

4 Funkce více proměnných

4.1 \mathbf{R}^n jako metrický a lineární prostor

Definice. Množinou \mathbf{R}^n , $n \in \mathbf{N}$, rozumíme množinu všech uspořádaných n -tic reálných čísel.

Definice. Euklidovskou metrikou (vzdáleností) na \mathbf{R}^n rozumíme funkci $\rho: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$ definovanou předpisem

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}.$$

Číslo $\rho(x, y)$ nazýváme **vzdáleností bodu x od bodu y** .

Věta 4.1 (vlastnosti euklidovské metriky). *Euklidovská metrika ρ má následující vlastnosti:*

- (i) $\forall x, y \in \mathbf{R}^n: \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
- (ii) $\forall x, y \in \mathbf{R}^n: \rho(x, y) = \rho(y, x)$,
- (iii) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}^n: \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (*trojúhelníková nerovnost*),
- (iv) $\forall x, y \in \mathbf{R}^n \forall \lambda \in \mathbf{R}: \rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x, y)$,
- (v) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}^n: \rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$.

Definice. Necht' $x \in \mathbf{R}^n$, $r > 0$. Množinu $B(x, r)$ definovanou předpisem

$$B(x, r) = \{y \in \mathbf{R}^n; \rho(x, y) < r\}$$

nazýváme **otevřenou koulí o poloměru r a středu x** nebo také **okolím bodu x** .

Definice. Necht' $M \subset \mathbf{R}^n$, $x \in \mathbf{R}^n$. Řekneme, že $x \in \mathbf{R}^n$ je **vnitřním bodem množiny M** , jestliže existuje $r > 0$ takové, že $B(x, r) \subset M$.

Definice. Množina $M \subset \mathbf{R}^n$ se nazývá **otevřená v \mathbf{R}^n** , jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem. Doplnky otevřených množin (tj. množiny tvaru $\mathbf{R}^n \setminus G$, kde G je otevřená množina) nazýváme **uzavřenými množinami v \mathbf{R}^n** .

Věta 4.2 (vlastnosti otevřených množin).

- (i) *Prázdná množina a celý prostor \mathbf{R}^n jsou otevřené v \mathbf{R}^n .*
- (ii) *Necht' množiny $G_\alpha \subset \mathbf{R}^n$, $\alpha \in A$, jsou otevřené v \mathbf{R}^n . Pak $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ je otevřená množina v \mathbf{R}^n .*
- (iii) *Necht' množiny G_i , $i = 1, \dots, m$, jsou otevřené. Pak $\bigcap_{i=1}^m G_i$ je otevřená množina v \mathbf{R}^n .*

Věta 4.3 (vlastnosti uzavřených množin).

- (i) Prázdná množina a celý prostor \mathbf{R}^n jsou uzavřené v \mathbf{R}^n .
- (ii) Necht' množiny $F_\alpha \subset \mathbf{R}^n$, $\alpha \in A$, $A \neq \emptyset$, jsou uzavřené v \mathbf{R}^n . Pak $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ je uzavřená množina v \mathbf{R}^n .
- (iii) Necht' množiny F_i , $i = 1, \dots, m$, jsou uzavřené. Pak $\bigcup_{i=1}^m F_i$ je uzavřená množina v \mathbf{R}^n .

Definice. Necht' $M \subset \mathbf{R}^n$ a $x \in \mathbf{R}^n$. Řekneme, že x je **hraničním bodem** množiny M , pokud pro každé $r > 0$ platí $B(x, r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x, r) \cap (\mathbf{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$. **Hranicí množiny** M rozumíme množinu všech hraničních bodů M . Značíme ji $H(M)$.

Definice. Necht' $M \subset \mathbf{R}^n$. **Vnitřkem** množiny M rozumíme množinu všech vnitřních bodů množiny M . **Uzávěrem** množiny M rozumíme množinu $M \cup H(M)$. Vnitřek množiny M budeme značit $\text{int } M$ a pro uzávěr množiny M vyhradíme symbol \overline{M} .

Definice. Řekneme, že množina M je **omezená v \mathbf{R}^n** , jestliže existuje $r > 0$ tak, že $M \subset B(\mathbf{o}, r)$.

4.2 Spojitost funkcí z \mathbf{R}^n

Definice. Necht' $M \subset \mathbf{R}^n$, $x \in M$ a $f: M \rightarrow \mathbf{R}$. Řekneme, že f je **spojitá v bodě x vzhledem k M** , jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \forall y \in B(x, \delta) \cap M: f(y) \in B(f(x), \varepsilon).$$

Definice. Necht' $x^j \in \mathbf{R}^n$ pro každé $j \in \mathbf{N}$ a $x \in \mathbf{R}^n$. Říkáme, že posloupnost $\{x^j\}_{j=1}^\infty$ **konverguje k x** , pokud $\lim_{j \rightarrow \infty} \rho(x, x^j) = 0$. Značíme $x^j \rightarrow x$. Prvek x nazýváme **limitou posloupnosti** $\{x^j\}_{j=1}^\infty$.

Věta 4.4. Necht' $x^j \in \mathbf{R}^n$ pro každé $j \in \mathbf{N}$ a $x \in \mathbf{R}^n$. Posloupnost $\{x^j\}_{j=1}^\infty$ konverguje k x právě tehdy, když posloupnost $\{x_i^j\}_{j=1}^\infty$ konverguje k x_i pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$.

