Riešenie záverečného testu Varianta D, ZS 2014/2015

UPOZORNENIE: Priložené bodovanie sa vzťahuje na moje skupiny študentov, bodovanie jednotlivých cvičiacich sa môže a bude mierne líšiť.
V prípade, že odhalíte chybu/preklep (aj s odstupom), napíšte mi to prosím do mailu, môže to zachrániť zdravie iných.

1. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2}{2}},$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/ záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitýh bodech), limity v krajních bodech Df , derivaci funkce a její nulové body, lokální a globální extrémy, intervaly monotonie, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body, nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.

---

definičný obor: z odmocniny plynie: $D_f = \mathbb{R}$ (1 bod)

Napr. dosadením hodnoty $x = 1$ overíme, že funkcia nie je ani sudá ani lichá. (1 bod)

$P_x : f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, exponenciála je kladná f-cia, t.j., $P_x[1, 0]$
$P_y : x = 0 \Rightarrow P_y[0, -\mathrm{e}^{\frac{-1}{2}}]$ (1 bod)

znamienko funkcie (dosadením): funkcia je na $(-\infty, 1)$ záporná, na $(1, \infty)$ kladná (1 bod)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} (x-1)\mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2}{2}} = -\infty \cdot 0 \cdots = 0$, buď L'Hospital alebo e^{x} je rýchlejšie ako x (1 bod)

$f'(x) = \mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2}{2}}(x)(2-x)$, derivácia existuje na $\mathbb{R}$ (1,5 bodu)

$f'_x = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee x = 2)$ (1 bod)

monotónnosť funkcie: $f'(x) > 0$ na intervale $(0, 2)$ a funkcia je tu rastúca, $f'(x) < 0$ na intervaloch $(-\infty, 0)$ a $(2, \infty)$ a funkcia je tu klesajúca (1 bod)

globálne minimum je v bode $[0, -\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}]$
globálne maximum je v bode $[2, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}]$ (1 bod)

$f''(x) = \mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2}{2}}(x^3 - 3x^2 + 2)$, 2. derivácia existuje na $\mathbb{R}$ (1,5 bodu)

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 1 + \sqrt{3} \vee x = 1 - \sqrt{3}$ (1 bod)

konvexita/ konkavita: $f''(x) < 0$ na $(-\infty, 1 - \sqrt{3})$ a $(1, 1 + \sqrt{3})$ a funkcia je tu konkávna, $f'(x) > 0$ na $(1-\sqrt{3}, 1)$ a $(1+\sqrt{3}, \infty)$ a funkcia je tu konvexná (1 bod)

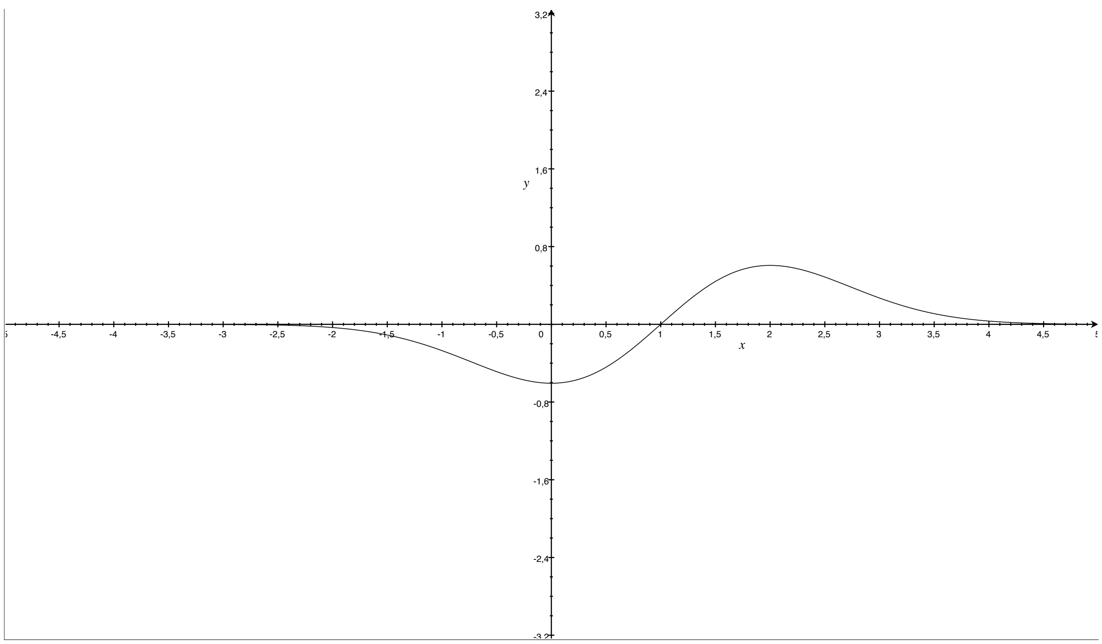
inflexné body $I_1[1 - \sqrt{3}, -\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}], I_2[1, 0], I_3[1 + \sqrt{3}, \sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}]$ (1 bod)

