{2, \ldots, m\}$ platí, že i-tý řádek matice $\mathbb{A}$ je nulový nebo začíná větším počtem nul než $(i-1)$-ní řádek.

Definice

Řekneme, že matice $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ je **schodovitá**, jestliže pro každé $i \in \{2, \dots, m\}$ platí, že i-tý řádek matice $\mathbb{A}$ je nulový nebo začíná větším počtem nul než $(i-1)$-ní řádek.

Definice

Elementárními řádkovými úpravami matice $\mathbb{A}$ budeme rozumět:

(i) záměnu dvou řádků,

Definice

Řekneme, že matice $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ je **schodovitá**, jestliže pro každé $i \in \{2, \ldots, m\}$ platí, že i-tý řádek matice $\mathbb{A}$ je nulový nebo začíná větším počtem nul než $(i-1)$-ní řádek.

Definice

Elementárními řádkovými úpravami matice $\mathbb{A}$ budeme rozumět:

(i) záměnu dvou řádků,

(ii) vynásobení řádku nenulovým číslem,

Definice

Řekneme, že matice $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ je **schodovitá**, jestliže pro každé $i \in \{2, \dots, m\}$ platí, že i-tý řádek matice $\mathbb{A}$ je nulový nebo začíná větším počtem nul než $(i-1)$-ní řádek.

Definice

Elementárními řádkovými úpravami matice $\mathbb{A}$ budeme rozumět:

(i) záměnu dvou řádků,

(ii) vynásobení řádku nenulovým číslem,

(iii) přičtení násobku jednoho řádku k jinému řádku.

Definice

Transformací budeme rozumět konečnou posloupnost řádkových elementárních úprav. Jestliže matice $\mathbb{B} \in M(m \times n)$ vznikla z matice $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ aplikací transformace T na matici $\mathbb{A}$, pak tento fakt značíme takto: $\mathbb{A} \overset{T}{\rightsquigarrow} \mathbb{B}$.

Věta 6.4 (vlastnosti řádkových elementárních úprav)

(i) *Nechť* $\mathbb{A} \in M(m \times n)$. *Pak existuje transformace* T *převádějící matici* $\mathbb{A}$ *na schodovitou matici.*

Věta 6.4 (vlastnosti řádkových elementárních úprav)

(i) *Nechť* $\mathbb{A} \in M(m \times n)$. *Pak existuje transformace* T *převádějící matici* $\mathbb{A}$ *na schodovitou matici.*

(ii) *Nechť* $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(m \times n)$. *Jestliže existuje transformace* T_1 *taková, že* $\mathbb{A} \overset{T_1}{\rightsquigarrow} \mathbb{B}$, *pak existuje transformace* T_2 *taková, že* $\mathbb{B} \overset{T_2}{\rightsquigarrow} \mathbb{A}$.

Věta 6.4 (vlastnosti řádkových elementárních úprav)

(i) *Nechť* $\mathbb{A} \in M(m \times n)$. *Pak existuje transformace* T *převádějící matici* $\mathbb{A}$ *na schodovitou matici.*

(ii) *Nechť* $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(m \times n)$. *Jestliže existuje transformace* T_1 *taková, že* $\mathbb{A} \overset{T_1}{\rightsquigarrow} \mathbb{B}$, *pak existuje transformace* T_2 *taková, že* $\mathbb{B} \overset{T_2}{\rightsquigarrow} \mathbb{A}$.

(iii) *Nechť* $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(m \times n)$ *a* T *je transformace taková, že* $\mathbb{A} \overset{T}{\rightsquigarrow} \mathbb{B}$. *Pak* $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{B})$.

Věta 6.5 (součin a řádkové úpravy)

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times k), \mathbb{B} \in M(k \times m), \mathbb{C} \in M(n \times m)$ *a platí* $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{C}$*. Nechť T je transformace a* $\mathbb{A} \overset{T}{\leadsto} \mathbb{A}'$ *a* $\mathbb{C} \overset{T}{\leadsto} \mathbb{C}'$*.*
Pak platí $\mathbb{A}'\mathbb{B} = \mathbb{C}'$*.*

Věta 6.5 (součin a řádkové úpravy)

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times k), \mathbb{B} \in M(k \times m)$*,* $\mathbb{C} \in M(n \times m)$ *a platí* $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{C}$*. Nechť* T *je transformace a* $\mathbb{A} \overset{T}{\rightsquigarrow} \mathbb{A}'$ *a* $\mathbb{C} \overset{T}{\rightsquigarrow} \mathbb{C}'$*. Pak platí* $\mathbb{A}'\mathbb{B} = \mathbb{C}'$*.*