————— Konec 1. přednášky, 21. 2. 2024 —————

Věta 4.5 (Heine). Necht' $M \subset \mathbf{R}^n$, $x \in M$ a $f: M \rightarrow \mathbf{R}$. Pak je ekvivalentní:

- (i) f je spojité v x vzhledem k M ,
- (ii) $\lim_{j \rightarrow \infty} f(x^j) = f(x)$ pro každou posloupnost $\{x^j\}_{j=1}^\infty$ splňující $x^j \in M$ pro $j \in \mathbf{N}$ a $\lim_{j \rightarrow \infty} x^j = x$.

Definice. Necht' $M \subset \mathbf{R}^n$ a $f: M \rightarrow \mathbf{R}$. Řekneme, že f je **spojitá na M** , jestliže je spojité v každém bodě $x \in M$ vzhledem k M .

Definice. Množinu $M \subset \mathbf{R}^n$ nazýváme **kompaktní**, pokud z každé posloupnosti prvků množiny M lze vybrat konvergentní posloupnost s limitou v M .

————— Konec 2. přednášky, 23. 2. 2024 —————

Lemma 4.6. Necht' $F \subset \mathbf{R}^n$ je uzavřená množina a $\{x^j\}$ je posloupnost prvků množiny F mající limitu $x \in \mathbf{R}^n$. Pak $x \in F$.

Věta 4.7 (charakterizace kompaktních množin v \mathbf{R}^n). Množina $M \subset \mathbf{R}^n$ je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená.

Definice. Necht' $M \subset \mathbf{R}^n$, $x \in M$ a f je funkce definovaná alespoň na M (tj. $M \subset D_f$). Řekneme, že f nabývá v bodě x **maxima (minima) na M** , jestliže platí

$$\begin{aligned} \forall y \in M: f(y) \leq f(x) \\ (\forall y \in M: f(y) \geq f(x)). \end{aligned}$$

Řekneme, že f má v bodě x **lokální maximum (lokální minimum) vzhledem k M** , jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\begin{aligned} \forall y \in B(x, \delta) \cap M: f(y) \leq f(x) \\ (\forall y \in B(x, \delta) \cap M: f(y) \geq f(x)). \end{aligned}$$

Definice. Řekneme, že f má v bodě x **ostré lokální maximum (ostré lokální minimum) vzhledem k M** , jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\begin{aligned} \forall y \in (B(x, \delta) \setminus \{x\}) \cap M: f(y) < f(x) \\ (\forall y \in (B(x, \delta) \setminus \{x\}) \cap M: f(y) > f(x)). \end{aligned}$$

————— Konec 3. přednášky, 28. 2. 2024 —————

Věta 4.8. Necht' $M \subset \mathbf{R}^n$ je neprázdná kompaktní množina a $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitá na M . Pak f nabývá na M svého maxima i minima.

Důsledek 4.9. Necht' $M \subset \mathbf{R}^n$ je neprázdná kompaktní množina a $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ je spojitá na M . Pak f je omezená na M .

4.3 Parciální derivace

Definice. Necht' f je funkce n proměnných, $j \in \{1, \dots, n\}$ a $a \in \mathbf{R}^n$. Pak číslo

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + te^j) - f(a)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{t} \end{aligned}$$

nazýváme **parciální derivací (prvního řádu) funkce f podle j -té proměnné v bodě a** (pokud limita existuje).

Definice. Necht' $G \subset \mathbf{R}^n$ je neprázdná a otevřená. Necht' funkce f má v každém bodě množiny G spojité všechny parciální derivace (tj. funkce $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, $j = 1, \dots, n$, jsou spojité v každém bodě G). Pak říkáme, že funkce f je **třídy \mathcal{C}^1 na G** . Značíme $f \in \mathcal{C}^1(G)$.

Definice. Necht' $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $a \in G$ a $f \in \mathcal{C}^1(G)$. Pak graf funkce

$$T: x \mapsto f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)(x_2 - a_2) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n), \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

se nazývá **tečnou nadrovinou** ke grafu funkce f v bodě $[a, f(a)]$.

Věta 4.10. Necht' $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $f \in \mathcal{C}^1(G)$. Pak f je spojitá na G .

Definice. Necht' $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $a \in G$ a $f \in \mathcal{C}^1(G)$. **Gradientem funkce f v bodě a** rozumíme vektor

$$\nabla f(a) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \right].$$

————— Konec 4. přednášky, 1. 3. 2024 —————

Věta 4.11. Necht' $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená, $a \in G$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Necht' funkce $f: G \rightarrow \mathbf{R}$ má v bodě a lokální extrém (vzhledem ke G). Pak buď $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ neexistuje nebo je rovna nule.

Věta 4.12 (derivace složené funkce). Necht' $r, s \in \mathbf{N}$ a necht' $G \subset \mathbf{R}^s$, $H \subset \mathbf{R}^r$ jsou otevřené množiny. Necht' $\varphi_1, \dots, \varphi_r \in \mathcal{C}^1(G)$ a $f \in \mathcal{C}^1(H)$. Je-li složená funkce $F: G \rightarrow \mathbf{R}$ určená předpisem

$$F(x) = f(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_r(x))$$

definována na G , pak $F \in \mathcal{C}^1(G)$. Pro $a \in G$ označme $b = [\varphi_1(a), \dots, \varphi_r(a)]$. Pak pro $j \in \{1, \dots, s\}$ platí

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^r \frac{\partial f}{\partial y_i}(b) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a).$$

————— Konec 5. přednášky, 6. 3. 2024 —————

Věta 4.13. Necht' $i, j \in \mathbf{N}$, $i \leq n$, $j \leq n$ a funkce f má na okolí bodu $a \in \mathbf{R}^n$ obě derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, a tyto jsou v bodě a spojité. Pak platí $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

Definice. Necht' $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina. Řekneme, že funkce f je **třídy \mathcal{C}^∞ na G** , má-li f všechny parciální derivace všech řádů spojité na množině G . Značíme $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$.

