

4. Derivace funkce

1. Nalezněte $A, B \in \mathbf{R}$, tak aby na \mathbf{R} platil vztah

$$\begin{aligned} & \left(A + x - \operatorname{arctg} x + \left(\frac{1}{2}(1+x^2) \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x \right) (\log(1+x^2) - 1) \right)' \\ & = (Ax + B)(\operatorname{arctg} x) \log(1+x^2). \end{aligned}$$

2. Najděte $A \in \mathbf{R}$, aby na $(0, +\infty)$ platil vztah

$$\begin{aligned} & \left(\log(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x}) + \operatorname{arctg} x + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) \right)' \\ & = A \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^4 x}}. \end{aligned}$$

3. U následujících funkcí spočtěte derivace (i jednostranné, pokud neexistuje oboustranná):

$$\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right), \quad x^2 \exp(-|x-1|), \quad \frac{\sin x}{\sin(x + \frac{\pi}{4})}.$$

4. Spočtěte derivaci (resp. jednostranné derivace) následujících funkcí ve všech bodech, kde existuje.

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) & \text{pro } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \\ \frac{\pi}{2} & \text{pro } x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}; \end{cases}$$

$$f(x) = \max\{\min\{\cos x, (1/2)\}, (-1/2)\};$$

$$f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}};$$

$$f(x) = \arccos \frac{1}{1+x^2};$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 (\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}) & \text{pro } x \neq 0, \\ 0 & \text{pro } x = 0; \end{cases}$$

$$f(x) = x^{(x^x)}, \text{ pro } x > 0;$$

$$f(x) = \max\{x + 4 \operatorname{arctg}(\sin x), x\}.$$

Výsledky

4.2. Pro funkci f platí

$$f(x) = \begin{cases} -1/2, & x \in \langle 2\pi/3, 4\pi/3 \rangle + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}, \\ \cos x, & x \in ((\pi/3, 2\pi/3) \cup (4\pi/3, 5\pi/3)) + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}, \\ 1/2, & x \in \langle -\pi/3, \pi/3 \rangle + 2k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Z předchozího vyjádření vyplývá, že

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-\pi/3, \pi/3) + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}, \\ -\sin x, & x \in (\pi/3, 2\pi/3) + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Funkce f je spojitá na \mathbf{R} a proto můžeme podle z předchozího vyjádření vypočítat jednostranné derivace jako příslušné limity derivací:

$$\begin{aligned} f'_+(\pi/3 + 2k\pi) &= \lim_{x \rightarrow \pi/3 + 2k\pi+} -\sin x = -\sin(\pi/3 + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2, \\ f'_-(\pi/3 + 2k\pi) &= \lim_{x \rightarrow \pi/3 + 2k\pi-} 0 = 0, \\ f'_+(2\pi/3 + 2k\pi) &= 0, \\ f'_-(2\pi/3 + 2k\pi) &= -\sin(2\pi/3 + 2k\pi) = -\sqrt{3}/2, \\ f'_+(4\pi/3 + 2k\pi) &= -\sin(4\pi/3 + 2k\pi) = \sqrt{3}/2, \\ f'_-(4\pi/3 + 2k\pi) &= 0, \\ f'_+(5\pi/3 + 2k\pi) &= 0, \\ f'_-(5\pi/3 + 2k\pi) &= -\sin(5\pi/3 + 2k\pi) = \sqrt{3}/2, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

4.3. Zřejmě $\mathcal{D}(f) = \mathbf{R}$. Platí $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$ pro $x > 0$. Vzhledem k tomu, že $1 - e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$, tak pro každé $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ máme

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{e^{-x^2} 2x}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}} = e^{-x^2} \frac{x}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}.$$

V bodě 0 počítejme derivaci funkce f podle definice:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}{x}.$$

Výpočet poslední limity provedeme nejprve zprava a pak zleva.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{\frac{e^{-x^2} - 1}{-x^2}}$$

Uvědomme si, že

- (1) $\lim_{y \rightarrow 0+} \frac{e^y - 1}{y} = 1$,
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0$,
- (3) $-x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- (4) $\sqrt{\quad}$ je spojitá na svém definičním oboru.