Věta 6.6

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$*. Pak* $\mathbb{A}$ *je regulární, právě když* $h(\mathbb{A}) = n$*.*

6.3 Determinanty

Definice

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Maticí $\mathbb{A}_{ij}$ budeme rozumět matici typu $(n-1) \times (n-1)$, která vznikne z $\mathbb{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Definice

Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n\\ j=1..n}}$. **Determinant matice** $\mathbb{A}$ definujeme takto:

$$\det \mathbb{A} = \begin{cases} a_{11}, & \text{pokud } n = 1, \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det \mathbb{A}_{i1}, & \text{pro } n > 1. \end{cases}$$

Definice

Nechť $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$. **Determinant matice** $\mathbb{A}$ definujeme takto:

$$\det \mathbb{A} = \begin{cases} a_{11}, & \text{pokud } n = 1, \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det \mathbb{A}_{i1}, & \text{pro } n > 1. \end{cases}$$

Pro $\det \mathbb{A}$ budeme také používat symbol

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Věta 6.7

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$*.*

(i) *Nechť matice* $\mathbb{A}'$ *vznikne z* $\mathbb{A}$ *tak, že v* $\mathbb{A}$ *vyměníme dva řádky mezi sebou (tj. provedeme první řádkovou elementární úpravu), pak platí* $\det \mathbb{A}' = -\det \mathbb{A}$*.*

Věta 6.7

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$.

(i) *Nechť matice* $\mathbb{A}'$ *vznikne z* $\mathbb{A}$ *tak, že v* $\mathbb{A}$ *vyměníme dva řádky mezi sebou (tj. provedeme první řádkovou elementární úpravu), pak platí* $\det \mathbb{A}' = -\det \mathbb{A}$.

(ii) *Nechť matice* $\mathbb{A}'$ *vznikne z* $\mathbb{A}$ *tak, že v* $\mathbb{A}$ *jeden řádek vynásobíme reálným číslem* λ, *pak platí*

$$\det \mathbb{A}' = \lambda \det \mathbb{A}.$$

Věta 6.7

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$.

(i) *Nechť matice* $\mathbb{A}'$ *vznikne z* $\mathbb{A}$ *tak, že v* $\mathbb{A}$ *vyměníme dva řádky mezi sebou (tj. provedeme první řádkovou elementární úpravu), pak platí* $\det \mathbb{A}' = -\det \mathbb{A}$.

(ii) *Nechť matice* $\mathbb{A}'$ *vznikne z* $\mathbb{A}$ *tak, že v* $\mathbb{A}$ *jeden řádek vynásobíme reálným číslem* λ, *pak platí*

$$\det \mathbb{A}' = \lambda \det \mathbb{A}.$$

(iii) *Nechť matice* $\mathbb{A}'$ *vznikne z* $\mathbb{A}$ *tak, že v* $\mathbb{A}$ λ*-násobek jednoho řádku přičteme k jinému řádku (tj. provedeme třetí řádkovou elementární úpravu), pak platí*

$$\det \mathbb{A}' = \det \mathbb{A}.$$

Věta 6.8

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$, $j \in \{1, \dots, n\}$. *Pak*

$$\det \mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathbb{A}_{ij}.$$

Věta 6.8

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$, $j \in \{1, \dots, n\}$. *Pak*

$$\det \mathbb{A} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathbb{A}_{ij}.$$

Definice

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Řekneme, že $\mathbb{A}$ je **horní trojúhelníková** matice, jestliže platí $a_{ij} = 0$ pro $i > j$, $i, j \in \{1, \dots n\}$. Řekneme, že $\mathbb{A}$ je **dolní trojúhelníková** matice, jestliže platí $a_{ij} = 0$ pro $i < j$, $i, j \in \{1, \dots n\}$.

Věta 6.9

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je horní (resp. dolní) trojúhelníková matice. Pak platí

$$\det \mathbb{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \cdots \cdot a_{nn}.$$

Věta 6.10

Pro $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ *platí* $\det \mathbb{A} = \det \mathbb{A}^T$*.*

Věta 6.10

Pro $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ *platí* $\det \mathbb{A} = \det \mathbb{A}^T$.

Věta 6.11

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. *Pak* $\mathbb{A}$ *je regulární, právě když* $\det \mathbb{A} \neq 0$.

