Riešenie záverečného testu Varianta B, LS 2015/2016

UPOZORNENIE: Priložené bodovanie sa vzťahuje na moje skupiny študentov, bodovanie jednotlivých cvičiacich sa môže a bude mierne líšiť.
V prípade, že odhalíte chybu/preklep (aj s odstupom), napíšte mi to prosím do mailu, môže to zachrániť zdravie iných.

1. (6b) Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-3\cdot\left(\frac{3}{10}\right)^{2n-1} + \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{3n}{2}} + 5\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{3n}}{4\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^{n} - 3\cdot(0.3)^{2n} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{6}\right)^{3n+2}}.$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-3\cdot\frac{10}{3}\left(\frac{9}{100}\right)^{n} + \left(\frac{1}{27}\right)^{n} + 5\cdot\left(\frac{8}{125}\right)^{n}}{4\cdot\left(\frac{1}{20}\right)^{n} - 3\cdot\left(\frac{9}{100}\right)^{n} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{n}} = \qquad (1b)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{9}{100}\right)^{n}\Big(-10 + \left(\frac{100}{243}\right)^{n} + 5\cdot\left(\frac{32}{45}\right)^{n}\Big)}{\left(\frac{9}{100}\right)^{n}\Big(4\cdot\left(\frac{5}{9}\right)^{n} - 3 + \frac{1}{18}\cdot\left(\frac{100}{243}\right)^{n}\Big)} = \qquad (3b)$$

$$= \frac{10}{3} \qquad (2b)$$

2. (18b) (a)Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{9(x+1)}{x^2},$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/ záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitýh bodech), limity v krajních bodech Df , derivaci funkce a její nulové body, lokální a globální extrémy, intervaly monotonie, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body, nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.

(b) Dále vypočítejte a do grafu nakreslete tečnu v inflexním bodě.

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (0,5b)
$f(-x) = \frac{9(-x+1)}{x^2} \neq \pm f(x) = \pm(\frac{9(x+1)}{x^2})$ a funkce není ani sudá ani lichá.
Případně stačilo dosadit bod např. $x = 1$, ve kterém podmínka neplatí . (0,5b)

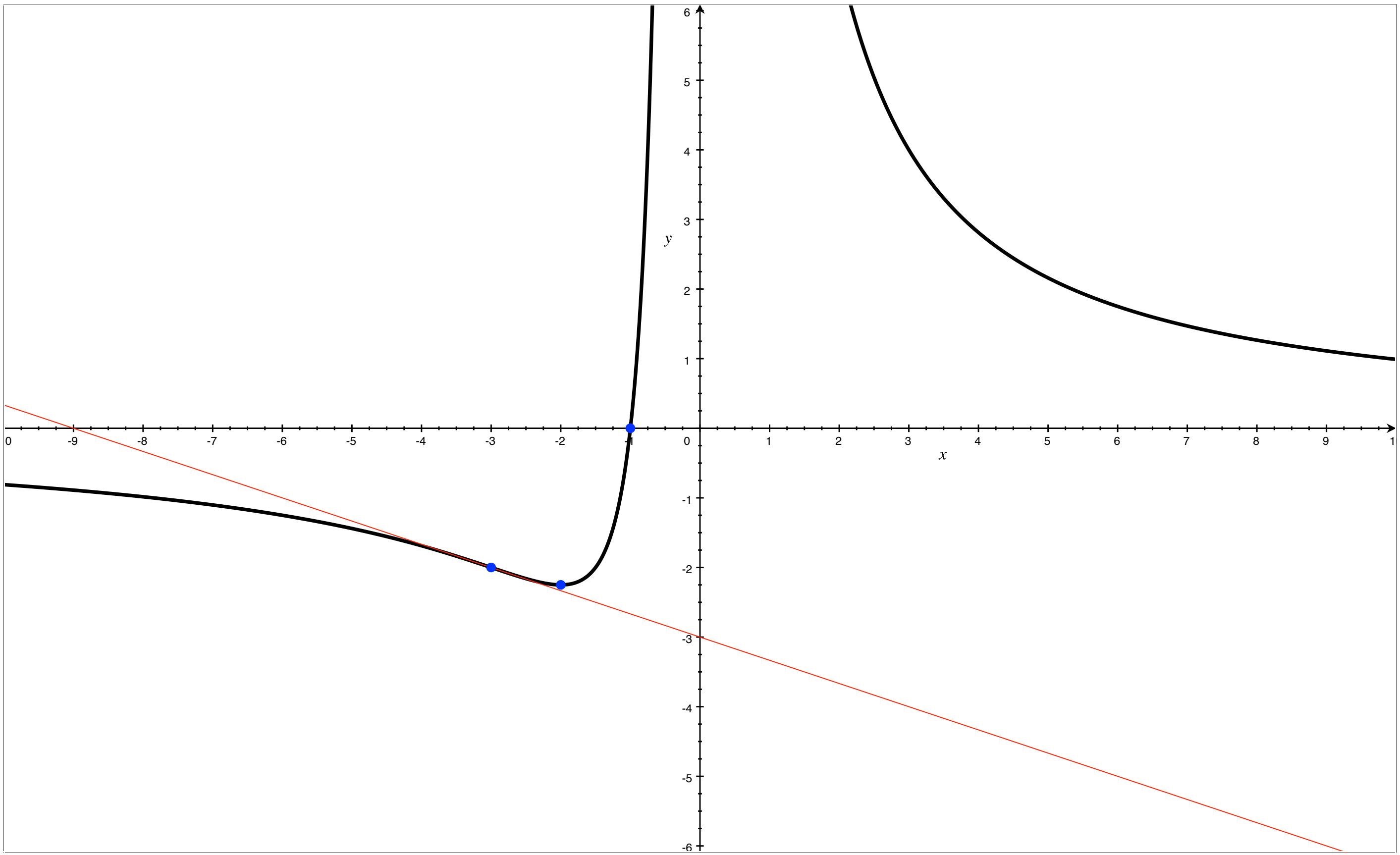
$P_x : f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow P_x[-1, 0]$
P_y neexistuje (z D_f) (0,5b)
znamínko funkce: funkce je na $(-\infty, -1)$ záporná; na $(-1, 0)$ a $(0, \infty)$ je kladná (0,5b)
$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{9(x+1)}{x^2} = 0$
$\lim\limits_{x\to 0^\pm} \dfrac{9(x+1)}{x^2} = \dfrac{9}{0^+} = \infty$ (2b)
$f'(x) = -9\dfrac{x+2}{x^3}$; f' je definována na celém D_f (2b)
nulové body derivace: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ (0,5b)
monotónnost funkce: $f'(x) < 0$ na $(-\infty, -2)$ a $(0, \infty)$ a funkce je tady klesající,
$f'(x) < 0$ na $(-2, 0)$ a funkce je tady rostoucí (1b)
Bod $[-2, -\frac{9}{4}]$ je lokální i globální minimum (0,5b)