Z věty o limitě složené funkce, (1), (2) a (3) plyne $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{-x^2} - 1}{-x^2} = 1$. Odtud, z (4) a věty o limitě složené funkce obdržíme

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{\frac{e^{-x^2} - 1}{-x^2}} = 1.$$

Obdobně dostaneme

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} -\sqrt{\frac{e^{-x^2} - 1}{-x^2}} = -1.$$

Derivace funkce f v bodě 0 tedy neexistuje. Platí totiž $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$.

4.4. Zkoumaná funkce je definována na celém \mathbf{R} a je na \mathbf{R} spojitá. Je-li $x \neq 0$, můžeme $f'(x)$ vypočítat pomocí věty o derivaci složené funkce:

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2 \operatorname{sgn} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}}.$$

V 0 vypočítáme jednostranné derivace pomocí limity derivace (předpoklady příslušné věty jsou splněny):

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \operatorname{sgn} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} = \sqrt{2},$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 \operatorname{sgn} x}{(1+x^2)\sqrt{x^2+2}} = -\sqrt{2}.$$

V 0 tedy derivace neexistuje.

4.5. Pro $x \neq 0$ platí

$$f'(x) = 2x\left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right) + x^2\left(-\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}\right).$$

Tento vztah vyplývá z věty o aritmetice derivací a věty o derivaci složené funkce. V bodě 0 počítejme derivaci z definice, tj. počítejme limitu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x\left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right) = 0,$$

neboť $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ a funkce $x \mapsto \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right)$ je omezená na jistém prstencovém okolí bodu 0. Platí tedy $f'(0) = 0$.

4.6. Spočtěme nejprve

$$(x^x)' = (e^{x \log x})' = e^{x \log x} \left(1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x(\log x + 1), \quad x > 0.$$

Pak dostáváme

$$\begin{aligned} \left(x^{(x^x)}\right)' &= \left(e^{x^x \log x}\right)' = e^{x^x \log x} \left(\left(x^x\right)' \cdot \log x + x^x \cdot \frac{1}{x}\right) \\ &= x^{(x^x)} \left(x^x(\log x + 1) \log x + x^{x-1}\right), \quad x > 0. \end{aligned}$$

Při výpočtech jsme využili větu o derivaci složené funkce, větu o derivaci součinu a faktu, že derivované funkce mají ve svých definičních oborech vlastní derivace.

4.7. Pro hodnoty funkce f platí

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 \operatorname{arctg}(\sin x), & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi), \quad k \in \mathbf{Z}, \\ x, & x \in \langle (2k+1)\pi, (2k+2)\pi \rangle, \quad k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Odtud již můžeme vypočítat hodnotu derivace všude mimo body ve tvaru $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4\frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}, & x \in (2k\pi, (2k + 1)\pi), k \in \mathbf{Z}, \\ 1, & x \in ((2k + 1)\pi, (2k + 2)\pi), k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

Funkce f je na \mathbf{R} spojitá a jednostranné derivace v bodech $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, lze tedy počítat pomocí limit derivací:

$$f'_+(2k\pi) = \lim_{x \rightarrow 2k\pi+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2k\pi+} \left(1 + 4\frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} \right) = 5,$$

$$f'_-(2k\pi) = \lim_{x \rightarrow 2k\pi-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2k\pi-} 1 = 1,$$

$$f'_-((2k + 1)\pi) = \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi-} \left(1 + 4\frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} \right) = -3,$$

$$f'_+((2k + 1)\pi) = \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi+} 1 = 1.$$

Z výše uvedeného vyplývá, že funkce f v bodech tvaru $k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, nemá derivaci.