Věta 6.10

Pro $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ *platí* $\det \mathbb{A} = \det \mathbb{A}^T$*.*

Věta 6.11

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. *Pak* $\mathbb{A}$ *je regulární, právě když* $\det \mathbb{A} \neq 0$*.*

Věta 6.12

Pro $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(n \times n)$ *platí* $\det \mathbb{A}\mathbb{B} = \det \mathbb{A} \det \mathbb{B}$*.*

6.4 Řešení soustav lineárních rovnic

Věta 6.13

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$, $\boldsymbol{b} \in M(n \times 1)$, $\boldsymbol{x} \in M(n \times 1)$ *a* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = b$. *Provedeme-li stejné elementární úpravy na* $\mathbb{A}$ *i na* $\boldsymbol{b}$ *obdržíme matice* $\mathbb{A}'$ *a* $\boldsymbol{b}'$ *pro které platí* $\mathbb{A}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$.

6.4 Řešení soustav lineárních rovnic

Věta 6.13

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$, $\boldsymbol{b} \in M(n \times 1)$, $\boldsymbol{x} \in M(n \times 1)$ *a* $\mathbb{A}\mathbf{x} = b$. *Provedeme-li stejné elementární úpravy na* $\mathbb{A}$ *i na* $\boldsymbol{b}$ *obdržíme matice* $\mathbb{A}'$ *a* $\boldsymbol{b}'$ *pro které platí* $\mathbb{A}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$.

Věta 6.14

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. *Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *matice* $\mathbb{A}$ *je regulární,*

(ii) *soustava (S) má pro každé* $\boldsymbol{b}$ *právě jedno řešení,*

(iii) *soustava (S) má pro každé* $\boldsymbol{b}$ *alespoň jedno řešení.*

Věta 6.15

Soustava (S) má řešení právě tehdy, když matice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

mají stejnou hodnost.

Věta 6.16 (Cramerovo pravidlo)

Nechť $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ *je regulární matice,* $\boldsymbol{b} \in M(n \times 1)$*,* $\boldsymbol{x} \in M(n \times 1)$ *a* $\mathbb{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$*. Pak*

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}},$$

pro $j = 1, \dots, n$*.*

6.5 Matice a lineární zobrazení

Definice

Řekneme, že zobrazení $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ je **lineární**, pokud platí:

(i) $\forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n: \; f(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{u}) + f(\boldsymbol{v})$,

(ii) $\forall \lambda \in \mathbf{R}\, \forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n: \; f(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda f(\boldsymbol{u})$.

Věta 6.17 (reprezentace lineárních zobrazení)

Zobrazení $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *je lineární právě tehdy, když existuje matice* $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ *taková, že*

$$\forall \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^n: \ f(\boldsymbol{u}) = \mathbb{A}\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Věta 6.18

Nechť zobrazení $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ je lineární. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(i) *f je bijekce (tj. jde o prosté zobrazení $\mathbf{R}^n$ na $\mathbf{R}^n$),*

(ii) *f je prosté zobrazení,*

(iii) *f je zobrazení $\mathbf{R}^n$ na $\mathbf{R}^n$.*

Věta 6.18

Nechť zobrazení $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *je lineární. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) f *je bijekce (tj. jde o prosté zobrazení* $\mathbf{R}^n$ *na* $\mathbf{R}^n$*),*

(ii) f *je prosté zobrazení,*

(iii) f *je zobrazení* $\mathbf{R}^n$ *na* $\mathbf{R}^n$.

Věta 6.19

Nechť $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *je lineární zobrazení reprezentované maticí* $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ *a* $g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^k$ *je lineární zobrazení reprezentované maticí* $\mathbb{B} \in M(k \times m)$. *Potom složené zobrazení* $g \circ f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^k$ *je lineární a je reprezentováno maticí* $\mathbb{B}\mathbb{A}$.

7. Číselné řady

7. Číselné řady

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Pro $m \in \mathbf{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme m**-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

7. Číselné řady

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Pro $m \in \mathbf{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme *m*-**tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat *n*-**tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

7. Číselné řady

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Pro $m \in \mathbf{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme ***m*-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat ***n*-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **Součtem** nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje.

7. Číselné řady

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Pro $m \in \mathbf{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme ***m*-tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat ***n*-tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **Součtem** nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

7. Číselné řady

Definice

Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost. Pro $m \in \mathbf{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazveme *m*-**tým částečným součtem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Prvek a_n budeme nazývat *n*-**tým členem** řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. **Součtem** nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazveme limitu posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Řekneme, že řada **konverguje**, je-li její součet reálné číslo. V opačném případě řekneme, že řada **diverguje**.

