Riešenie záverečného testu Varianta D, ZS 2015/2016

UPOZORNENIE: Priložené bodovanie sa vzťahuje na moje skupiny študentov, bodovanie jednotlivých cvičiacich sa môže a bude mierne líšiť.
V prípade, že odhalíte chybu/preklep (aj s odstupom), napíšte mi to prosím do mailu, môže to zachrániť zdravie iných.

1. (6b) Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2\sqrt{(4n-3)^3 - 16n(2n-4)^2}}{n((n\cdot\sqrt{3}-2)^2 + (2n+3)^2)}.$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\sqrt{112n^2 - 148n - 27}}{7n^2 + 4n(3-\sqrt{3}) + 13} = \qquad (2b)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\sqrt{112 - \frac{148}{n} - \frac{27}{n^2}}}{n^2(7 + \frac{4(3-\sqrt{3})}{n} + \frac{13}{n^2})} = \qquad (2b)$$

$$= \frac{4\sqrt{7}}{7} \qquad (2b)$$

2. (18b) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = x^2 e^{-x},$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/ záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitýh bodech), limity v krajních bodech Df , derivaci funkce a její nulové body, lokální a globální extrémy, intervaly monotonie, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body, nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.

Dále určete tečnu v každém jejím inflexním bodě.

Z menovateľa plynie $D_f = \mathbb{R}$ (0,5b)
$f(-x) = x^2 e^x \neq \pm f(x) = \pm x^2 e^{-x}$ a funkce nie je ani sudá ani lichá. Prípadne stačilo dosadiť bod napr $x = 1$, v ktorom podmienka neplatí . (0,5b)

$P_x : f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, t.j. $P_x = [0, 0] = P_y$ (0,5b)
znamienko funkcie: $e^{-x} > 0$ funkcia je na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ kladná (0,5b)

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 e^{-x} = \infty \cdot \infty = \infty$ (0,5b)

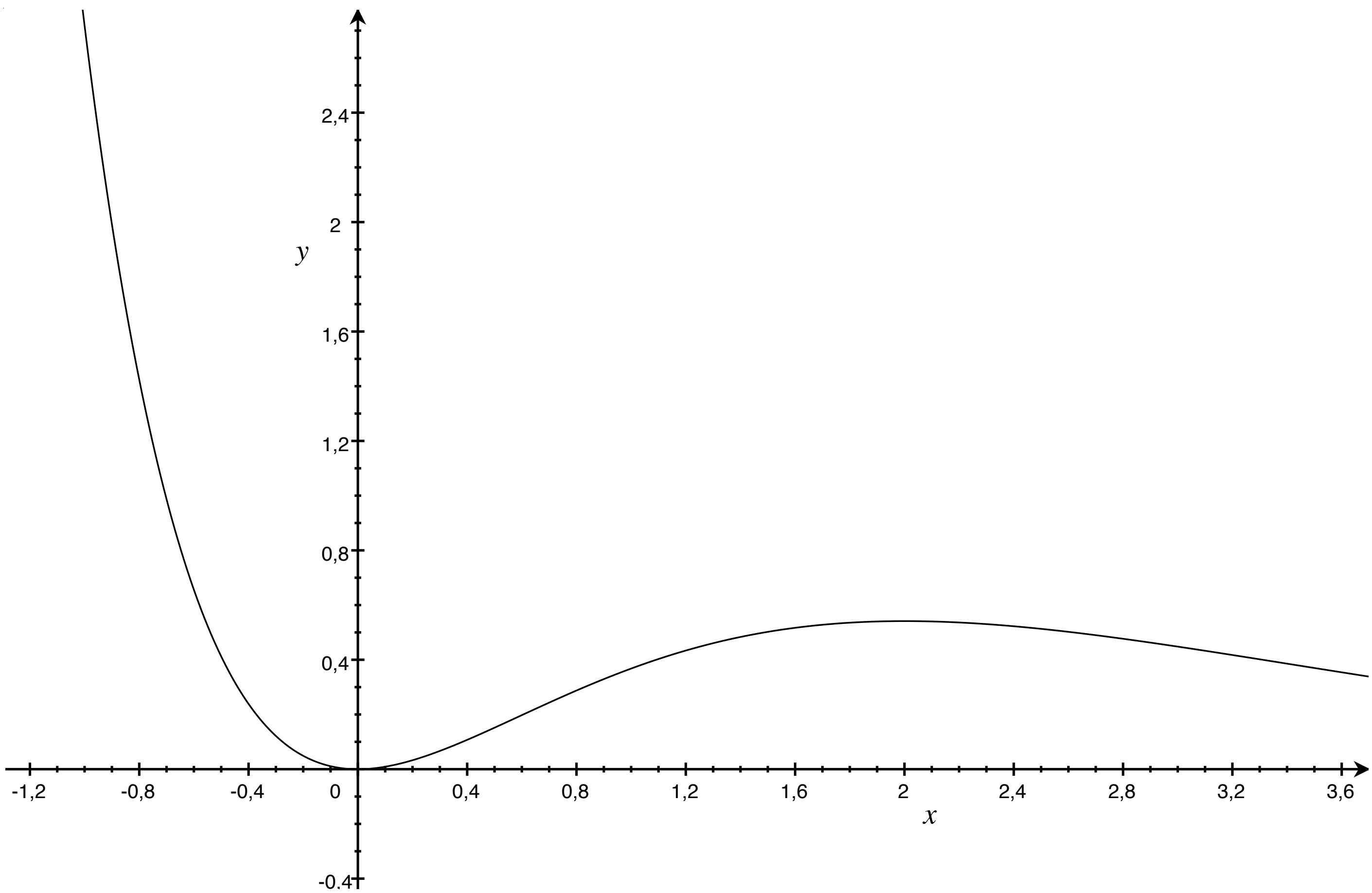
$\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-x} \overset{\infty\cdot 0}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{e^x} = \dfrac{2}{\infty} = 0$, alebo odôvodniť tým, že exponenciála je „rýchlejšia“ ako polynóm (1b)

