Písemná zkouška z matematiky pro FSV (A)

LS 2005-06, 29.5. 2006

Příklad A1: Spočtěte inverzní matici k $\mathbb{A}$ a spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\det(\underbrace{\mathbb{A}^{-1}\dots\mathbb{A}^{-1}}_{n \text{ krát}})},$$

kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad A2: Rozhodněte o konvergenci a absolutní konvergenci následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{n^5+2n^3}-\sqrt{n^5+n^3}\right)\left(\sqrt[3]{n^6+3n^5}-\sqrt[3]{n^6+n^5}\right)} \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad A3: Nalezněte globální extrémy funkce f na množině M.

$$f(x,y,z) = x^4+y^4+z^4,$$
$$M = \{[x,y,z]\in\mathbf{R}^3;\ x^2+y^2=1,\ x^2+z^2=1\} \quad \text{(12 bodů)}$$

Příklad A4: Ukažte, že následující rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ jednoznačně funkci f proměnné x splňující $f(0)=0$. Vypočtěte $f'(0)$ a $f''(0)$. Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[0,0]$ a rozhodněte, zda je f na okolí bodu 0 konvexní či konkávní (tvrzení zdůvodněte!).

$$\arcsin(x+y)+\operatorname{arctg}(x+y)+xy=0 \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad A5: Určete a načrtněte definiční obor funkce f a spočtěte její parciální derivace všude, kde existují.

$$f(x,y) = \log\left(\frac{x}{|x|-|y|}\right). \qquad \text{(12 bodů)}$$

Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[1,0,f(1,0)]$.

Výsledky testu (A)

Příklad A1:

$$\begin{pmatrix} -1/2 & -3/2 & 1 & -2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad 1/2$$

Příklad A2: Řada konverguje absolutně, lze srovnat s $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{3/2}$.

Příklad A3: Maximum: $[0, \pm 1, \pm 1]$, minimum: $[\pm 2/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3}]$

Příklad A4: $\varphi'(0) = -1$, $\varphi''(0) = 1$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (B)

LS 2005-06, 7.6. 2006

Příklad B1: Označme

$$\mathbb{A}(x,y) = \begin{pmatrix} x & y & 1 & 1 \\ y & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Spočtěte parciální derivace funkce $f(x,y) = \det(\mathbb{A}(x,y))$, určete pro která $[x,y] \in \mathbf{R}^2$ je matice $\mathbb{A}(x,y)$ regulární a spočtěte $(\mathbb{A}(-2,1))^{-1}$. (12 bodů)

Příklad B2: Rozhodněte o konvergenci a absolutní konvergenci následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}} \right)^{n^{3/2}} \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad B3: Nalezněte globální extrémy funkce f na množině M.

$$f(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}z,$$
$$M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2 = z\} \quad \text{(12 bodů)}$$

Příklad B4: Ukažte, že následující rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ jednoznačně funkci φ proměnné x splňující $\varphi(0) = 0$. Vypočtěte $\varphi'(0)$ a $\varphi''(0)$. Napište rovnici tečny ke grafu funkce φ v bodě $[0,0]$.

$$ye^{\cos(2x)} + xe^{\cos(y^2)} = 0 \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad B5: Určete definiční obor funkce f a spočtěte její parciální derivace všude, kde existují.

$$f(x,y) = |\sin(x+y)|. \qquad \text{(12 bodů)}$$

Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[\pi/4, 0, f(\pi/4, 0)]$. (12 bodů)

Výsledky testu (B)

Příklad B1: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y+1,$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Příklad B2: Řada diverguje, neboť $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}}\right)^{n^{3/2}} = \infty \neq 0.$

Příklad B3: Maximum: $[x, y, 1]$, kde $x^2 + y^2 = 1$; minimum: $[0, 0, 0]$.

Příklad B4: $\varphi'(0) = -1$, $\varphi''(0) = 0$

Příklad B4:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \operatorname{sgn}(\sin(x+y)) \cdot \cos(x+y), \qquad \text{pro } x+y \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z};$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \operatorname{sgn}(\sin(x+y)) \cdot \cos(x+y), \qquad \text{pro } x+y \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z};$$
$$T(x,y) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}y$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (C)

LS 2005-06, 13.6. 2006

Příklad C1: Označme

$$\mathbb{A}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & -x & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & x & 1 \end{pmatrix}.$$

Určete pro která $x \in \mathbf{R}$ je matice $\mathbb{A}(x)$ regulární a spočtěte $(\mathbb{A}(0))^{-1}$. (12 bodů)