Věta 7.1 (nutná podmínka konvergence řady)

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, potom* $\lim a_n = 0$.

Věta 7.1 (nutná podmínka konvergence řady)

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, potom* $\lim a_n = 0$.

Věta 7.2 (srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou dvě řady splňující* $0 \leq a_n \leq b_n$ *pro každé* $n \in \mathbf{N}$.

(i) *Je-li* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergentní, je rovněž* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

Věta 7.1 (nutná podmínka konvergence řady)

Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, potom* $\lim a_n = 0$.

Věta 7.2 (srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou dvě řady splňující* $0 \leq a_n \leq b_n$ *pro každé* $n \in \mathbf{N}$.

(i) *Je-li* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konvergentní, je rovněž* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(ii) *Je-li* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní, je rovněž* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergentní.*

Věta 7.3 (limitní srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy splňující* $\lim_{n\to+\infty} a_n/b_n = c \in (0,+\infty)$. *Pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě když konverguje* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta 7.3 (limitní srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy splňující* $\lim_{n\to+\infty} a_n/b_n = c \in (0, +\infty)$. *Pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě když konverguje* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta 7.4 (Cauchyovo odmocninové kritérium)

Budiž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *řada s nezápornými členy. Potom platí:*

(i) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, *je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

Věta 7.3 (limitní srovnávací kritérium)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s nezápornými členy splňující* $\lim_{n\to+\infty} a_n/b_n = c \in (0,+\infty)$. *Pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, právě když konverguje* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Věta 7.4 (Cauchyovo odmocninové kritérium)

Budiž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *řada s nezápornými členy. Potom platí:*

(i) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{a_n} < 1$, *je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(ii) *Je-li* $\lim \sqrt[n]{a_n} > 1$, *je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní.*

Věta 7.5 (d'Alembertovo podílové kritérium)

Budiž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *řada s kladnými členy. Potom platí:*

(i) *Je-li* $\lim a_{n+1}/a_n < 1$*, je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

Věta 7.5 (d'Alembertovo podílové kritérium)

Budiž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *řada s kladnými členy. Potom platí:*

(i) *Je-li* $\lim a_{n+1}/a_n < 1$, *je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(ii) *Je-li* $\lim a_{n+1}/a_n > 1$, *je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní.*

Věta 7.5 (d'Alembertovo podílové kritérium)

Budiž $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *řada s kladnými členy. Potom platí:*

(i) *Je-li* $\lim a_{n+1}/a_n < 1$, *je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní.*

(ii) *Je-li* $\lim a_{n+1}/a_n > 1$, *je* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergentní.*

Věta 7.6

Nechť $\alpha \in \mathbf{R}$. *Řada* $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{\alpha}$ *konverguje právě tehdy, když* $\alpha > 1$.

Věta 7.7 (Leibnizovo kritérium)

Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. *Nechť platí*

- $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ *pro každé* $n \in \mathbf{N}$,
- $\lim a_n = 0$.

Potom $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *konverguje.*

Věta 7.7 (Leibnizovo kritérium)

Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. *Nechť platí*

- $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ *pro každé* $n \in \mathbf{N}$,
- $\lim a_n = 0$.

Potom $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *konverguje.*

Definice

Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**, pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje.

Věta 7.8

Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně konvergentní, je rovněž konvergentní.*

Věta 7.8

Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní, je rovněž konvergentní.

Definice

Budiž $\{k_n\}$ posloupnost přirozených čísel taková, že každé přirozené číslo je v ní obsaženo právě jednou. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ nazveme **přerovnáním řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 7.8

Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně konvergentní, je rovněž konvergentní.*

Definice

Budiž $\{k_n\}$ posloupnost přirozených čísel taková, že každé přirozené číslo je v ní obsaženo právě jednou. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ nazveme **přerovnáním řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Věta 7.9 (přerovnání řady)

Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je absolutně konvergentní. Potom každé její přerovnání* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ *je absolutně konvergentní a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}.$$

8.1 Primitivní funkce

Definice

Nechť funkce f je definována na otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je **primitivní funkce k** f **na** I, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

8.1 Primitivní funkce

Definice

Nechť funkce f je definována na otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je **primitivní funkce k f na I**, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Věta 8.1

Nechť F a G jsou primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I. Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.

Věta 8.2

Nechť f je spojitá funkce na otevřeném neprázdném intervalu I. Pak f má na I primitivní funkci.

Věta 8.2

Nechť f je spojitá funkce na otevřeném neprázdném intervalu I. Pak f má na I primitivní funkci.

