Riešenie záverečného testu Varianta C, ZS 2015/2016

UPOZORNENIE: Priložené bodovanie sa vzťahuje na moje skupiny študentov, bodovanie jednotlivých cvičiacich sa môže a bude mierne líšiť.
V prípade, že odhalíte chybu/preklep (aj s odstupom), napíšte mi to prosím do mailu, môže to zachrániť zdravie iných.

1. (6b) Určete limitu posloupnosti

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{4n} - 3\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{3n} + 2\cdot(0,5)^n}{8\cdot\left(\frac{25}{100}\right)^{\frac{n}{2}} + 4\cdot(0,8)^{3n} + \frac{1}{7^{2n}}}.$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{4n} - 3\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{3n} + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n}{8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n} + 4\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{3n} + \left(\frac{1}{7}\right)^{2n}} = \qquad (1b)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{3n}\left(5\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{3n} - 3 + 2\cdot\left(\frac{125}{128}\right)^n\right)}{\left(\frac{4}{5}\right)^{3n}\left(8\cdot\left(\frac{125}{128}\right)^{n} + 4 + \left(\frac{125}{64\cdot 49}\right)^n\right)} = \qquad (3b)$$

$$= -\frac{3}{4} \qquad (2b)$$

2. (18b) Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \frac{1 - x^3}{x^2},$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/ záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitýh bodech), limity v krajních bodech Df , derivaci funkce a její nulové body, lokální a globální extrémy, intervaly monotonie, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body, nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.

Dále určete tečnu v průsečíku grafu funkce f s osou x.

Z menovateľa plynie $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (0,5b)

$f(-x) = \dfrac{1+x^3}{x^2} \neq \pm f(x) = \pm\dfrac{1-x^3}{x^2}$ a funkce nie je ani sudá ani lichá. Prípadne stačilo dosadiť bod napr $x = 1$, v ktorom podmienka neplatí . (0,5b)

$P_x : f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, t.j. $P_x = [1, 0]$
$P_y : x \neq 0$ neexistuje (0,5b)
znamienko funkcie: funkcia je na $(-\infty, 0)$ a $(0, 1)$ kladná; na $(1, \infty)$ je záporná (0,5b)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^3}{x^2} = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{1-x^3}{x^2} = -\infty \qquad \text{(1b)}$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{1-x^3}{x^2} = \frac{1}{0^+} = \infty \qquad \lim_{x\to0^+} \frac{1-x^3}{x^2} = \frac{1}{0^+} = \infty \qquad \text{(1b)}$$

$f'(x) = \dfrac{-x^3-2}{x^3}; x \neq 0 \Rightarrow f'$ je definovaná na celom D_f (2b)
nulové body derivácie: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{2}$ (0,5b)
monotónnosť funkcie: $f'(x) > 0$ na $(0, -\sqrt[3]{2})$ a funkcia je tu rastúca,
$f'(x) < 0$ na intervaloch $(-\infty, -\sqrt[3]{2}), (0, \infty)$ a funkcia je tu klesajúca (1b)
lokálne minimum funkcie je v bode $[-\sqrt[3]{2}, \frac{3}{\sqrt[3]{4}}]$
lokálne maximum nexistuje, globálne extrémy neexistujú (0,5b)

$f''(x) = \dfrac{6}{x^4}; x \neq 0; f''$ je definovaná na celom D_f (2b)