asymptoty $y = kx + q : \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{(x-2)\mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2}{2}}}{x} = 0 = k$

$q = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (x-2)\mathrm{e}^{-\frac{(x-1)^2}{2}} - 0 = 0 = q$

$y = 0$ v $\pm\infty$ (1 bod)

graf: (3 body)



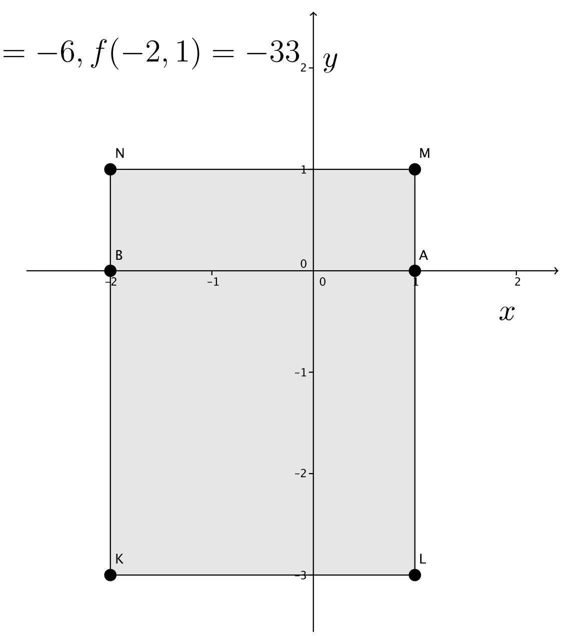
2. Uvažujme funkci $f(x,y) = (x^2 - 2x + 3)(y^2 - 4)$.
a) Vyšetřete, v jakých bodech $[x,y] \in \mathbb{R}^2$ má f lokální maxima, lokální minima a sedlové body.
b) Najděte maximum a minimum funkce f na obdélníku s vrcholy o souřadnicích $[-2,-3], [1,-3], [1,1]$ a $[-2,1]$.
Nakreslete zadanou množinu i všechny nalezené kandidáty na extrém.

---

a) $D_f = \mathbb{R}^2$
$\partial_x f = (2x-2)(y^2-4) = 2(x-1)(y-2)(y+2)$
$\partial_y f = (x^2 - 2x + 3)2y$ (1 bod)
$\partial_x f = \partial_y f = 0$ v bode $A[1,0]$ (1 bod)
$\partial_{xx} f = 2(y^2 - 4)$
$\partial_{xy} f = \partial_{yx} f = 4(x-1)y$
$\partial_{yy} f = 2(x^2 - 2x + 3)$ (1 bod)

$|\mathbf{H}(A)| = -8 \cdot 4 - 0 = -32 \ldots$ v bode A je sedlo (1 bod)

b) obrázok so všetkými bodmi (1 bod)
voľné extrémy: bod A z a) je na hranici množiny (1 bod)
vrcholy: $f(-2,-3) = 55, f(1,-3) = 10, f(1,1) = -6, f(-2,1) = -33$ (1 bod)



úsečka KN: $x = -2, y \in (-3,1)$
$f(-2,y) = g(y) = 11y^2 - 44$ (1 bod)
$g'(y) = 22y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ kandidát $B[-2,0]$ (1 bod)
úsečka LM: $x = 1, y \in (-3,1)$
$f(1,y) = g(y) = 2y^2 - 8$ (1 bod)
$g'(y) = 4y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ A[1,0] (1 bod)
úsečka KL: $y = -3, x \in (-2,1)$
$f(x,-3) = g(x) = 5x^2 - 10x + 15$ (1 bod)
$g'(x) = 10x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \notin (-2,-3)$ (vrchol L), žiadny kandidát (1 bod)
úsečka MN: $y = 1, x \in (-2,1)$
$f(x,1) = g(x) = -3x^2 + 6x - 9$ (1 bod)
$g'(x) = -6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \notin (-2,1)$ (vrchol M), žiadny kandidát (1 bod)

$f(-2,0) = -44, f(1,0) = -8$
Maximum: $K[-2,-3]$ s hodnotou 55, minimum: $B[-2,0]$ s hodnotou -44 (1 bod)

3. Určete extrémy funkce $f(x, y) = (x-1)^2 + y$ na množině $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 - 1 \leq y \leq -2(x-1)^2 + 2$.
Nakreslete zadanou množinu i všechny nalezené kandidáty na extrém.