Věta 8.2

Nechť f je spojitá funkce na otevřeném neprázdném intervalu I. Pak f má na I primitivní funkci.

Věta 8.3

Nechť f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F, funkce g má na I primitivní funkci G a $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Potom funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I.

Věta 8.4 (o substituci)

(i) *Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Nechť φ je funkce definovaná na (α, β) s hodnotami v intervalu (a, b), která má v každém bodě $t \in (\alpha, \beta)$ vlastní derivaci. Pak*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt \stackrel{c}{=} F(\varphi(t)) \text{ na } (\alpha, \beta).$$

Věta 8.4 (o substituci)

(i) *Nechť F je primitivní funkce k f na (a, b). Nechť φ je funkce definovaná na (α, β) s hodnotami v intervalu (a, b), která má v každém bodě $t \in (\alpha, \beta)$ vlastní derivaci. Pak*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \overset{c}{=} F(\varphi(t)) \text{ na } (\alpha, \beta).$$

(ii) *Nechť funkce φ má v každém bodě intervalu (α, β) nenulovou vlastní derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Nechť funkce f je definována na intervalu (a, b) a platí*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \overset{c}{=} G(t) \text{ na } (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x)\,dx \overset{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)) \text{ na } (a, b).$$

Věta 8.5 (integrace per partes)

Nechť I je otevřený interval a funkce f a g jsou spojité na I. Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí

$$\int g(x)F(x)\,dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,dx \text{ na } I.$$

Definice

Racionální funkcí budeme rozumět podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule.

Definice

Racionální funkcí budeme rozumět podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule.

Věta 8.6 (základní věta algebry)

Nechť $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ *je polynom stupně* n *s reálnými koeficienty. Pak existují čísla* $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{C}$ *taková, že*

$$P(x) = a_n(x - x_1)\dots(x - x_n), \qquad x \in \mathbf{R}.$$

Věta 8.7

Nechť P je polynom s reálnými koeficienty a $z \in \mathbf{C}$ je kořen P násobnosti $k \in \mathbf{N}$. Pak i $\overline{z}$ je kořen P násobnosti k.

Důsledek 8.8

Nechť $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ *je polynom stupně* n *s reálnými koeficienty. Pak existují reálná čísla* $x_1, \ldots, x_k$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, $\beta_1, \ldots, \beta_l$ *a přirozená čísla* $p_1, \ldots, p_k$, $q_1, \ldots, q_l$ *taková, že*

(i) $P(x) = a_n (x - x_1)^{p_1} \ldots (x - x_k)^{p_k} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \ldots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,

Důsledek 8.8

Nechť $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně n s reálnými koeficienty. Pak existují reálná čísla $x_1, \ldots, x_k$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, $\beta_1, \ldots, \beta_l$ a přirozená čísla $p_1, \ldots, p_k$, $q_1, \ldots, q_l$ taková, že

(i) $P(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \ldots (x - x_k)^{p_k}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \ldots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,

(ii) *žádné dva z mnohočlenů* $x - x_1$, $x - x_2, \ldots, x - x_k$, $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1$, $\ldots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ *nemají společný kořen,*

Důsledek 8.8

Nechť $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně n s reálnými koeficienty. Pak existují reálná čísla $x_1, \ldots, x_k$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$, $\beta_1, \ldots, \beta_l$ a přirozená čísla $p_1, \ldots, p_k$, $q_1, \ldots, q_l$ taková, že

(i) $P(x) = a_n (x - x_1)^{p_1} \ldots (x - x_k)^{p_k} (x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \ldots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,

(ii) *žádné dva z mnohočlenů* $x - x_1$, $x - x_2, \ldots, x - x_k$, $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \ldots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ *nemají společný kořen,*

(iii) *mnohočleny* $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \ldots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ *nemají žádný reálný kořen.*

Věta 8.9 (o rozkladu na parciální zlomky)

Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že

(i) *stupeň P je ostře menší než stupeň Q,*

Věta 8.9 (o rozkladu na parciální zlomky)

Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že

(i) *stupeň P je ostře menší než stupeň Q,*

(ii) $Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_k)^{p_k}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \dots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,

Věta 8.9 (o rozkladu na parciální zlomky)

Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že

(i) *stupeň P je ostře menší než stupeň Q,*

(ii) $Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_k)^{p_k}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \dots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,

(iii) $a_n,\ x_1, \dots x_k,\ \alpha_1, \dots, \alpha_l,\ \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbf{R},\ a_n \neq 0$,