4.4 Věta o implicitních funkcích

Věta 4.14. Necht' $G \subset \mathbf{R}^{n+1}$ je otevřená množina, $F: G \rightarrow \mathbf{R}$, $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbf{R}$, $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ a necht' platí:

- (i) $F \in \mathcal{C}^1(G)$,
- (ii) $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$,
- (iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq 0$.

Pak existuje okolí $U \subset \mathbf{R}^n$ bodu \tilde{x} a okolí $V \subset \mathbf{R}$ bodu \tilde{y} tak, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F(x, y) = 0$ a píšeme-li $y = \varphi(x)$, pak $\varphi \in \mathcal{C}^1(U)$ a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))},$$

kde $j \in \{1, \dots, n\}$, $x \in U$.

————— Konec 6. přednášky, 8. 3. 2024 —————

Věta 4.15. Necht' $G \subset \mathbf{R}^{n+m}$ je otevřená množina, $F_j: G \rightarrow \mathbf{R}$, $j = 1, \dots, m$, $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbf{R}^m$, $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in G$ a necht' platí:

- (i) $F_j \in \mathcal{C}^1(G)$ pro $j \in \{1, \dots, m\}$,
- (ii) $F_j(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ pro $j \in \{1, \dots, m\}$,
- (iii) $\left| \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_m)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_m)} \right|_{(\tilde{x}, \tilde{y})} \neq 0$.

Pak existuje okolí $U \subset \mathbf{R}^n$ bodu \tilde{x} a okolí $V \subset \mathbf{R}^m$ bodu \tilde{y} tak, že pro každé $x \in U$ existuje právě jedno $y \in V$ s vlastností $F_j(x, y) = 0$ pro každé $j \in \{1, \dots, m\}$ a píšeme-li $y_j = \varphi_j(x)$, $j \in \{1, \dots, m\}$, pak $\varphi_j \in \mathcal{C}^1(U)$.

4.5 Lagrangeova věta o multipliktorech

Věta 4.16. Necht' $G \subset \mathbf{R}^2$ je otevřená množina, $f, g \in \mathcal{C}^1(G)$, $M = \{[x, y] \in G; g(x, y) = 0\}$ a $[\tilde{x}, \tilde{y}] \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M .

Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(I)

$$\nabla g(\tilde{x}, \tilde{y}) = \mathbf{o},$$

(II) existuje reálné číslo $\lambda \in \mathbf{R}$ splňující

$$\nabla f(\tilde{x}, \tilde{y}) + \lambda \cdot \nabla g(\tilde{x}, \tilde{y}) = \mathbf{o}.$$

————— Konec 7. přednášky, 13. 3. 2024 —————

Věta 4.17. Necht' $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina, $f, g_1, \dots, g_m \in \mathcal{C}^1(G)$, $m < n$,

$$M = \{z \in G; g_1(z) = 0, g_2(z) = 0, \dots, g_m(z) = 0\}$$

a bod $\tilde{z} \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k M .

Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(I) vektory

$$\nabla g_1(\tilde{z}), \nabla g_2(\tilde{z}), \dots, \nabla g_m(\tilde{z})$$

jsou lineárně závislé,

(II) existují reálná čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ splňující

$$\nabla f(\tilde{z}) + \lambda_1 \cdot \nabla g_1(\tilde{z}) + \lambda_2 \cdot \nabla g_2(\tilde{z}) + \dots + \lambda_m \cdot \nabla g_m(\tilde{z}) = \mathbf{0}.$$

————— Konec 8. přednášky, 13. 3. 2024 —————

4.6 Funkce konkávní a kvazikonkávní

Definice. Necht' $M \subset \mathbf{R}^n$. Řekneme, že M je **konvexní** množina, jestliže platí:

$$\forall x, y \in M \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : tx + (1 - t)y \in M.$$

Věta 4.18 (o střední hodnotě). Necht' $G \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní otevřená množina, $f \in \mathcal{C}^1(G)$, $a \in G, b \in G$. Pak existuje $t_0 \in (0, 1)$ tak, že

$$f(a) - f(b) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(t_0 a + (1 - t_0)b)(a_i - b_i).$$

Definice. Necht' $M \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní množina a funkce f je definována na M . Řekneme, že f je

- **konkávní** funkce na M , jestliže

$$\forall a, b \in M \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : f(ta + (1 - t)b) \geq tf(a) + (1 - t)f(b),$$

- **ryze konkávní** funkce na M , jestliže

$$\forall a, b \in M, a \neq b \forall t \in (0, 1) : f(ta + (1 - t)b) > tf(a) + (1 - t)f(b),$$

- **kvazikonkávní** na M , jestliže

$$\forall a, b \in M, f(b) \geq f(a) \forall t \in \langle 0, 1 \rangle : f(ta + (1 - t)b) \geq f(a),$$

- ryze kvazikonkávni na M , jestliže

$$\forall a, b \in M, a \neq b, f(b) \geq f(a) \forall t \in (0, 1): f(ta + (1-t)b) > f(a).$$

Věta 4.19. Necht' $M \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní množina a f je funkce definovaná na M . Pak platí:

- (i) Je-li f konkávní na M , pak je i kvazikonkávni na M .
- (ii) Je-li f ryze konkávní na M , pak je i ryze kvazikonkávni na M .