$f'(x) = xe^{-x}(2 - x)$; f' je definovaná na celom D_f (2b)
nulové body derivácie: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 2$ (0,5b)
monotónnosť funkcie: $f'(x) > 0$ na $(0, 2)$ a funkcia je tu rastúca,
$f'(x) < 0$ na intervaloch $(-\infty, 0), (2, \infty)$ a funkcia je tu klesajúca (1b)
lokálne i globálne minimum funkcie je v bode $[0, 0]$
lokálne maximum je $[2, 4e^{-2}]$ (0,5b)

$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$; f'' je definovaná na celom D_f (2b)
nulové body 2. derivácie $f''(x) \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}$ (0,5b)
konvexita/ konkavita: $f''(x) > 0$ na $(-\infty, 2 - \sqrt{2})$ a $(2 + \sqrt{2}, \infty)$ a funkcia je tu konvexná
$f''(x) < 0$ na $(2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$ a funkcia je tu konkávna (1b)
inflexné body a vrátane hodnôt $I_1[2-\sqrt{2}, 2(3-2\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}}] \doteq [0,59; 0,19]$, $I_2[2+\sqrt{2}, 2(3+2\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}}] \doteq [3,41; 0,38]$ (2b)

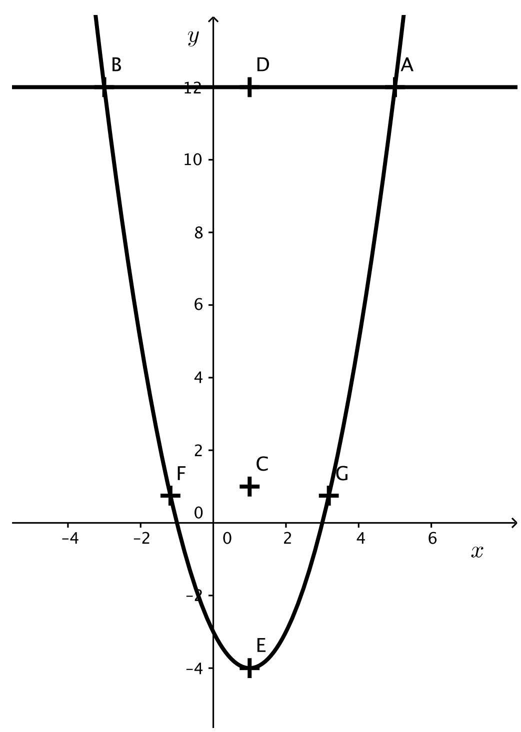
asymptota v $+\infty$: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0 = k_1$
$\lim\limits_{x\to\infty} x^2 e^{-x} - 0x = 0 = q_1$
asymptota v $+\infty$ je $y = 0$ (1b)
$-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2 e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$
asymptota v $-\infty$ neexistuje (1b)

graf: (3b)