Věta 8.9 (o rozkladu na parciální zlomky)

Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že

(i) *stupeň P je ostře menší než stupeň Q,*

(ii) $Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_k)^{p_k}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \dots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,

(iii) a_n, $x_1, \dots x_k$, $\alpha_1, \dots, \alpha_l$, $\beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbf{R}$, $a_n \neq 0$,

(iv) $p_1, \dots, p_k$, $q_1, \dots, q_l \in \mathbf{N}$,

Věta 8.9 (o rozkladu na parciální zlomky)

Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že

(i) *stupeň P je ostře menší než stupeň Q,*

(ii) $Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_k)^{p_k}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \dots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,

(iii) $a_n,\ x_1, \dots x_k,\ \alpha_1, \dots, \alpha_l,\ \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbf{R},\ a_n \neq 0$,

(iv) $p_1, \dots, p_k,\ q_1, \dots, q_l \in \mathbf{N}$,

(v) *žádné dva z mnohočlenů* $x - x_1,\ x - x_2, \dots, x - x_k,\ x^2 + \alpha_1 x + \beta_1,\ \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ *nemají společný kořen,*

Věta 8.9 (o rozkladu na parciální zlomky)

Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že

(i) *stupeň P je ostře menší než stupeň Q,*

(ii) $Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_k)^{p_k}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \dots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,

(iii) $a_n,\ x_1, \dots x_k,\ \alpha_1, \dots, \alpha_l,\ \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbf{R},\ a_n \neq 0$,

(iv) $p_1, \dots, p_k,\ q_1, \dots, q_l \in \mathbf{N}$,

(v) *žádné dva z mnohočlenů* $x - x_1,\ x - x_2, \dots, x - x_k,\ x^2 + \alpha_1 x + \beta_1,\ \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ *nemají společný kořen,*

(vi) *mnohočleny* $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1,\ \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ *nemají reálný kořen.*

Pak existují jednoznačně určená čísla $A_1^1, \ldots, A_{p_1}^1$, $\ldots, A_1^k, \ldots, A_{p_k}^k$, B_1^1, $C_1^1, \ldots, B_{q_1}^1$, $C_{q_1}^1, \ldots, B_1^l$, $C_1^l, \ldots, B_{q_l}^l$, $C_{q_l}^l$ taková, že platí

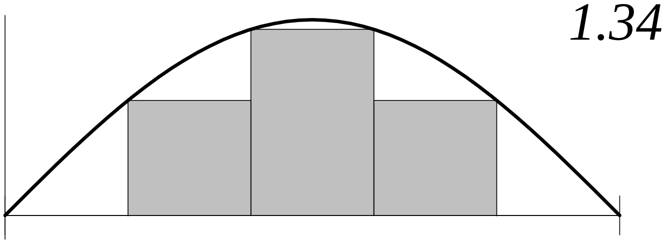
$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1^1}{(x-x_1)^{p_1}} + \cdots + \frac{A_{p_1}^1}{(x-x_1)} \\ & + \cdots + \frac{A_1^k}{(x-x_k)^{p_k}} + \cdots + \frac{A_{p_k}^k}{x-x_k} \\ & + \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}} + \cdots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1} + \ldots \\ & + \frac{B_1^l x + C_1^l}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}} + \cdots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{x^2+\alpha_l x+\beta_l}.\end{aligned}$$

Pak existují jednoznačně určená čísla $A_1^1, \dots, A_{p_1}^1$, $\dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k$, B_1^1, $C_1^1, \dots, B_{q_1}^1$, $C_{q_1}^1, \dots, B_1^l$, $C_1^l, \dots, B_{q_l}^l$, $C_{q_l}^l$ taková, že platí

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1^1}{(x-x_1)^{p_1}} + \dots + \frac{A_{p_1}^1}{(x-x_1)} \\ & + \dots + \frac{A_1^k}{(x-x_k)^{p_k}} + \dots + \frac{A_{p_k}^k}{x-x_k} \\ & + \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}} + \dots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1} + \dots \\ & + \frac{B_1^l x + C_1^l}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}} + \dots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{x^2+\alpha_l x+\beta_l}.\end{aligned}$$