Příklad C2: Rozhodněte o konvergenci a absolutní konvergenci následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{e} - 1) \cdot (\sqrt{n^2+4} - \sqrt{n^2+1}) \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad C3: Určete maximální možný objem kvádru, jehož hrany jsou rovnoběžné se souřadnými osami, jeden jeho vrchol leží v počátku a diagonálně protilehlý vrchol leží v množině

$$M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3;\ 4x + 2y + z = 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}.$$

Příklad C4: Ukažte, že následující rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0, 1]$ jednoznačně funkci φ proměnné x splňující $\varphi(0) = 1$. Vypočtěte $\varphi'(0)$ a $\varphi''(0)$. Napište rovnici tečny ke grafu funkce φ v bodě $[0, 1]$.

$$\operatorname{arctg}(x + y) - \frac{\pi}{4} \cos(xy) = 0 \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad C5: Určete definiční obor funkce f a spočtěte její parciální derivace všude, kde existují.

$$f(x, y) = \min\{x^2 + y^2, x + y + 1\}.$$

Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[0, 1, f(0, 1)]$. (12 bodů)

Výsledky testu (C)

Příklad C1: Matice je regulární právě pro $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3 \pm \sqrt{6}\}$.

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & -1 \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & -2/3 & -2/3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad C2: Řada konverguje absolutně – lze srovnat s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Příklad C3: $[1/6, 1/3, 2/3]$

Příklad C4: $\varphi'(0) = -1$, $\varphi''(0) = -\pi/2$, tečna $x \mapsto -x + 1$

Příklad C5: Označme $M = \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 < x + y + 1\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 2x, & [x, y] \in M; \\ 1, & [x, y] \in (\mathbf{R}^2 \setminus \overline{M}) \cup \{[1/2, 1/2 \pm \sqrt{3/2}]\}. \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} 2y, & [x, y] \in M; \\ 1, & [x, y] \in (\mathbf{R}^2 \setminus \overline{M}) \cup \{[1/2 \pm \sqrt{3/2}, 1/2]\}. \end{cases}$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (D)
LS 2005-06, 19.6. 2006

Příklad D1: Označme

$$\mathbb{A}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & z & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{C}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & y & z \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Určete pro která $x, y, z \in \mathbf{R}$ jsou všechny matice $\mathbb{A}(x,y,z)$, $\mathbb{B}(x,y,z)$, $\mathbb{C}(x,y,z)$ singulární. Spočtěte $(\mathbb{A}(0,0,0))^{-1}$. (12 bodů)

Příklad D2: Nalezněte všechna $z \in \mathbf{R}$, pro která následující řada konverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)} z^n. \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad D3: Označme

$$\begin{aligned} M &= M_1 \cup M_2, \\ M_1 &= \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, \\ M_2 &= \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x + y + z = 0\}, \\ f(x,y,z) &= x + y + z^2. \end{aligned}$$

Určete suremum a infimum množiny $\{f(x,y,z);\ [x,y,z] \in M\}$ a zjistěte, zda f těchto hodnot nabývá. (12 bodů)

Příklad D4: Ukažte, že následující rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,1]$ jednoznačně funkci φ proměnné x splňující $\varphi(0) = 1$. Vypočtěte $\varphi'(0)$ a $\varphi''(0)$. Napište rovnici tečny ke grafu funkce φ v bodě $[0,1]$.

$$\log(x+y) - \cos(xy^2) + 1 = 0 \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad D5: Určete definiční obor funkce f a spočtěte její parciální derivace všude, kde existují.

$$f(x,y) = \sqrt{xy - y^3 + 2y^2}.$$

Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[1, 1, f(1,1)]$. (12 bodů)

Výsledky testu (D)

Příklad D1: $x = 4/3$, $y = -2/3$, $z = 2/3$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad D2: $\langle -1, 1)$

Příklad D3: $\sup_M f = +\infty$; suprema se nenabývá; $\inf_M f = -\sqrt{2}$, infima se nabývá v bodě $[-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0]$

Příklad D4: $\varphi'(0) = -1$, $\varphi''(0) = -1$, tečna $x \mapsto -x + 1$

Příklad D5:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}(xy - y^3 + 2y^2)^{-1/2} \cdot y, \quad [x,y] \in \operatorname{Int} D_f$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2}(xy - y^3 + 2y^2)^{-1/2} \cdot (x - 3y^2 + 4y), \quad [x,y] \in \operatorname{Int} D_f$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = 0, \quad x \in \mathbf{R}$$

Jiné než výše uvedené parciální derivace neexistují.