Obrázok so všetkými kandidátmi (2 body)

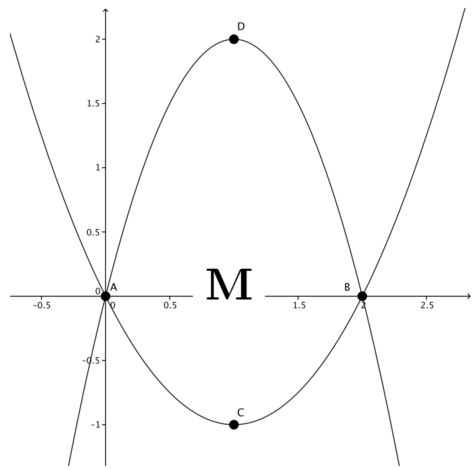
Priesečníky parabol:

1) $(x-1)^2 - 1 = y$

2) $-2(x-1)^2 + 2 = y$

Riešením sústavy (napr. porovnaním ľavých strán) sú body $A[0, 0], B[2, 0]$ (1 bod)

Voľné extrémy: $\partial_x f = 2x - 2, \partial_y f = 1 \neq 0$, neexistujú (1 bod)



Časť spodnej paraboly (napr. Jacobián): $|\mathbf{J}| = -4(x-1), |\mathbf{J}| = 0 \Leftrightarrow x = 1$ dosadením do $(x-1)^2 - 1 = y$ dostávame $x = 1, y = -1 \Rightarrow C[1, -1]$ (3,5 bodu)
Časť vrchnej paraboly (napr. Jacobián): $|\mathbf{J}| = 2(x-1), |\mathbf{J}| = 0 \Leftrightarrow x = 1$ dosadením do $-2(x-1)^2 + 2 = y$ dostávame $x = 1, y = 2 \Rightarrow D[1, 2]$ (3,5 bodu)
$f(A) = 1, f(B) = 1, f(C) = -1, f(D) = 2$, maximum v bode D, minimum v bode C. (1 bod)

4. Určete extrémy funkce $f(x,y,z) = 4x + y - 2z - \frac{2}{3}$ na množině dané vazbami:

$$g_1(x,y,z) = x^2 + z^2 - 26$$

$$g_2(x,y,z) = x - y + z + \tfrac{2}{3}.$$

Využijte metodu Lagrangeových multiplikátorů a vypočítejte hodnoty příslušných multiplikátorů.

Lagrange:
$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 4x + y - 2z - \frac{2}{3} + \lambda_1(x^2 + z^2 - 26) + \lambda_2(x - y + z + \frac{2}{3})$ (1 bod)

1) $\partial_x L = 4 + 2x\lambda_1 + \lambda_2 = 0$

2) $\partial_y L = 1 - \lambda_2 = 0$

3) $\partial_z L = -2 + 2z\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ (1,5 bodu)

4) $g_1(x,y,z) = x^2 + z^2 - 26 = 0$

5) $g_2(x,y,z) = x - y + z + \frac{2}{3} = 0$

Výpočet (optimálny, nazáleží ak ste došli k správnym záverom):
$2) \Rightarrow \lambda_2 = 1$ (2 body)
$\lambda_2 \to 1), 3) \Rightarrow x = -\frac{5}{2\lambda_1}, z = \frac{1}{2\lambda_1}$
$x, z \to 4) \Rightarrow \lambda_1 = \pm\frac{1}{2}$ (2 body)
dopočítanie x, y, z (6 bodov)
kandidáti:
$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = 1, A[-5, -\frac{10}{3}, 1], f(A) = -26$
$\lambda_1 = -\frac{1}{2}, \lambda_2 = 1, B[5, \frac{14}{3}, -1], f(B) = 26$ (0,5 bodu)
Maximum je v bode B, minimum v bode A (1 bod)