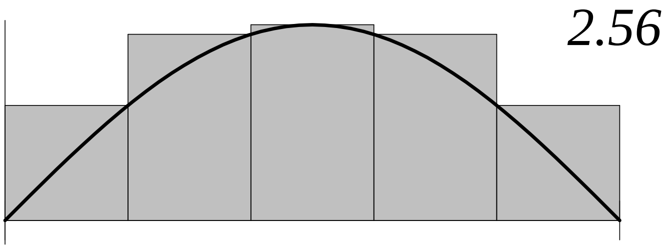
8.2 Riemannův integrál

$f(x) = \sin x$ na $[0, \pi]$



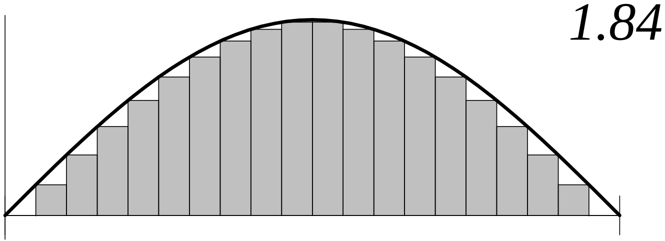
8.2 Riemannův integrál

$$f(x) = \sin x \text{ na } [0, \pi]$$



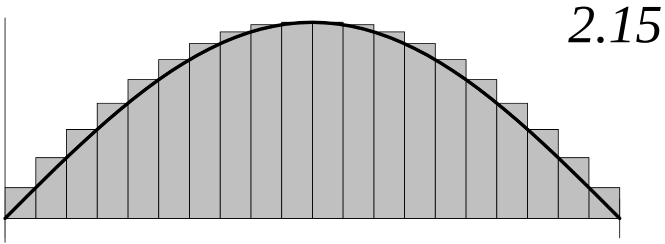
8.2 Riemannův integrál

$$f(x) = \sin x \text{ na } [0, \pi]$$



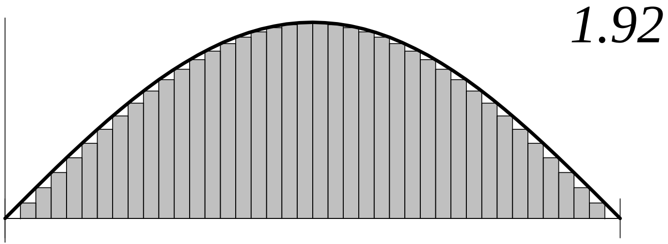
8.2 Riemannův integrál

$$f(x) = \sin x \text{ na } [0, \pi]$$



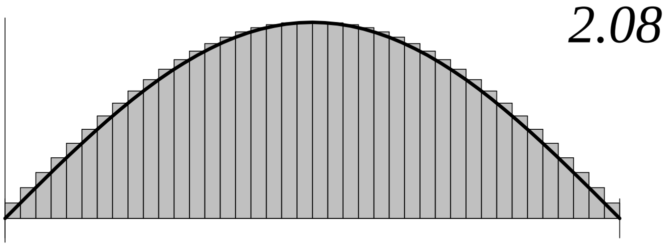
8.2 Riemannův integrál

$$f(x) = \sin x \text{ na } [0, \pi]$$



8.2 Riemannův integrál

$$f(x) = \sin x \text{ na } [0, \pi]$$



Definice

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ nazýváme **dělením intervalu** $\langle a, b \rangle$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Body $x_0, \ldots, x_n$ nazýváme **dělicími body**. Řekneme, že dělení D' intervalu $\langle a, b \rangle$ je **zjemněním dělení** D intervalu $\langle a, b \rangle$, jestliže každý dělicí bod D je i dělicím bodem D'.

Definice

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, funkce f je omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $\langle a, b\rangle$. Označme

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } M_j = \sup_{\langle x_{j-1}, x_j\rangle} f,$$

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } m_j = \inf_{\langle x_{j-1}, x_j\rangle} f,$$

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\big\{\overline{S}(f, D);\ D \text{ je dělením intervalu } \langle a, b\rangle\big\},$$

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\big\{\underline{S}(f, D);\ D \text{ je dělením intervalu } \langle a, b\rangle\big\}.$$

Řekneme, že funkce f má **Riemannův integrál** na intervalu $\langle a, b\rangle$, pokud $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. Hodnota integrálu funkce f přes interval $\langle a, b\rangle$ je pak rovna společné hodnotě $\overline{\int_a^b} f$ a $\underline{\int_a^b} f$ a značíme ji $\int_a^b f$. Pokud $a > b$, definujeme $\int_a^b f = -\int_b^a f$, a v případě, že $a = b$, definujeme $\int_a^b f = 0$.

Lemma 8.10 (kritérium existence Riemannova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a f je funkce omezená na intervalu $\langle a, b\rangle$.

