Riešenie záverečného testu Varianta A, LS 2015/2016

UPOZORNENIE: Priložené bodovanie sa vzťahuje na moje skupiny študentov, bodovanie jednotlivých cvičiacich sa môže a bude mierne líšiť.
V prípade, že odhalíte chybu/preklep (aj s odstupom), napíšte mi to prosím do mailu, môže to zachrániť zdravie iných.

1. (6b) Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n(\sqrt{n^2+4n+3}-\sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+2n+1}}.$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3n(\sqrt{n^2+4n+3}-\sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+2n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+4n+3}+\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2+4n+3}+\sqrt{n^2-1}} = \qquad (2b)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(12+\frac{12}{n})}{n^2\sqrt{1+\ldots}(\sqrt{1+\ldots}+\sqrt{1+\ldots})} = \qquad (2b)$$

$$= 6 \qquad (2b)$$

*případně se dalo zkrátit:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n(\sqrt{n^2+4n+3}-\sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n(\sqrt{n+3}\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\sqrt{n+1})}{\sqrt{(n+1)^2}}$$

2. (18b) (a)Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + x - 1,$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/ záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitýh bodech), limity v krajních bodech Df , derivaci funkce a její nulové body, lokální a globální extrémy, intervaly monotonie, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body, nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.

(b) Dále vypočítejte a do grafu nakreslete funkční hodnoty pro $x = \frac{3}{4}, x = -\frac{3}{4}$ a tečnu v bodě $x = 0$.
Pomůcka: $\sqrt{2} \doteq 1,41, \sqrt{5} \doteq 2,24, \sqrt{10} \doteq 3.16$

$x^2 + 1 > 0$, z toho plyne $D_f = \mathbb{R}$ (0,5b)
$f(-x) = \sqrt{x^2+1} - x - 1 \neq \pm f(x) = \pm(\sqrt{x^2+1} + x - 1)$ a funkce není ani sudá ani lichá. Případně stačilo dosadit bod napr $x = 1$, ve kterém podmínka neplatí . (0,5b)

$P_x : f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, t.j. $P_x = P_y = [0, 0]$ (0,5b)
znamínko funkce: funkce je na $(-\infty, 0)$ záporná; na $(0, \infty)$ je kladná (0,5b)

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} + x - 1 = -1 + \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = -1 + \frac{1}{\infty} = -1$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} + x - 1 = \infty + \infty = \infty$$ (1,5b)

$f'(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}$; f' je definována na celém D_f (2b)
nulové body derivace: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = x^2 + 1$, neexistují (0,5b)
monotónnost funkce: $f'(x) > 0$ na D_f a funkce je rostoucí (1b)
lokální ani globální extrémy neexistují (0,5b)

