V.1. $\mathbf{R}^n$ jako metrický a lineární prostor

Definice. Množinou $\mathbf{R}^n$, $n \in \mathbf{N}$, rozumíme množinu všech uspořádaných n-tic reálných čísel.

Definice. **Euklidovskou metrikou (vzdáleností) na $\mathbf{R}^n$** rozumíme funkci $\rho : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \langle 0, +\infty)$ definovanou předpisem

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Číslo $\rho(x,y)$ nazýváme **vzdáleností bodu x od bodu y.**

Věta 1 (vlastnosti euklidovské metriky). *Euklidovská metrika ρ má následující vlastnosti:*

(i) $\forall x, y \in \mathbf{R}^n : \ \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$
(ii) $\forall x, y \in \mathbf{R}^n : \ \rho(x,y) = \rho(y,x),$
(iii) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}^n : \ \rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ *(trojúhelníková nerovnost),*
(iv) $\forall x, y \in \mathbf{R}^n \, \forall \lambda \in \mathbf{R} : \ \rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x,y),$
(v) $\forall x, y, z \in \mathbf{R}^n : \ \rho(x+z, y+z) = \rho(x,y).$

Definice. Nechť $x \in \mathbf{R}^n$, $r > 0$. Množinu $B(x,r)$ definovanou předpisem

$$B(x,r) = \{y \in \mathbf{R}^n; \rho(x,y) < r\}$$

nazýváme **otevřenou koulí o poloměru r a středu x** nebo také **okolím bodu x.**

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$, $x \in \mathbf{R}^n$. Řekneme, že $x \in \mathbf{R}^n$ je **vnitřním bodem množiny M**, jestliže existuje $r > 0$ tak, že $B(x,r) \subset M$.

Definice. Množina $M \subset \mathbf{R}^n$ se nazývá **otevřená v $\mathbf{R}^n$**, jestliže každý její bod je jejím vnitřním bodem. Doplňky otevřených množin (tj. množiny tvaru $\mathbf{R}^n \setminus G$, kde G je otevřená množina) nazýváme **uzavřenými množinami v $\mathbf{R}^n$.**

Věta 2 (vlastnosti otevřených množin).

(i) *Prázdná množina a celý prostor $\mathbf{R}^n$ jsou otevřené v $\mathbf{R}^n$.*
(ii) *Nechť množiny $G_\alpha \subset \mathbf{R}^n$, $\alpha \in A$, jsou otevřené v $\mathbf{R}^n$. Pak $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ je otevřená množina v $\mathbf{R}^n$.*
(iii) *Nechť množiny G_i, $i = 1, \ldots, m$, jsou otevřené. Pak $\bigcap_{i=1}^m G_i$ je otevřená množina v $\mathbf{R}^n$.*

Věta 3 (vlastnosti uzavřených množin).

(i) *Prázdná množina a celý prostor $\mathbf{R}^n$ jsou uzavřené v $\mathbf{R}^n$.*
(ii) *Nechť množiny $F_\alpha \subset \mathbf{R}^n$, $\alpha \in A$, jsou uzavřené v $\mathbf{R}^n$. Pak $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ je uzavřená množina v $\mathbf{R}^n$.*
(iii) *Nechť množiny F_i, $i = 1, \ldots, m$, jsou uzavřené. Pak $\bigcup_{i=1}^m F_i$ je uzavřená množina v $\mathbf{R}^n$.*

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ a $x \in \mathbf{R}^n$. Řekneme, že x je **hraničním bodem množiny** M, pokud pro každé $r > 0$ platí $B(x,r) \cap M \neq \emptyset$ a $B(x,r) \cap (\mathbf{R}^n \setminus M) \neq \emptyset$. **Hranicí množiny** M rozumíme množinu všech hraničních bodů M. Značíme ji $H(M)$.

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$. **Vnitřkem** množiny M rozumíme množinu všech vnitřních bodů množiny M. **Uzávěrem** množiny M rozumíme množinu $M \cup H(M)$. Vnitřek množiny M budeme značit $\operatorname{Int} M$ a pro uzávěr množiny M vyhradíme symbol $\overline{M}$.

Definice. Řekneme, že množina M je **omezená v** $\mathbf{R}^n$, jestliže existuje $r > 0$ tak, že $M \subset B(\mathbf{o}, r)$.

V.2. Spojitost funkcí z $\mathbf{R}^n$

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$, $x \in M$ a $f : M \to \mathbf{R}$. Řekneme, že f je **spojitá v bodě** x **vzhledem k** M, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in B(x,\delta) \cap M : f(y) \in B(f(x), \varepsilon).$$

Definice. Nechť $x^j \in \mathbf{R}^n$ pro každé $j \in \mathbf{N}$ a $x \in \mathbf{R}^n$. Říkáme, že posloupnost $\{x^j\}_{j=1}^{\infty}$ **konverguje k** x, pokud $\lim_{j\to\infty} \rho(x, x^j) = 0$. Značíme $x^j \to x$. Prvek x nazýváme **limitou posloupnosti** $\{x^j\}_{j=1}^{\infty}$.

Věta 4. *Nechť $x^j \in \mathbf{R}^n$ pro každé $j \in \mathbf{N}$ a $x \in \mathbf{R}^n$. Posloupnost $\{x^j\}_{j=1}^{\infty}$ konverguje k x právě tehdy, když posloupnost $\{x_i^j\}_{j=1}^{\infty}$ konverguje k x_i pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Věta 5 (Heine). *Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$, $x \in M$ a $f : M \to \mathbf{R}$. Pak je ekvivalentní:*
- (i) *f je spojitá v x vzhledem k M,*
- (ii) *$\lim_{j\to\infty} f(x^j) = 0$ pro každou posloupnost $\{x^j\}_{j=1}^{\infty}$ splňující $x^j \in M$ pro $j \in \mathbf{N}$ a $\lim_{j\to\infty} x^j = x$.*

Definice. Nechť $M \subset \mathbf{R}^n$ a $f : M \to \mathbf{R}$. Řekneme, že f je **spojitá na** M, jestliže je spojitá v každém bodě $x \in M$ vzhledem k M.

Definice. Množinu $M \subset \mathbf{R}^n$ nazýváme **kompaktní**, pokud z každé posloupnosti prvků množiny M lze vybrat konvergentní posloupnost s limitou v M.

Lemma. *Nechť $F \subset \mathbf{R}^n$ je uzavřená množina a $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ je posloupnost prvků F konvergující k prvku $y \in \mathbf{R}^n$. Potom $y \in F$.*

Věta 6 (charakterizace kompaktních množin v $\mathbf{R}^n$). *Množina $M \subset \mathbf{R}^n$ je kompaktní, právě když je uzavřená a omezená.*