Věta 4.20. Necht' funkce f je konkávní na otevřené konvexní množině G . Pak f je spojitá na G .

Věta 4.21. Necht' funkce f je konkávní na konvexní množině M . Pak pro každé $\alpha \in \mathbf{R}$ je množina $Q_\alpha = \{x \in M; f(x) \geq \alpha\}$ konvexní.

Věta 4.22. Necht' $G \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní otevřená množina a $f \in \mathcal{C}^1(G)$. Pak je funkce f konkávní na G právě tehdy, když platí

$$\forall x, y \in G: f(y) \leq f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(y_i - x_i).$$

————— Konec 9. přednášky, 20. 3. 2024 —————

Věta 4.23. Necht' $G \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní otevřená množina a $f \in \mathcal{C}^1(G)$ je konkávní na G . Je-li $a \in G$ stacionárním bodem funkce f , pak je a bodem maxima funkce f .

Věta 4.24. Necht' $G \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní otevřená množina a $f \in \mathcal{C}^1(G)$. Pak je funkce f ryze konkávní na G právě tehdy, když

$$\forall x, y \in G, x \neq y: f(y) < f(x) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)(y_i - x_i).$$

Věta 4.25. Necht' $M \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní množina a f je funkce definovaná na M . Funkce f je kvazikonkávni na M právě tehdy, když pro každé $\alpha \in \mathbf{R}$ je množina

$$Q_\alpha = \{x \in M; f(x) \geq \alpha\}$$

konvexní.

Věta 4.26. Necht' f je ryze kvazikonkávni funkce na konvexní množině $M \subset \mathbf{R}^n$. Pokud f nabývá na M svého maxima, pak ho nabývá právě v jednom bodě.

Důsledek 4.27. Necht' $M \subset \mathbf{R}^n$ je konvexní, omezená, uzavřená a neprázdná množina a f je spojitá a ryze kvazikonkávni funkce na M . Pak f nabývá maxima na M právě v jednom bodě.

5 Maticový počet

5.1 Základní operace s maticemi

Definice. Tabulku

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

kde $a_{ij} \in \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, nazýváme **maticí typu** $m \times n$. Je-li $m = n$, pak mluvíme o **čtvercové matici řádu** n . Množinu všech matic typu $m \times n$ značíme $M(m \times n)$.

O n -tici čísel

$$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}),$$

kde $i \in \{1, \dots, m\}$, mluvíme jako o **i -tém řádku** matice (1Doc-Start) a o m -tici čísel

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},$$

kde $j \in \{1, \dots, n\}$, jako o **j -tém sloupci** matice (1Doc-Start). Matici (1Doc-Start) značíme také symbolem $(a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$.

Definice. Řekneme, že matice $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$, $\mathbb{B} = (b_{uv})_{\substack{u=1..p \\ v=1..s}}$ se rovnají, jestliže platí $m = p$, $n = s$ a $a_{ij} = b_{ij}$ pro každé $i \in \{1, \dots, m\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Definice. Necht' $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(m \times n)$, $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$, $\mathbb{B} = (b_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Pak **součtem matic** \mathbb{A} a \mathbb{B} rozumíme matici

$$\mathbb{A} + \mathbb{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ a_{31} + b_{31} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Součinem reálného čísla λ a matice \mathbb{A} rozumíme matici

$$\lambda \mathbb{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \lambda a_{31} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Definice. Necht' $\mathbb{A} = (a_{is})_{\substack{i=1..m \\ s=1..n}}$ je matice typu $m \times n$ a $\mathbb{B} = (b_{sj})_{\substack{s=1..n \\ j=1..k}}$ je matice typu $n \times k$.

Součinem matic \mathbb{A} a \mathbb{B} rozumíme matici $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B} = (c_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..k}}$ typu $m \times k$, kde

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is}b_{sj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, k.$$

Zpravidla budeme psát místo $\mathbb{A} \cdot \mathbb{B}$ pouze $\mathbb{A}\mathbb{B}$.

Věta 5.1. Platí:

- $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(m \times n): \mathbb{A} + \mathbb{B} = \mathbb{B} + \mathbb{A}$ (komutativita),
- $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in M(m \times n): \mathbb{A} + (\mathbb{B} + \mathbb{C}) = (\mathbb{A} + \mathbb{B}) + \mathbb{C}$ (asociativita),
- existuje právě jedna matice $\mathbb{O} \in M(m \times n)$, která splňuje $\mathbb{O} + \mathbb{A} = \mathbb{A}$ pro každé $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ (existence nulového prvku),
- $\forall \mathbb{A} \in M(m \times n) \exists \mathbb{C}_{\mathbb{A}} \in M(m \times n): \mathbb{A} + \mathbb{C}_{\mathbb{A}} = \mathbb{O}$ (existence opačného prvku),
- $\forall \mathbb{A} \in M(m \times n) \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}: (\lambda + \mu)\mathbb{A} = \lambda\mathbb{A} + \mu\mathbb{A}$,
- $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(m \times n) \forall \lambda \in \mathbf{R}: \lambda(\mathbb{A} + \mathbb{B}) = \lambda\mathbb{A} + \lambda\mathbb{B}$,
- $\forall \mathbb{A} \in M(m \times n) \forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}: (\lambda\mu)\mathbb{A} = \lambda(\mu\mathbb{A})$,
- $\forall \mathbb{A} \in M(m \times n): 1 \cdot \mathbb{A} = \mathbb{A}$.