$f''(x) = 18\dfrac{x+3}{x^4}$; f'' je definována na celém D_f (2b)

nulové body 2. derivace: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ (0,5b)
konvexita/konkavita: $f''(x) > 0$ na $(-3, 0)$ a $(0, \infty)$ a funkce je tady konvexní,
$f''(x) < 0$ na $(-\infty, -3)$ a funkce je tady konkávní (1b)
inflexní bod $[-3, -2]$ (0,5b)

asymptota v $\pm\infty$ je $y = 0$, plyne z výpočtu limit, nebo ověřením (1b)

(b) tečna $y = kx + q$ v $x = -3$:
$k = f'(-3) = -\frac{1}{3}; q = y_0 - (-\frac{1}{3}) \cdot (-3) = -3$
$y = -\frac{1}{3}x - 3$ (1b)
graf: (4b)



---

3. (18b) Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = -x^2 + y$ na množině
$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : -x+1 \leq y \leq \ln x, x \leq 5\}$
Zadanou množinu M nakreslete a vyznačte v ní všechny nalezené kandidáty.
Pomůcka: $\sqrt{2} \doteq 1.41, \ln 5 \doteq 1.61$.

Obrázok s kandidátmi (3b)
Vrcholy: priesečníky logaritmu a priamok $x = 3$:
$y = \ln x$ a $x = 5$ - dosadením:
Riešením je bod $C[5, \ln 5]$ (1b)
$y = \ln x$ a $y = -x + 1$ - dosadením:
Riešením je bod $A[1, 0]$ (1b)
$x = 5$ a $y = -x + 1$ - dosadením:
Riešením je bod $B[5, -4]$ (1b)

Stacionárne body:
$\partial_x f = -2x = 0$
$\partial_y f = 1 \neq 0$
Stacionární body nemá (2b)