(i) $\int_a^b f = I \in \mathbf{R}$ *právě tehdy, když ke každému* $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, *existuje dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ takové, že*

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon.$$

Lemma 8.10 (kritérium existence Riemannova integrálu)

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a* f *je funkce omezená na intervalu* $\langle a, b\rangle$.

(i) $\int_a^b f = I \in \mathbf{R}$ *právě tehdy, když ke každému* $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, *existuje dělení* D *intervalu* $\langle a, b\rangle$ *takové, že*

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon.$$

(ii) *Funkce* f *má na* $\langle a, b\rangle$ *Riemannův integrál právě tehdy, když ke každému* $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, *existuje dělení* D *intervalu* $\langle a, b\rangle$ *takové, že*

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Věta 8.11

(i) *Nechť funkce f má Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$. Pak f má Riemannův integrál i na intervalu $\langle c, d\rangle$.*

Věta 8.11

(i) *Nechť funkce f má Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $\langle c, d\rangle \subset \langle a, b\rangle$. Pak f má Riemannův integrál i na intervalu $\langle c, d\rangle$.*

(ii) *Nechť $c \in (a, b)$ a funkce f má Riemannův integrál na intervalech $\langle a, c\rangle$ a $\langle c, b\rangle$. Pak f má Riemannův integrál na $\langle a, b\rangle$ a platí*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Věta 8.12 (linearita Riemannova integrálu)

Nechť f a g jsou funkce mající Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $\alpha \in \mathbf{R}$. Potom

(i) *funkce αf má Riemannův integrál na $\langle a, b\rangle$ a platí*

$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f,$$

Věta 8.12 (linearita Riemannova integrálu)

Nechť f a g jsou funkce mající Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť $\alpha \in \mathbf{R}$. Potom

(i) *funkce αf má Riemannův integrál na $\langle a, b\rangle$ a platí*

$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f,$$

(ii) *funkce $f + g$ má Riemannův integrál na $\langle a, b\rangle$ a platí*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g. \tag{2}$$

Věta 8.13

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a nechť* f *a* g *jsou funkce mající Riemannův integrál na intervalu* $\langle a, b \rangle$. *Potom platí:*

(i) *Je-li* $f(x) \leq g(x)$ *pro každé* $x \in \langle a, b \rangle$, *pak* $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Věta 8.13

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a nechť* f *a* g *jsou funkce mající Riemannův integrál na intervalu* $\langle a, b\rangle$. *Potom platí:*

(i) *Je-li* $f(x) \leq g(x)$ *pro každé* $x \in \langle a, b\rangle$, *pak* $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

(ii) *Funkce* $|f|$ *má Riemannův integrál na* $\langle a, b\rangle$ *a platí* $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

Věta 8.13

Nechť $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, *a nechť* f *a* g *jsou funkce mající Riemannův integrál na intervalu* $\langle a, b\rangle$. *Potom platí:*

(i) *Je-li* $f(x) \leq g(x)$ *pro každé* $x \in \langle a, b\rangle$, *pak* $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

(ii) *Funkce* $|f|$ *má Riemannův integrál na* $\langle a, b\rangle$ *a platí* $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

Definice

Řekneme, že funkce f je **stejnoměrně spojitá na intervalu** I, jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0\, \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0\, \forall x, y \in I, |x-y| < \delta : |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

Věta 8.14

Je-li funkce f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, pak je stejnoměrně spojitá na $\langle a, b \rangle$.

Věta 8.14

Je-li funkce f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, pak je stejnoměrně spojitá na $\langle a, b\rangle$.

Věta 8.15

Nechť funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak f má Riemannův integrál na $\langle a, b\rangle$.

Věta 8.16

Nechť f je spojitá funkce na intervalu (a, b) a nechť $c \in (a, b)$. Označíme-li $F(x) = \int_c^x f$ pro $x \in (a, b)$, pak $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$, neboli funkce F je primitivní k f na (a, b).

Věta 8.16

Nechť f je spojitá funkce na intervalu (a, b) a nechť $c \in (a, b)$. Označíme-li $F(x) = \int_c^x f$ pro $x \in (a, b)$, pak $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$, neboli funkce F je primitivní k f na (a, b).

Věta 8.17 (Newtonova-Leibnizova formule)

Nechť f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, $a < b$, a F je primitivní funkce k f na (a, b). Pak existují vlastní limity $\lim_{x\to a+} F(x)$, $\lim_{x\to b-} F(x)$ a platí

$$\int_a^b f = \lim_{x\to b-} F(x) - \lim_{x\to a+} F(x).$$