————— Konec 10. přednášky, 22. 3. 2024 —————

Věta 5.2 (vlastnosti maticového násobení). Platí:

- (i) $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in M(n \times n): (\mathbb{A}\mathbb{B})\mathbb{C} = \mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{C})$,
- (ii) $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in M(n \times n): \mathbb{A}(\mathbb{B} + \mathbb{C}) = \mathbb{A}\mathbb{B} + \mathbb{A}\mathbb{C}$,
- (iii) $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C} \in M(n \times n): (\mathbb{A} + \mathbb{B})\mathbb{C} = \mathbb{A}\mathbb{C} + \mathbb{B}\mathbb{C}$,
- (iv) $\exists \mathbb{I} \in M(n \times n) \forall \mathbb{A} \in M(n \times n): \mathbb{I}\mathbb{A} = \mathbb{A}\mathbb{I} = \mathbb{A}$ (existence a jednoznačnost **jednotkové matice** \mathbb{I}).

Definice. Transponovanou maticí k matici

$$\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..m \\ j=1..n}}$$

rozumíme matici

$$\mathbb{A}^T = (a_{uv}^t)_{\substack{u=1..n \\ v=1..m}}$$

kde $a_{uv}^t = a_{vu}$ pro každé $u \in \{1, \dots, n\}, v \in \{1, \dots, m\}$.

Věta 5.3 (vlastnosti transponovaných matic). *Platí:*

(i) $\forall \mathbb{A} \in M(m \times n): (\mathbb{A}^T)^T = \mathbb{A}$,

(ii) $\forall \mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(m \times n): (\mathbb{A} + \mathbb{B})^T = \mathbb{A}^T + \mathbb{B}^T$,

(iii) $\forall \mathbb{A} \in M(m \times k) \forall \mathbb{B} \in M(k \times n): (\mathbb{A}\mathbb{B})^T = \mathbb{B}^T \mathbb{A}^T$.

5.2 Regulární matice

Definice. Necht' $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Řekneme, že \mathbb{A} je **regulární**, pokud existuje $\mathbb{B} \in M(n \times n)$ taková, že

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}.$$

Definice. Necht' \mathbb{A} je regulární matice. Matici \mathbb{B} splňující $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{I}$ pak nazýváme **inverzní maticí** k matici \mathbb{A} . Značíme ji \mathbb{A}^{-1} .

Věta 5.4 (regularita a maticové operace). *Necht' $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(n \times n)$ jsou regulární matice. Pak platí:*

(i) \mathbb{A}^{-1} je regulární matice a $(\mathbb{A}^{-1})^{-1} = \mathbb{A}$,

(ii) \mathbb{A}^T je regulární matice a $(\mathbb{A}^T)^{-1} = (\mathbb{A}^{-1})^T$,

(iii) $\mathbb{A}\mathbb{B}$ je regulární matice a $(\mathbb{A}\mathbb{B})^{-1} = \mathbb{B}^{-1}\mathbb{A}^{-1}$.

Definice. Necht' $k, n \in \mathbf{N}$. Mějme řádkové vektory $\mathbf{v}^1 = (v_1^1, \dots, v_n^1), \dots, \mathbf{v}^k = (v_1^k, \dots, v_n^k)$. **Lineární kombinací** vektorů $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k$ rozumíme řádkový vektor tvaru

$$\lambda_1 \mathbf{v}^1 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}^k,$$

kde $\lambda_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, \dots, k$. **Triviální lineární kombinací** vektorů $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k$ rozumíme lineární kombinaci

$$0 \cdot \mathbf{v}^1 + \dots + 0 \cdot \mathbf{v}^k.$$

Definice. Řekneme, že vektory $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k$ jsou **lineárně nezávislé**, jestliže platí

$$\forall \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}: \lambda_1 \mathbf{v}^1 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}^k = \mathbf{o} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0,$$

neboli mezi všemi lineárními kombinacemi řádkových vektorů $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k$ je rovna nulovému řádkovému vektoru, který značíme \mathbf{o} , jenom triviální lineární kombinace.

————— Konec 11. přednášky, 26. 3. 2024 —————

Definice. Necht' $\mathbb{A} \in M(m \times n)$. **Hodností matice** \mathbb{A} rozumíme maximální počet lineárně nezávislých řádků (tj. řádkových vektorů). Hodnost matice \mathbb{A} značíme $h(\mathbb{A})$.

Definice. Řekneme, že matice $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ je **schodovitá**, jestliže pro každé $i \in \{2, \dots, m\}$ platí, že i -tý řádek matice \mathbb{A} je nulový nebo začíná větším počtem nul než $(i - 1)$ -ní řádek.

Definice. Elementárními řádkovými úpravami matice \mathbb{A} budeme rozumět:

- (i) záměnu dvou řádků,
- (ii) vynásobení řádku nenulovým číslem,
- (iii) přičtení násobku jednoho řádku k jinému řádku.