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (E)
LS 2005-06, 26. 6. 2006

Příklad E1: Označme

$$\mathbb{A}(x,y) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ x & 0 & y \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ y & -1 & x \end{pmatrix}.$$

Určete pro která $x, y \in \mathbf{R}$ je matice $\mathbb{A}(x,y) \cdot \mathbb{B}(x,y)$ regulární. Spočtěte $(\mathbb{A}(1,1))^{-1}$. (12 bodů)

Příklad E2: Vyšetřete, zda následující řada konverguje.

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{(-1)^n}{\log(\log n)} \right) \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad E3: Nalezněte globální extrémy funkce f na množině M.

$$f(x,y,z) = x + y + z,$$
$$M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 5,\ yz = 2\}. \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad E4: Ukažte, že následující rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ jednoznačně funkci φ proměnné x splňující $\varphi(0) = 0$. Vypočtěte $\varphi'(0)$ a $\varphi''(0)$. Napište rovnici tečny ke grafu funkce φ v bodě $[0,0]$.

$$\frac{e^{x+y}}{1 + x^2 + y^2} = 1 \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad E5: Určete a načrtněte definiční obor funkce f. Spočtěte parciální derivace f všude, kde existují.

$$f(x,y) = \arcsin \sqrt{x(x+y)}.$$

Napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $[0, 0, f(0,0)]$. (12 bodů)

Výsledky testu (E)

Příklad E1: $x \neq -y$ a zároveň $x \neq -1$

$$\begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 & -1/4 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Příklad E2: Řada $\sum_{n=3}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2}$ konverguje podle limitního srovnávacího kritéria (lze srovnat s $\sum 1/n^2$). Řada $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log(\log(n))}$ konverguje podle Leibnizova kritéria. Odtud plyne, že zadaná řada je konvergentní.

Příklad E3: Maximum: $[1, \sqrt{2}, \sqrt{2}]$, minimum: $[-1, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$.

Příklad E4: $\varphi'(0) = -1$, $\varphi''(0) = 4$, tečna $x \mapsto -x$

Příklad E5:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1 - (\sqrt{x(x+y)})^2)^{-1/2} \cdot \frac{1}{2}(x(x+y))^{-1/2} \cdot (2x+y), \quad [x,y] \in \operatorname{Int} D_f$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (1 - (\sqrt{x(x+y)})^2)^{-1/2} \cdot \frac{1}{2}(x(x+y))^{-1/2} \cdot x, \quad [x,y] \in \operatorname{Int} D_f$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = 0, \quad y \in \mathbf{R}$$

Jiné než výše uvedené parciální derivace neexistují. Tečná rovina v daném bodě neexistuje.

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (F)

LS 2005-06, 2. 9. 2006

Příklad F1: Označme

$$\mathbb{A}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{pmatrix}.$$

Určete pro která $x \in \mathbf{R}$ existuje inverzní matice k matici $\mathbb{A}(x)$, pro taková x pak inverzní matici spočtěte. (12 bodů)

Příklad F2: Určete všechna $z \in \mathbf{R}$, pro která následující řada konverguje.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{2^n+1} z^n \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad F3: Nalezněte globální extrémy funkce f na množině M.

$$f(x,y,z) = (x+y+z)e^{-x^2-y^2-z^2},$$
$$M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \le 1\} \cup \{[t,t,-t];\ t \in \mathbf{R}\} \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad F4: Ukažte, že následující rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ jednoznačně funkci φ proměnné x splňující $\varphi(0) = 0$. Vypočtěte $\varphi'(0)$ a $\varphi''(0)$. Napište rovnici tečny ke grafu funkce φ v bodě $[0,0]$.

$$\sin(x)\cos(x+y) + \sin(x^2+y) = 0 \qquad \text{(12 bodů)}$$

Příklad F5: Nechť $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ je funkce třídy $\mathcal{C}^1$ splňující

$$f(0,0) = 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 4.$$

Funkce $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ je definována předpisem

$$g(u,v) = f(\sin u, u + \sin 2v)$$

Spočtěte obě parciální derivace prvního řádu funkce g v bodě $[0,0]$ a napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce g v bodě $[0,0,2]$. (12 bodů)

Výsledky testu (F)

Příklad F1: Inverzní matice existuje pro všechna $x \in \mathbf{R}$ a má tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & x & -x+1 & -1 \\ 0 & -x & x-1 & 1 \\ -1 & -x & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad F2: Řada konverguje pro $z \in (-1, 1)$.

Příklad F3: Bod maxima: $[1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}]$;
bod minima: $[-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}]$.

Příklad F4: $\varphi'(0) = -1$, $\varphi''(0) = -2$

Příklad F5: $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 7$, $\quad \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 8$, $\quad T : [x, y] \mapsto 2 + 7x + 8y$