Písemná zkouška z matematiky pro FSV (A)
LS 2002-2003, 28.5. 2003

Příklad A1 : Spočtěte inverzní matici k $\mathbb{A}$. Spočtěte $\det \mathbb{A}$, $\det(2\mathbb{A})$, $\det(\mathbb{A}^2)$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad A2 : Rozhodněte o konvergenci následující řady pro $x \geq 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n} (\operatorname{arctg} n) x^n \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad A3 : Nalezněte globální extrémy funkce f na množině M.

$$f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2, \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 = z^2,\ 0 \leq z \leq 1/2\} \quad \text{(15 bodů)}$$

Příklad A4 : Ukažte, že následující rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,0]$ jednoznačně funkci f proměnné x splňující $f(1) = 0$. Vypočtěte $f'(1)$ a $f''(1)$. Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[1,0]$.

$$\sin(xy) + e^{x+y} - e = 0 \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad A5 : Spočtěte

$$\int \frac{x+2}{(x+1)(x^2+2x+3)^2}\, dx. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Test A – výsledky

Příklad A1 : $\det \mathbb{A} = 2$, $\det(2\mathbb{A}) = 32$, $\det(\mathbb{A}^2) = 4$

$$\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Příklad A2 : Pro $x \in \langle 0,1)$ řada konverguje, pro $x \geq 1$ řada diverguje.

Příklad A3 : Minimum: $[0, \pm t, t]$, $t \in \langle 0, 1/2\rangle$, maximum: $[\pm 1/2, 0, 1/2]$.

Příklad A4 : $f'(1) = -e/(e+1)$, $f''(1) = \frac{e(1+2e)}{(1+e)^3}$, $y = -ex/(1+e) + e/(1+e)$

Příklad A5 :

$$\frac{1}{4}\log|x+1| - \frac{1}{8}\log(x^2+2x+3) + \frac{\sqrt{2}}{8}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{4}\frac{x+2}{x^2+2x+3},$$

$x \in (-\infty, -1),\ x \in (-1, +\infty)$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (B)
LS 2002-2003, 4.6. 2003

Příklad B1 : Spočtěte $\det((\mathbb{A}+\mathbb{B})(\mathbb{A}+\mathbb{B}))$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad B2 : Rozhodněte, zda následující řada konverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi/2) \cdot \operatorname{tg}(1/n) \cdot \frac{3n^2+1}{2n^2} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad B3 : Nalezněte globální extrémy funkce f na množině M:

$$f(x,y,z,u) = xy + zu,$$
$$M = \{[x,y,z,u] \in \mathbf{R}^4;\ x^2+y^2+z^2+u^2 = 1,\ x+y+z+u = 0\}. \quad \text{(15 bodů)}$$

Příklad B4 : Ukažte, že následující rovnice určuje v jistém okolí bodu $[1,1]$ jednoznačně funkci f proměnné x splňující $f(1) = 1$. Vypočtěte $f'(1)$ a $f''(1)$. Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[1,1]$.

$$\log(x+y) + y^2 - \log 2 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad B5 : Spočtěte

$$\int (1+x+x^2) \operatorname{arctg} x \, dx. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Test B – výsledky

Příklad B1 : 64

Příklad B2 : Řada konverguje; lze ukázat pomocí Leibnizova kritéria.

Příklad B3 : Body maxima: $[1/2, 1/2, -1/2, -1/2]$, $[-1/2, -1/2, 1/2, 1/2]$;
body minima: $[x, -x, z, -z]$, kde $x^2 + z^2 = \frac{1}{2}$.

Příklad B4 : $f'(1) = 0$, $f''(1) = 1/10$, $y = 1$

Příklad B5 :

$$\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\log(1+x^2) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x, \qquad x \in \mathbf{R}$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (C)
LS 2002-2003, 11.6. 2003

Příklad C1 : Spočtěte inverzní matici k $\mathbb{A}$ a $\det(\mathbb{I}+\mathbb{A})$, kde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad A2 : Rozhodněte o konvergenci následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n} \operatorname{tg}\left(\sqrt{n-1}-\sqrt{n}\right) \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad C3 : Nalezněte globální extrémy funkce f na množině M.

$$f(x,y,z) = xy + z, \quad M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ x+y+z = 0\} \quad \text{(15 bodů)}$$

Příklad A4 : Ukažte, že následující rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ jednoznačně funkci f proměnné x splňující $f(0)=0$. Vypočtěte $f'(0)$ a $f''(0)$. Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[0,0]$.

$$\operatorname{tg}(x-y) + \cos x - \cos y = 0 \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad C5 : Spočtěte primitivní funkci

$$\int \frac{4\sin^2 x \cos x}{(\sin x + 1)(1-\sin^4 x)}\, dx. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Test C – výsledky

Příklad C1 : $\det(\mathbb{I}+\mathbb{A}) = 2$,

$$\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 & 0 \\ -3/2 & 2 & -1/2 & 1 \\ -1/2 & 1 & -1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Příklad C2 : Řada konverguje (lze užít srovnávacího kritéria).

Příklad C3 : Minimum: $[(1-\sqrt{5})/4, (1+\sqrt{5})/4, -1/2]$, $[(1+\sqrt{5})/4, (1-\sqrt{5})/4, -1/2]$; maximum: $[-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}]$.