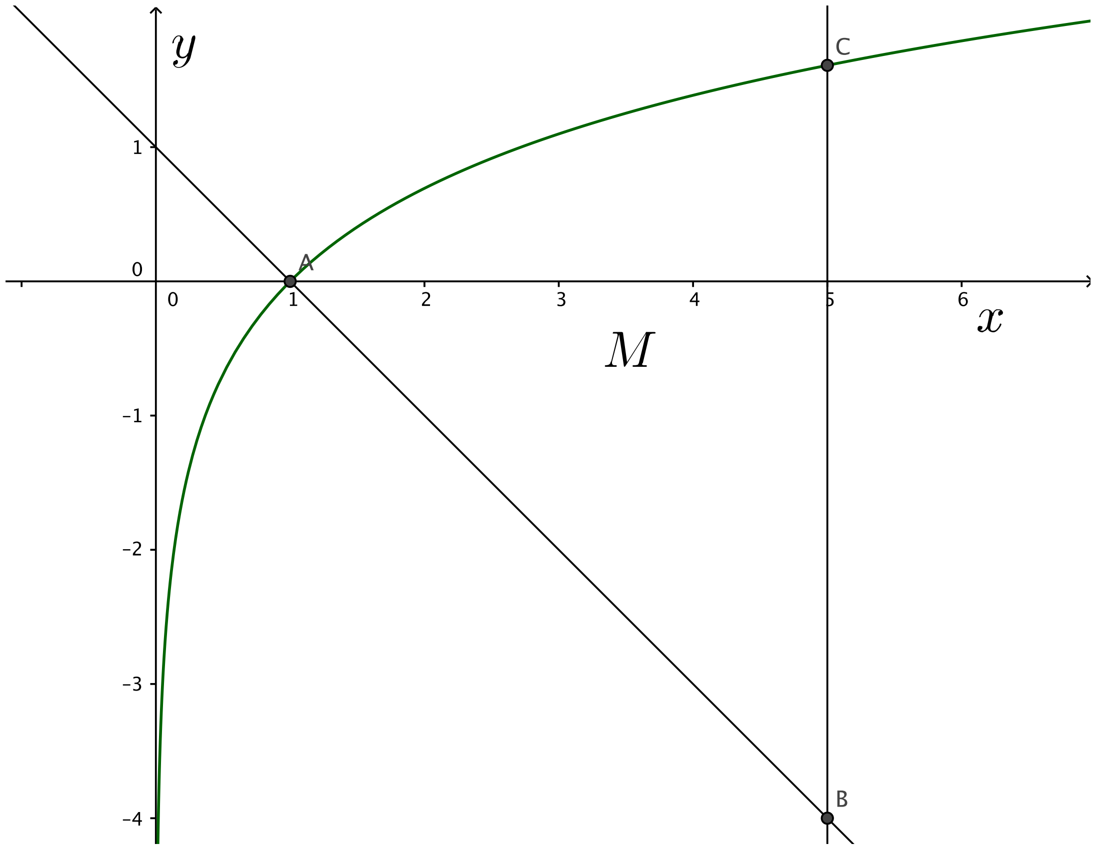
Viazané extrémy:
Úsečka $\overline{AB}$
$x \in (1,5), y = -x + 1$

$f(x,-x+1) = g(x) = -x^2 - x + 1$
$g'(x) = -2x - 1$
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \notin (1,5)$ (2,5b)

Úsečka $\overline{BC}$
$x = 5, y \in (-4, \ln 5)$
$f(5,y) = g(y) = -25 + y$
$g'(y) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ žádný kandidát (2,5b)

Logaritmus $\overline{AC}$
$x \in (1,5), y = \ln x$
$f(x, \ln x) = g(x) = -x^2 + lnx$
$g'(x) = -2x + \frac{1}{x}$
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \notin (1,5)$, žádný nový kandidát (3b)

Hodnoty $f(A) = -1; f(B) = -29; f(C) = -25 + \ln 5$
Maximum v bode $A[1,0]$,minimum v bode $B[5,-4]$ (2b)



4. (18b) Určete globální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + 4z^2 + \frac{1}{4}$
na množině $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3;\ 4x^2 + 9y^2 + z^2 \leq 36\}$

Stacionární body:
$\partial_x f = 2x = 0$
$\partial_y f = -2y = 0$
$\partial_z f = 8z = 0$
Stacionární bod: $SB[0, 0, 0]$ (3b)

Výpočet pomocí Lagrangeovych multiplikátorů:
$L(x, y, z, \lambda) = x^2 - y^2 + 4z^2 + \frac{1}{4} + \lambda(4x^2 + 9y^2 + z^2 - 36)$
$(1)\partial_x L = 2x + 8x\lambda = 0$
$(2)\partial_y f = -2y + 18y\lambda = 0$
$(3)\partial_z f = 8z + 2z\lambda = 0$
$(4)\partial_\lambda f = 4x^2 + 9y^2 + z^2 - 36 = 0$ (5b)

z (1) máme $2x(1+4\lambda)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee \lambda=-\frac{1}{4}$
z (2) máme $-2y(1-9\lambda)=0 \Leftrightarrow y=0 \vee \lambda=\frac{1}{9}$
z (3) máme $2z(4+\lambda)=0 \Leftrightarrow z=0 \vee \lambda=-4$ (3b)
$[0,0,0]$ je stacionární bod a leží uvnitř množiny, nesplňuje (4)
dosazujeme postupně λ, vyjadříme v $(1,2,3) x, y, z$ a dosadíme do (4), dopočteme:
$A[0,0,-6], \lambda=-4, f(A)=f(B)=144,25$
$B[0,0,6], \lambda=-4$
$C[0,-2,0], \lambda=\frac{1}{9}, f(C)=f(D)=-3,75$
$D[0,2,0], \lambda=\frac{1}{9}$
$E[-3,0,0], \lambda=-\frac{1}{4}, f(E)=f(F)=9,25$
$F[3,0,0], \lambda=-\frac{1}{4}$ (6b)
$f(SB)=\frac{1}{4}$ Maximum je v bodoch A, B, minimum je v bodoch C, D. (1b)