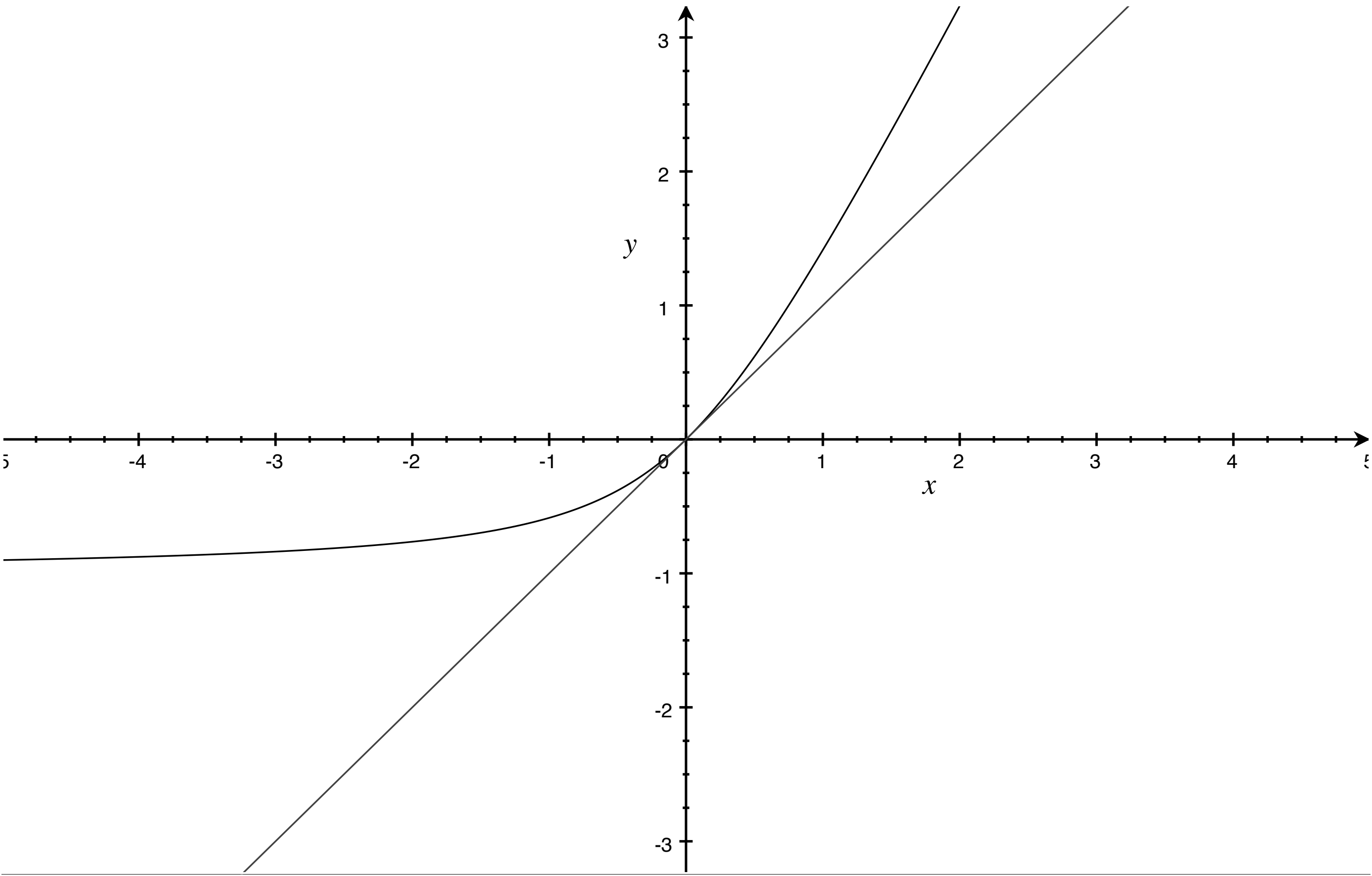
$f''(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$; f'' je definována na celém D_f (2b)

nulové body 2. derivace neexistují
$f''(x) > 0$ a funkce je konvexní na D_f (1b)
inflexní bod neexistuje (0,5b)

asymptota v ∞ : $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{x} = 2 = k_1$
$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} + x - 1 - 2x = -1$
asymptota $y = 2x - 1$
asymptota v $-\infty$ je $y = -1$, plyne z výpočtu limit, nebo ověřením (2b)

(b) $f(\frac{3}{4}) = 1, f(-\frac{3}{4}) = -\frac{1}{2}$ (1b)
tečna $y = kx + q$ v $x = 0$:
$k = f'(0) = 1; q = y_0 - (1) \cdot 0 = 0$
$y = x$ (1b)

graf: (3b)



---

3. (18b) Určete globální extrémy funkce $f(x, y) = -x + y$ na množině
$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2;\ e^x \le y \le e^{2x}, 0 \le x \le 3\}$
Zadanou množinu M nakreslete a vyznačte v ní všechny nalezené kandidáty.
Pomůcka: $\ln \frac{1}{2} \doteq -0,7; e^3 \doteq 20,1; e^6 \doteq 403,4$.