Definice. Transformací budeme rozumět konečnou posloupnost řádkových elementárních úprav. Jestliže matice $\mathbb{B} \in M(m \times n)$ vznikla z matice $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ aplikací transformace T na matici \mathbb{A} , pak tento fakt značíme takto: $\mathbb{A} \xrightarrow{T} \mathbb{B}$.

Věta 5.5 (vlastnosti řádkových elementárních úprav). (i) *Necht' $\mathbb{A} \in M(m \times n)$. Pak existuje transformace T převádějící matici \mathbb{A} na schodovitou matici.*

(ii) *Necht' $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(m \times n)$. Jestliže existuje transformace T_1 taková, že $\mathbb{A} \xrightarrow{T_1} \mathbb{B}$, pak existuje transformace T_2 taková, že $\mathbb{B} \xrightarrow{T_2} \mathbb{A}$.*

(iii) *Necht' $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(m \times n)$ a T je transformace taková, že $\mathbb{A} \xrightarrow{T} \mathbb{B}$. Pak $h(\mathbb{A}) = h(\mathbb{B})$.*

————— Konec 12. přednášky, 3. 4. 2024 —————

Věta 5.6 (součin a řádkové úpravy). *Necht' $\mathbb{A} \in M(n \times k)$, $\mathbb{B} \in M(k \times m)$, $\mathbb{C} \in M(n \times m)$ a platí $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{C}$. Necht' T je transformace a $\mathbb{A} \xrightarrow{T} \mathbb{A}'$ a $\mathbb{C} \xrightarrow{T} \mathbb{C}'$. Pak platí $\mathbb{A}'\mathbb{B} = \mathbb{C}'$.*

Věta 5.7. *Necht' $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Pak \mathbb{A} je regulární, právě když $h(\mathbb{A}) = n$.*

————— Konec 13. přednášky, 5. 4. 2024 —————

5.3 Determinanty

Definice. Necht' $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Maticí \mathbb{A}_{ij} budeme rozumět matici typu $(n - 1) \times (n - 1)$, která vznikne z \mathbb{A} vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce.

Definice. Necht' $\mathbb{A} = (a_{ij})_{\substack{i=1..n \\ j=1..n}}$. **Determinant matice \mathbb{A}** definujeme takto:

$$\det \mathbb{A} = \begin{cases} a_{11}, & \text{pokud } n = 1, \\ \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{i1} \det \mathbb{A}_{i1}, & \text{pro } n > 1. \end{cases}$$

Pro $\det \mathbb{A}$ budeme také používat symbol

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Věta 5.8. Necht' $\mathbb{A} \in M(n \times n)$.

(i) Necht' matice \mathbb{A}' vznikne z \mathbb{A} tak, že v \mathbb{A} vyměníme dva řádky mezi sebou, pak platí $\det \mathbb{A}' = -\det \mathbb{A}$.

(ii) Necht' matice \mathbb{A}' vznikne z \mathbb{A} tak, že v \mathbb{A} jeden řádek vynásobíme reálným číslem λ , pak platí

$$\det \mathbb{A}' = \lambda \det \mathbb{A}.$$

(iii) Necht' matice \mathbb{A}' vznikne z \mathbb{A} tak, že v \mathbb{A} λ -násobek jednoho řádku přičteme k jinému řádku (tj. provedeme třetí řádkovou elementární úpravu), pak platí

$$\det \mathbb{A}' = \det \mathbb{A}.$$

Věta 5.9. Necht' $\mathbb{A} \in M(n \times n)$, $j \in \{1, \dots, n\}$. Pak

$$\det \mathbb{A} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathbb{A}_{ij}.$$

Definice. Necht' $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Řekneme, že \mathbb{A} je **horní trojúhelníková** matice, jestliže platí $a_{ij} = 0$ pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i > j$. Řekneme, že \mathbb{A} je **dolní trojúhelníková** matice, jestliže platí $a_{ij} = 0$ pro každé $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i < j$.

————— Konec 14. přednášky, 10. 4. 2024 —————

Věta 5.10. Necht' $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je horní (resp. dolní) trojúhelníková matice. Pak platí

$$\det \mathbb{A} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Věta 5.11. Pro $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ platí $\det \mathbb{A} = \det \mathbb{A}^T$.

Věta 5.12. Necht' $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Pak \mathbb{A} je regulární, právě když $\det \mathbb{A} \neq 0$.

Věta 5.13. Pro $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in M(n \times n)$ platí $\det \mathbb{A}\mathbb{B} = \det \mathbb{A} \det \mathbb{B}$.

5.4 Řešení soustav lineárních rovnic

Věta 5.14. Necht' $\mathbb{A} \in M(n \times n)$, $\mathbf{b} \in M(n \times 1)$, $\mathbf{x} \in M(n \times 1)$ a $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Provedeme-li stejné elementární úpravy na \mathbb{A} i na \mathbf{b} obdržíme matice \mathbb{A}' a \mathbf{b}' pro které platí $\mathbb{A}'\mathbf{x} = \mathbf{b}'$.

Věta 5.15. Necht' $\mathbb{A} \in M(n \times n)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) matice \mathbb{A} je regulární,
- (ii) soustava (S) má pro každé \mathbf{b} právě jedno řešení,
- (iii) soustava (S) má pro každé \mathbf{b} alespoň jedno řešení.

Věta 5.16. *Soustava (S) má řešení právě tehdy, když matice*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

mají stejnou hodnotu.

