Zadání písemné zkoušky z Matematiky 2

FSV UK, LS 2016-17

Termín číslo 5, 1. 9. 2017

---

1. Spočtěte supremum a infimum, případně maximum a minimum, funkce f na množině M, kde

$$f(x,y,z) = x^2 - y - z,$$
$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \wedge y \leq 0\}.$$

(12 bodů)

2. Ukažte, že uvedená rovnice určuje v jistém okolí daného bodu $[0,0]$ implicitně zadanou funkci φ (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0. Rozhodněte, zda je φ konvexní na jistém okolí bodu 0.

$$e^{x^2+y^2} + \log(1+xy) - 1 + y = 0$$

(12 bodů)

3. Nalezněte všechna řešení soustav $\mathbb{A}x = b_1$ a $\mathbb{A}y = b_2$, kde

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(12 bodů)

4. Vyšetřete konvergenci následující řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! + 2}{(n+2)!}$$

(12 bodů)

5. Spočtěte

$$\int \frac{4x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 2}{x(2x^2 + x + 1)}\,\mathrm{d}x.$$

(12 bodů)