Příklad C4 : $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $y = x$

Příklad C5 :

$$-\frac{1}{2}\log(1+\sin x) - \frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{2}\log(1-\sin x) + \frac{1}{2}\log(1+\sin^2 x) - \operatorname{arctg}(\sin x),$$

$$x \in (-\pi/2, \pi/2) + k\pi, k \in \mathbf{Z}$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (D)
LS 2002-2003, 18.6. 2003

Příklad D1 : Spočtěte $\det(\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}^2)$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad D2 : Rozhodněte, zda následující řada konverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n^3 + (-1)^n 2^n}{4^n} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad D3 : Nalezněte globální extrémy funkce f na množině M:

$$f(x,y,z,u) = xy + xz + yz + u,$$
$$M = \{[x,y,z,u] \in \mathbf{R}^4;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, u \geq 0\}. \quad \text{(15 bodů)}$$

Příklad D4 : Ukažte, že následující rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ jednoznačně funkci f proměnné x splňující $f(0) = 0$. Vypočtěte $f'(0)$ a $f''(0)$. Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[0,0]$.

$$\exp(x+y) + \sin(x)\cos(xy) = 1 \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad D5 : Spočtěte primitivní funkci na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$

$$\int \frac{\cos(x)\sin(x)}{1 + \sin(x)\cos(x)}\, dx. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Test D – výsledky

Příklad D1 : 4

Příklad D2 : Řada konverguje.

Příklad D3 : Funkce maxima nenabývá. Body minima:

$$\{[x,y,z,0] \in \mathbf{R}^4;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 0\}.$$

Příklad D4 : $f'(0) = -2$, $f''(1) = -1$, $y = -2x$

Příklad D5 :

$$x - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg} x + 1}{\sqrt{3}}\right)$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (E)
LS 2002-2003, 7.7. 2003

Příklad E1 : Spočtěte $\mathbb{A}^{-1}$ a $\det(\mathbb{A}\mathbb{B}^{-1})$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad E2 : Rozhodněte, zda následující řada konverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2^n + n} + \frac{(-1)^n}{n^2 + \sin(n)} \right) \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad E3 : Nalezněte vzdálenost paraboly dané rovnicí $y = x^2$ od přímky dané rovnicí $y = -x - 1$. (15 bodů)

Příklad E4 : Ukažte, že následující rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0,0]$ jednoznačně funkci f proměnné x splňující $f(0) = 0$. Vypočtěte $f'(0)$ a $f''(0)$. Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[0,0]$.

$$\arcsin(xy) + \arctan(x)\cos(xy) + y = 0 \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad E5 : Spočtěte primitivní funkci

$$\int \frac{x}{(2+x^2)^2(1+x+x^2)}\, dx. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Test E – výsledky

Příklad E1 :

$$\mathbb{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 2 & -3/2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(\mathbb{A}\mathbb{B}^{-1}) = -1$

Příklad E2 : Řada konverguje.

Příklad E3 : $3\sqrt{2}/8$

Příklad E4 : $f'(0) = -1$, $f''(0) = 2$, $y = -x$

Příklad E5 :

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{6}\frac{x+1}{2+x^2} - \frac{2\sqrt{3}}{9} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right), \qquad x \in \mathbf{R}$$

Písemná zkouška z matematiky pro FSV (F)
LS 2002-2003, 16.9. 2003

Příklad F1 : Spočtěte $\mathbb{A}^{-1}$ a $\det(\mathbb{A}^2 + \mathbb{AB} + \mathbb{BA} + \mathbb{B}^2)$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad F2 : Rozhodněte, zda následující řada konverguje.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2^{2^n} + 1)}{\log(2^{4^n} + 1)} \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad F3 : Nalezněte globální extrémy funkce f na množině M:

$$f(x, y, z) = xyz$$
$$M = \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$$
$$\cup \{[x, y, z] \in \mathbf{R}^3;\ x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1\}. \quad \text{(15 bodů)}$$

Příklad F4 : Ukažte, že následující rovnice určuje v jistém okolí bodu $[0, 0]$ jednoznačně funkci f proměnné x splňující $f(0) = 0$. Vypočtěte $f'(0)$ a $f''(0)$. Napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě $[0, 0]$.

$$y \log(x + 1) + \sin(xy) + y + \sin x = 0 \qquad \text{(10 bodů)}$$

Příklad F5 : Spočtěte primitivní funkci

$$\int \left(xe^{-x} + \frac{\sin x}{(2 + \cos^2 x)^2} \right) dx. \qquad \text{(15 bodů)}$$

Test F – výsledky

Příklad F1 :

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

0

Příklad F2 : Řada konverguje, např. podle d'Alembertova kritéria.

Příklad F3 : Maximum neexistuje; minimum: $[\sqrt{6}/4, -\sqrt{6}/4, 1/2]$, $[-\sqrt{6}/4, \sqrt{6}/4, 1/2]$.

Příklad F4 : $f'(0) = -1$, $f''(0) = 4$, $y = -x$

Příklad F5 :

$$-xe^{-x} - e^{-x} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos x}{2 + \cos^2 x} - \frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos x}{\sqrt{2}} \right), \qquad x \in \mathbf{R}$$