3. (18b) Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 - 2x + 2y^2 - 4y$ na množině $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x^2 - 2x - 3 \leq y \leq 12\}$

Vrcholy: priesečníky paraboly a priamky:
$y = x^2 - 2x - 3$ a $y = 12$ - dosadením:
Riešením sú body $A[-3,12], B[5,12]$ (2b)
Stacionárne body:
$\partial_x f = 2x - 2$
$\partial_y f = 4y - 4$
riešením je bod $C[1,1]$ (3b)



Viazané extrémy:
Úsečka $\overline{AB}$
$y = 12, x \in (-3,5)$
$f(x,12) = g(x) = x^2 - 2x + 240$
$g'(x) = 2x - 2$
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
V $x = 1$ sa mení monotónia $g(x)$ a kandidát je $D[1,12]$ (4b)
Časť paraboly AB (napr. Jacobián)
$g = x^2 - 2x - 3 - y = 0$

$\det \mathcal{J} = \det \begin{pmatrix} 2x-2 & 4y-4 \\ 2x-2 & -1 \end{pmatrix} = (2x-2)(-4y+3) = 0$

z Jacobiánu máme $x = 1 \vee y = \frac{3}{4}$, dosadíme do 1. rovnice

a máme kandidátov $E[1,-4], F[1-\frac{\sqrt{19}}{2}, \frac{3}{4}], G[1+\frac{\sqrt{19}}{2}, \frac{3}{4}]$ (6b)

Hodnoty $f(A) = f(B) = 255, f(C) = -3, f(D) = 239, f(E) = 47, f(F) = f(G) = \frac{15}{8}$ (2b)

Maximum v bodoch $A[-3,12], B[5,12]$,minimum v bode $C[1,1]$ (1b).

4. (18b) Určete globální extrémy funkce $f(x,y,z) = y^2 + xz$
na množině $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$

Stacionárne body vnútri množiny:
$\partial_x f = z$
$\partial_y f = 2y$
$\partial_z f = x$
Riešením je bod $A[0,0,0]$, ktorý leží v množine M (4b)

Výpočet viazaných extrémov pomocou Lagrangeových multiplikátorov:
$L(x,y,z,\lambda) = y^2 + xz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 2)$
$(1)\partial_x L = z + 2x\lambda$
$(2)\partial_y L = 2y + 2y\lambda = 2y(1+\lambda)$
$(3)\partial_z L = x + 2z\lambda$
$(4)\partial_\lambda L = x^2 + y^2 + z^2 - 2$ (4b)

z (2) máme $y = 0 \vee \lambda = -1$.
Pre $\lambda = -1$ dostávame z $(1)z = 2x$ a z $(3)x = 2z$, t.j. $x = z = 0$, dosadíme do $(4)y^2 - 2 = 0 \Rightarrow y_1 = \sqrt{2}, y_2 = -\sqrt{2}$
$B[0,\sqrt{2},0], C[0,-\sqrt{2},0]$ (4b)

Pre $y = 0$ si vyjadríme z $(1)\lambda = -\dfrac{z}{2x}; x \neq 0$ (pre $x = 0$ už máme spočítané všetky možnosti). Dosadíme do $(3)x - \dfrac{2z^2}{2x} = 0$ t.j. $x^2 - z^2 = 0$ a $x_3 = z, x_5 = -z$. Dosadíme $x_3 = z; y = 0$ do $(4)2z^2 - 2 = 0$ a máme $z_3 = 1, z_4 = -1$, môžeme dopočítať $\lambda_3 = \lambda_4 = -\dfrac{1}{2}$. Ostáva dosadiť $x_5 = -z; y = 0$ do $(4)2z^2 - 2 = 0$ a máme $z_5 = 1, z_6 = -1$, $\lambda_5 = \lambda_6 = \dfrac{1}{2}$.
$D[1,0,1], E[-1,0,-1], F[-1,0,1], G[1,0,-1]$ (4b)

$f(A) = 0, f(B) = f(C) = 2, f(D) = f(E) = 1, f(F) = f(G) = -1$
maximum v bodoch B, C, minimum v bodoch F, G (2b)