Obrázok s kandidátmi (3b)
Vrcholy: priesečníky exponenciál a priamky $x = 3$:
$y = e^x$ a $x = 3$ - dosadením:
Riešením je bod $A[3, e^3]$ (1b)
$y = e^{2x}$ a $x = 3$ - dosadením:
Riešením je bod $B[3, e^6]$ (1b)
$y = e^x$ a $y = e^{2x}$ - dosadením:
Riešením je bod $A[0, 1]$ (1b)
Stacionárne body: funkce je v obou složkách lineární, nebo výpočet
$\partial_x f = -1 \neq 0$
$\partial_y f = 1 \neq 0$
Stacionární body nemá (2b)

Viazané extrémy:

Úsečka $\overline{AB}$

funkce je v obou složkách lineární, nebo výpočet $\Rightarrow$ žádný kandidát (2b)

Exponenciála $\overline{AB}$

$x \in (0, 3), y = e^x$

$f(x, e^x) = g(x) = -x + e^x$

$g'(x) = -1 + e^x$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \notin (0, 3)$, žádný nový kandidát (3b)

Exponenciála $\overline{AC}$

$x \in (0, 3), y = e^{2x}$

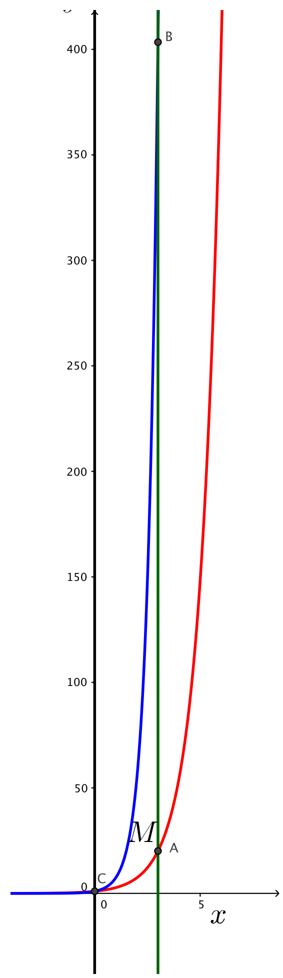
$f(x, e^x) = g(x) = -x + e^{2x}$

$g'(x) = -1 + 2e^x$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln \frac{1}{2} \notin (0, 3)$, žádný nový kandidát (3b)

Hodnoty $f(A) = e^3 - 3 \doteq 17,1; f(B) = e^6 - 3 \doteq 400,4; f(C) = 1$

Maximum v bode $B[3, e^6]$,minimum v bode $C[0, 1]$ (2b)



4. (18b) Určete globální extrémy funkce $f(x, y, z) = x^2 - xy + y^2 - 2z$
na množině $M = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3; xy - z = 0, x^2 + y^2 - 4 = 0\}$

Výpočet pomocou Jacobiánu:
$(1) g_1 = xy - z = 0$
$(2) g_2 = x^2 + y^2 - 4 = 0$
$$(3)\, \det \mathcal{J} = \det \begin{pmatrix} 2x - y & 2y - x & -2 \\ y & x & -1 \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix} = 6(x^2 - y^2) = 0 \qquad (6b)$$
$x = \pm y$ dosadíme do (1) a (2) a dostávame:
$[-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2]$ pro LM: $\lambda 1 = -2, \lambda 2 = \frac{1}{2}$
$[-\sqrt{2}, \sqrt{2}, -2]$ pro LM: $\lambda 1 = -2, \lambda 2 = -\frac{5}{2}$
$[\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -2]$ pro LM: $\lambda 1 = -2, \lambda 2 = -\frac{5}{2}$
$[\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2]$ pro LM: $\lambda 1 = -2, \lambda 2 = \frac{1}{2}$ (10b)

$f(A) = f(D) = -2, f(B) = f(C) = 10$
maximum v bodoch B, C, minimum v bodoch A, D (2b)