————— Konec 15. přednášky, 12. 4. 2024 —————

Věta 5.17 (Cramerovo pravidlo). *Necht' $\mathbb{A} \in M(n \times n)$ je regulární matice, $\mathbf{b} \in M(n \times 1)$, $\mathbf{x} \in M(n \times 1)$ a $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Pak*

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{nj} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}},$$

pro $j = 1, \dots, n$.

5.5 Matice a lineární zobrazení

Definice. Řekneme, že zobrazení $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ je **lineární**, pokud platí:

- (i) $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n : f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$,
- (ii) $\forall \lambda \in \mathbf{R} \forall \mathbf{u} \in \mathbf{R}^n : f(\lambda \mathbf{u}) = \lambda f(\mathbf{u})$.

Věta 5.18 (reprezentace lineárních zobrazení). *Zobrazení $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ je lineární právě tehdy, když existuje matice $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ taková, že*

$$\forall \mathbf{u} \in \mathbf{R}^n : f(\mathbf{u}) = \mathbb{A}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Věta 5.19. *Necht' zobrazení $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ je lineární. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

- (i) *f je bijekce (tj. jde o prosté zobrazení \mathbf{R}^n na \mathbf{R}^n),*
- (ii) *f je prosté zobrazení,*
- (iii) *f je zobrazení \mathbf{R}^n na \mathbf{R}^n .*

Věta 5.20. *Necht' $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ je lineární zobrazení reprezentované maticí $\mathbb{A} \in M(m \times n)$ a $g: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^k$ je lineární zobrazení reprezentované maticí $\mathbb{B} \in M(k \times m)$. Potom složené zobrazení $g \circ f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^k$ je lineární a je reprezentováno maticí $\mathbb{B}\mathbb{A}$.*

————— Konec 16. přednášky, 17. 4. 2024 —————

6 Integrál

6.1 Primitivní funkce

Definice. Necht' funkce f je definována na otevřeném intervalu I . Řekneme, že funkce F je **primitivní funkce k f na I** , jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Věta 6.1. Necht' F a G jsou primitivní funkce k funkci f na otevřeném intervalu I . Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ tak, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.

Věta 6.2. Necht' f je spojitá funkce na otevřeném neprázdném intervalu I . Pak f má na I primitivní funkci.

Věta 6.3. Necht' f má na otevřeném intervalu I primitivní funkci F , funkce g má na I primitivní funkci G a $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom funkce $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k $\alpha f + \beta g$ na I .

Věta 6.4 (o substituci). (i) Necht' F je primitivní funkce k f na (a, b) . Necht' φ je funkce definovaná na (α, β) s hodnotami v intervalu (a, b) , která má v každém bodě $t \in (\alpha, \beta)$ vlastní derivaci. Pak

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \stackrel{c}{=} F(\varphi(t)) \text{ na } (\alpha, \beta).$$

(ii) Necht' funkce φ má v každém bodě intervalu (α, β) nenulovou vlastní derivaci a $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Necht' funkce f je definována na intervalu (a, b) a platí

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \stackrel{c}{=} G(t) \text{ na } (\alpha, \beta).$$

Pak

$$\int f(x) dx \stackrel{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)) \text{ na } (a, b).$$

————— Konec 17. přednášky, 19. 4. 2024 —————

Věta 6.5 (integrace per partes). Necht' I je otevřený interval a funkce f a g jsou spojitě na I . Necht' F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I . Pak platí

$$\int g(x)F(x) dx = G(x)F(x) - \int G(x)f(x) dx \text{ na } I.$$

Definice. Racionální funkcí budeme rozumět podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule.

Věta 6.6 (základní věta algebry). Necht' $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně n s reálnými koeficienty. Pak existují čísla $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ taková, že

$$P(x) = a_n(x - x_1) \dots (x - x_n), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Věta 6.7. Necht' P je polynom s reálnými koeficienty a $z \in \mathbf{C}$ je kořen P násobnosti $k \in \mathbf{N}$. Pak $i\bar{z}$ je kořen P násobnosti k .

————— Konec 18. přednášky, 24. 4. 2024 —————

Důsledek 6.8. Necht' $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ je polynom stupně n s reálnými koeficienty. Pak existují reálná čísla $x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l$ a přirozená čísla $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l$ taková, že

- (i) $P(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_k)^{p_k}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \dots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,
- (ii) žádné dva z mnohočlenů $x - x_1, x - x_2, \dots, x - x_k, x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají společný kořen,
- (iii) mnohočleny $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají žádný reálný kořen.

Věta 6.9 (o rozkladu na parciální zlomky). Necht' P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že

- (i) stupeň P je ostře menší než stupeň Q ,
- (ii) $Q(x) = a_n(x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_k)^{p_k}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1} \dots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}$,
- (iii) $a_n, x_1, \dots, x_k, \alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbf{R}, a_n \neq 0$,
- (iv) $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_l \in \mathbf{N}$,
- (v) žádné dva z mnohočlenů $x - x_1, x - x_2, \dots, x - x_k, x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají společný kořen,
- (vi) mnohočleny $x^2 + \alpha_1 x + \beta_1, \dots, x^2 + \alpha_l x + \beta_l$ nemají reálný kořen.