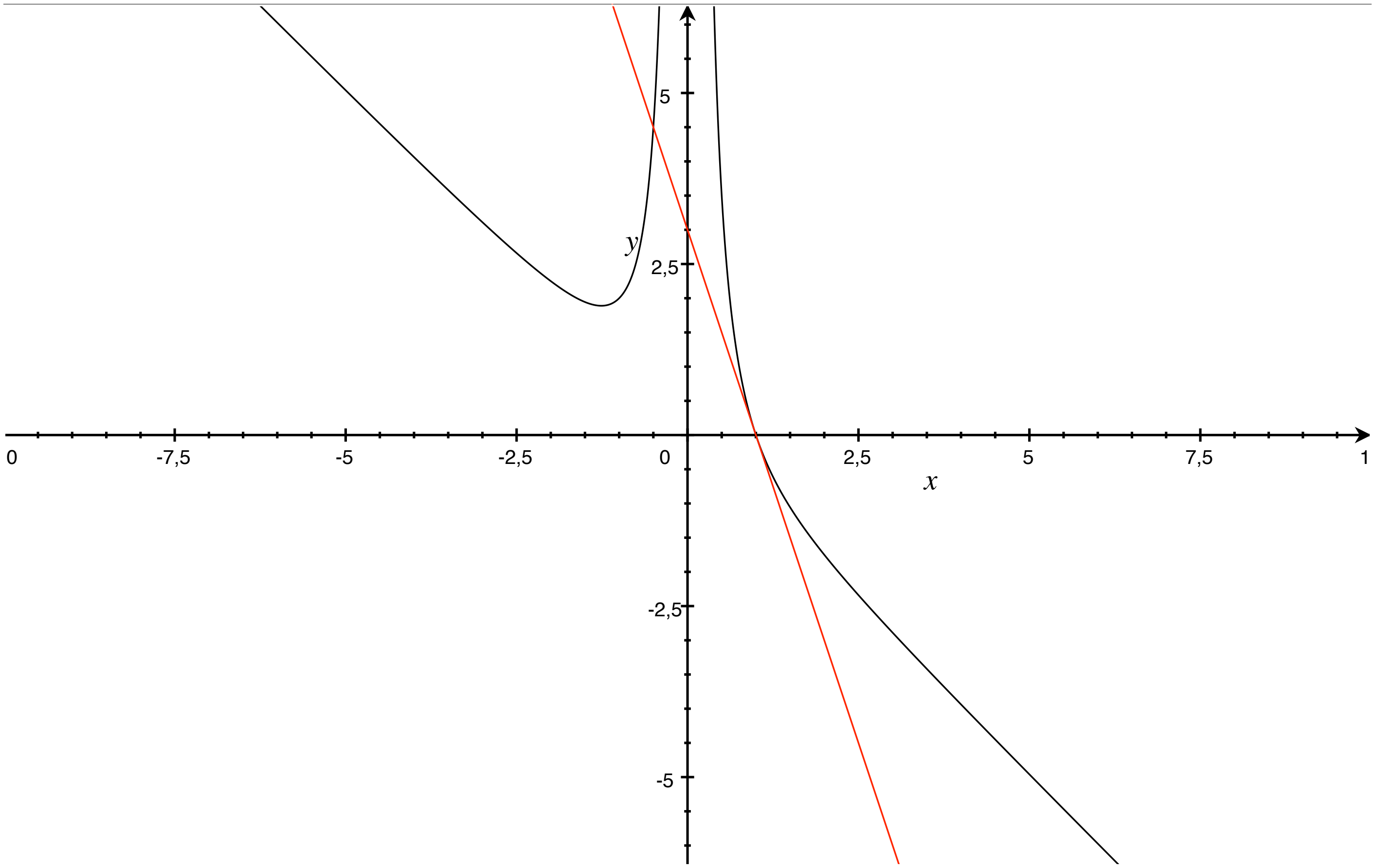
nulové body 2. derivácie $f''(x) \neq 0$
konvexita/ konkavita: $f''(x) > 0$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ t.j. celý D_f a funkcia je tu konvexná (1b)
inflexný bod neexistuje (0,5b)

asymptota v $\pm\infty$: $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-x^3}{x^3} = -1 = k_1 = k_2$

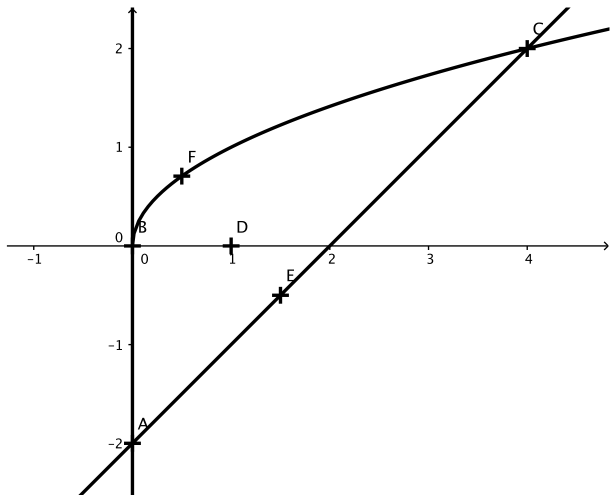
$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-x^3}{x^2} + x = 0$
asymptoty splynú v priamku $y = -x$ (1,5b)

tečna $y = kx + q$ v $P_x[1, 0]$:

$k = f'(1) = -3$
$q = y_0 - (-3) \cdot 1 = 3$
$y = -3x + 3 = 0$ (2b)
graf: (3b)



3. (18b) Určete globální extrémy funkce $f(x,y) = \ln(-x^2 - y^2 + 2x + 13)$ na množině
$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2;\ x - 2 \leq y \leq \sqrt{x}\ ,\ x \geq 0\}$
(funkce je definovaná na celém M, to nemusíte ošetřovat).



