

## 1. OPAKOVÁNÍ STŘEDOŠKOLSKÉ LÁTKY

1. Řešte následující nerovnice v  $\mathbf{R}$ :

$$\frac{x-2}{2x-8} \geq 1, \quad \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 3x + 3) \geq 0, \quad \frac{x+2}{x+3} > \frac{2x+3}{x+6}.$$

2. Nakreslete graf funkce  $f(x) = \left| \left| \left| |x| - 1 \right| - 1 \right| - 1 \right|$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

3. Řešte rovnice v  $\mathbf{R}$ :

$$\sin 2x = \sin x, \quad 2 \sin x + \cos x = 1, \quad \log(x^2 + 1) = 2 \log(3 - x).$$

4. Vyjádřete funkce  $\cos 5x$  a  $\sin 5x$  pomocí funkcí  $\cos x$  a  $\sin x$ .

5.\* Dokažte následující vztahy:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \quad \sum_{k=1}^n k^3 = (1+2+3+\dots+n)^2.$$

6.\* Dokažte, že pro každé  $a, b \in \mathbf{R}$  platí  $|a+b| \leq |a|+|b|$  a  $||a|-|b|| \leq |a-b|$ .

7.\* Necht'  $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}$ . Pak platí  $|\sum_{i=1}^n x_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$ .

8.\* Pro každé  $n \in \mathbf{N}$  dokažte, že platí  $n \leq 2^n$ .

9.\* Pro každé  $n \in \mathbf{N}$ ,  $n \neq 3$ , dokažte, že platí  $n^2 \leq 2^n$ .

10.\* Dokažte, že číslo  $\sqrt{2}$  je iracionální.

11.\* (binomická věta) Pro každé  $n \in \mathbf{N}$  a pro každá  $a, b \in \mathbf{R}$  platí

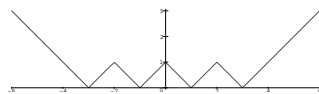
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

12.\* (Cauchy) Necht'  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbf{R}$ . Potom platí

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

### VÝSLEDKY A NÁVODY

1.  $(4, 6)$ ;  $\langle 1, 2 \rangle$ ;  $(-6, -3) \cup \left( \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{13}), \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{13}) \right)$



2. Obrázek grafu

3. 1. rovnice:  $x = k\pi$  nebo  $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  nebo  $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$ , kde  $k \in \mathbf{Z}$ ; 2. rovnice:  $x = 2k\pi$  nebo  $x = \pi - \arcsin(4/5) + 2k\pi$ , kde  $k \in \mathbf{Z}$ ; 3. rovnice:  $4/3$       4. Použijte Moivreovu větu

nebo součtové vzorce. Výsledek:  $\cos 5x = \cos^5 x - 10 \cos^3 x \sin^2 x + 5 \cos x \sin^4 x$  a  $\sin 5x = 5 \cos^4 x \sin x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x$ . **5.** Použijte matematickou indukci. **6.** První nerovnost dokažte užitím vhodné definice absolutní hodnoty nebo provedením diskuse znamének členů v absolutních hodnotách. Druhou nerovnost odvoďte z první.