Pak existují jednoznačně určená čísla $A_1^1, \dots, A_{p_1}^1, \dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k, B_1^1, C_1^1, \dots, B_{q_1}^1, C_{q_1}^1, \dots, B_1^l, C_1^l, \dots, B_{q_l}^l, C_{q_l}^l$ taková, že platí

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1^1}{(x - x_1)^{p_1}} + \dots + \frac{A_{p_1}^1}{(x - x_1)} \\ &+ \dots + \frac{A_1^k}{(x - x_k)^{p_k}} + \dots + \frac{A_{p_k}^k}{x - x_k} \\ &+ \frac{B_1^1 x + C_1^1}{(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{q_1}} + \dots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{x^2 + \alpha_1 x + \beta_1} + \dots \\ &+ \frac{B_1^l x + C_1^l}{(x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{q_l}} + \dots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{x^2 + \alpha_l x + \beta_l}. \end{aligned}$$

————— Konec 19. přednášky, 26. 4. 2024 —————

6.2 Riemannův integrál

Definice. Necht' $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^n$ nazýváme **dělením intervalu** $\langle a, b \rangle$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Body x_0, \dots, x_n nazýváme **dělicími body**. Řekneme, že dělení D' intervalu $\langle a, b \rangle$ je **zjemněním dělení** D intervalu $\langle a, b \rangle$, jestliže každý dělicí bod D je i dělicím bodem D' .

Definice. Necht' $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, funkce f je omezená na intervalu $\langle a, b \rangle$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $\langle a, b \rangle$. Označme

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, D) &= \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } M_j = \sup_{\langle x_{j-1}, x_j \rangle} f, \\ \underline{S}(f, D) &= \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}), \text{ kde } m_j = \inf_{\langle x_{j-1}, x_j \rangle} f, \\ \overline{\int_a^b} f &= \inf \{ \overline{S}(f, D); D \text{ je dělení intervalu } \langle a, b \rangle \}, \\ \underline{\int_a^b} f &= \sup \{ \underline{S}(f, D); D \text{ je dělení intervalu } \langle a, b \rangle \}.\end{aligned}$$

Řekneme, že funkce f má **Riemannův integrál** na intervalu $\langle a, b \rangle$, pokud $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. Hodnota integrálu funkce f přes interval $\langle a, b \rangle$ je pak rovná společné hodnotě $\overline{\int_a^b} f$ a $\underline{\int_a^b} f$ a značíme ji $\int_a^b f$. Pokud $a > b$, definujeme $\int_a^b f = -\int_b^a f$, a v případě, že $a = b$, definujeme $\int_a^b f = 0$.

Věta 6.10 (kritérium existence Riemannova integrálu). *Necht' $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a f je funkce omezená na intervalu $\langle a, b \rangle$.*

- (i) $\int_a^b f = I \in \mathbf{R}$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje dělení D intervalu $\langle a, b \rangle$ takové, že

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon.$$

- (ii) Funkce f má na $\langle a, b \rangle$ Riemannův integrál právě tehdy, když ke každému $\varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje dělení D intervalu $\langle a, b \rangle$ takové, že

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Věta 6.11. (i) Necht' funkce f má Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b \rangle$ a necht' $\langle c, d \rangle \subset \langle a, b \rangle$. Pak f má Riemannův integrál i na intervalu $\langle c, d \rangle$.

(ii) Necht' $c \in (a, b)$ a funkce f má Riemannův integrál na intervalech $\langle a, c \rangle$ a $\langle c, b \rangle$. Pak f má Riemannův integrál na $\langle a, b \rangle$ a platí

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Věta 6.12 (linearita Riemannova integrálu). Necht' f a g jsou funkce mající Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b \rangle$ a necht' $\alpha \in \mathbf{R}$. Potom

(i) funkce αf má Riemannův integrál na $\langle a, b \rangle$ a platí

$$\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f,$$

(ii) funkce $f + g$ má Riemannův integrál na $\langle a, b \rangle$ a platí

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g. \quad (2)$$

Věta 6.13. Necht' $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, a necht' f a g jsou funkce mající Riemannův integrál na intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom platí:

(i) Je-li $f(x) \leq g(x)$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$, pak $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

(ii) Funkce $|f|$ má Riemannův integrál na $\langle a, b \rangle$ a platí $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

Definice. Řekneme, že funkce f je **stejněměrně spojitá na intervalu I** , jestliže platí

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0 \exists \delta \in \mathbf{R}, \delta > 0 \forall x, y \in I, |x - y| < \delta: |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Věta 6.14. Je-li funkce f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, pak je stejněměrně spojitá na $\langle a, b \rangle$.

Věta 6.15. Necht' funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak f má Riemannův integrál na $\langle a, b \rangle$.

Věta 6.16. Necht' f je spojitá funkce na intervalu (a, b) a necht' $c \in (a, b)$. Označíme-li $F(x) = \int_c^x f$ pro $x \in (a, b)$, pak $F'(x) = f(x)$ pro každé $x \in (a, b)$, neboli funkce F je primitivní k f na (a, b) .

Věta 6.17 (Newtonova-Leibnizova formule). Necht' f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$, $a < b$, a F je primitivní funkce k f na (a, b) . Pak existují vlastní limity $\lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$, $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$ a platí

$$\int_a^b f = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x).$$

Věta 6.18 (integrace per partes). *Necht' funkce f , g , f' a g' jsou spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak platí*

$$\int_a^b f'g = [fg]_a^b - \int_a^b fg'.$$

Věta 6.19 (substituce). *Necht' funkce f je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$. Necht' dále funkce φ má na intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ spojitou derivaci a zobrazuje jej do intervalu $\langle a, b \rangle$. Pak*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt.$$