Vrcholy: priesečník priamok $x = 0, y = x - 2$ je bod $A[0, -2]$ (1b)
priesečníky odmocninovej funkcie a priamok:
$y = \sqrt{x}$ a $y = 0$ - dosadením:
Riešením je bod $B[0, 0]$ (1b)
$y = \sqrt{x}$ a $y = x - 2$ - dosadením:
Riešením je bod $C[4, 2]$ (1b)
Stacionárne body:
$\partial_x f = \dfrac{-2x + 2}{-x^2 - y^2 + 2x + 13}$
$\partial_y f = \frac{-2y}{-x^2 - y^2 + 2x + 13}$
riešením je bod $D[1, 0]$ (2,5b)

Viazané extrémy:
Úsečka $\overline{AB}$
$x = 0, y \in (-2, 0)$
$f(0, y) = g(y) = \ln(-y^2 + 13)$
$g'(y) = \dfrac{-2y}{-y^2 + 13}$
$g'(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \notin (-2, 0)$ žiaden kandidát (3,5b)
Úsečka $\overline{AC}$
$x \in (0, 4), y = x - 2$
$f(x, x - 2) = g(x) = \ln(-2x^2 + 6x + 9)$

$g'(x) = \dfrac{-4x+6}{-2x^2+6x+9}$
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2}$
V $x = \dfrac{3}{2}$ sa mení monotónia $g(x)$ a kandidát je $E\left[\dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right]$ (3,5b)
Časť odmocninovej funkcie BC:
$x \in (0,4), y = \sqrt{x}$
$f(x, \sqrt{x}) = g(x) = \ln -x^2 + x + 13$
$g'(x) = \dfrac{-2x+1}{-x^2+x+13}$
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$
V $x = \dfrac{1}{2}$ sa mení monotónia $g(x)$ a kandidát je $F\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ (3,5b)

Hodnoty $f(A) = \ln 9, f(B) = \ln 13, f(C) = 0, f(D) = \ln 14, f(E) = \ln \dfrac{27}{2}, f(F) = \ln \dfrac{53}{4}$ (1b)
Maximum v bode $D[1,0]$,minimum v bode $C[4,2]$ (1b).

---

4. (18b) Určete globální extrémy funkce $f(x,y,z) = x^2 - 4x + y^2 + z^2 + 4$
na množině $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ (x-2)^2 + y^2 + z^2 - z \le \frac{3}{4}\}$

Stacionárne body vnútri množiny:
$\partial_x f = 2x - 4$
$\partial_y f = 2y$
$\partial_z f = 2z$
Riešením je bod $A[2,0,0]$, ktorý leží v množine M (4b)
Výpočet pomocou Lagrangeových multiplikátorov:
$L(x,y,z,\lambda) = x^2 - 4x + y^2 + z^2 + 4 + \lambda((x-2)^2 + y^2 + z^2 - z - \dfrac{3}{4})$
$(1)\partial_x L = 2x - 4 + 2x\lambda - 4\lambda = 2(x-2)(1+\lambda)$
$(2)\partial_y L = 2y + 2y\lambda = 2y(1+\lambda)$
$(3)\partial_z L = 2z + 2z\lambda - \lambda = 2z(1+\lambda) - \lambda$
$(4)\partial_\lambda L = (x-2)^2 + y^2 + z^2 - z - \frac{3}{4}$
(4b)
z (1) a (2) máme spoločný koreň $\lambda = -1$, dosadením do (3) dostaneme $-1 = 0$ čo neplatí, takže ďalej uvažujeme $\lambda \neq -1$
z (1) máme $x = 2$, z (2) máme $y = 0$, dosadíme do (4) a máme $z^2 - z - \dfrac{3}{4} = 0$, t.j. $z_1 = \frac{3}{2}, z_2 = -\frac{1}{2}$ z (3) ešte můžeme vyjadriť $\lambda_1 = -\dfrac{3}{2}, \lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$ $B[2,0,\dfrac{3}{2}], C[2,0,-\dfrac{1}{2}]$ (8b)
$f(A) = -4, f(B) = \dfrac{9}{4}, f(C) = \dfrac{1}{4}$
maximum v bode B, minimum v bode A (2b)