Riešenie záverečného testu Varianta B, ZS 2014/2015

UPOZORNENIE: Priložené bodovanie sa vzťahuje na moje skupiny študentov, bodovanie jednotlivých cvičiacich sa môže a bude mierne líšiť.
V prípade, že odhalíte chybu/preklep (aj s odstupom), napíšte mi to prosím do mailu, môže to zachrániť zdravie iných.

1. Vyšetřete průběh funkce

$$f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+5}\right),$$

tj. najděte její definiční obor, určete případnou sudost/lichost, kdy je f kladná/ záporná, průsečíky s osami (případně hodnoty v jiných důležitýh bodech), limity v krajních bodech Df , derivaci funkce a její nulové body, lokální a globální extrémy, intervaly monotonie, asymptoty, druhou derivaci, oblasti konvexity, konkavity a inflexní body, nakreslete graf funkce. Vše řádně zdůvodněte.

---

definičný obor: $\left(\frac{x-2}{x+5}\right) > 0 \Rightarrow D_f = (-\infty, -5) \cup (2, \infty)$ (1 bod)

Priamo z definičného oboru plynie (alebo overením) že funkcia nie je ani sudá ani lichá. (1 bod)

P_x : $f(x) = 0 = \ln\left(\frac{x-2}{x+5}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{x-2}{x+5}\right) = 1$, po úprave $\left(\frac{-7}{x+5}\right) = 0$, čo nastane jedine v limitnom prípade, t.j. P_x neexistuje
$P_y : x = 0 \notin D_f$, t.j. P_y taktiež neexistuje (1 bod)

znamienko funkcie: funkcia je na $(-\infty, -5)$ kladná, na $(2, \infty)$ záporná (1 bod)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln\left(\frac{x-2}{x+5}\right) = \ln 1 = 0$ (1 bod)
$\lim\limits_{x\to-5^-} \ln\left(\frac{x-2}{x+5}\right) = \ln\left(\frac{-7}{0^-}\right) = \ln(\infty) = \infty$
$\lim\limits_{x\to2^+} \ln\left(\frac{x-2}{x+5}\right) = \ln\left(\frac{0^+}{7}\right) = \ln(0^+) = -\infty$ (1 bod)
$f'(x) = \frac{7}{(x-2)(x+5)}; x \neq 2, -5$, derivácia existuje na celom D_f (1 bod)

nulové (výnimočné) body derivácie: len krajné body $D_f : x = 2, x = -5$ (1 bod)

monotónnosť funkcie: $f'(x) > 0$ na intervaloch $(-\infty, -5)$ aj $(2, \infty)$ a funkcia je na nich rastúca (1 bod) funkcia nemá lokálne ani globálne extrémy (0,5 bodu)

$f''(x) = -\frac{7(2x+3)}{(x-2)^2(x+5)^2}, x \neq 2, -5$, 2. derivácia existuje na celom D_f (1 bod)

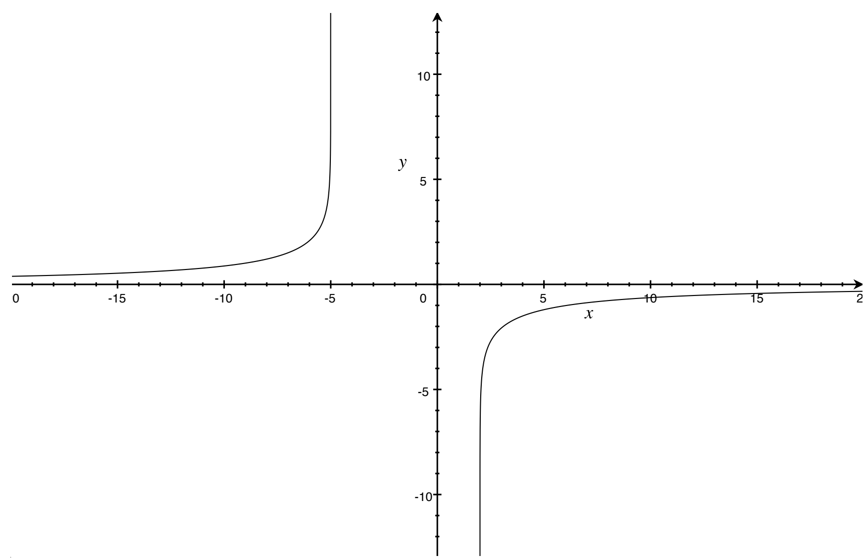
výnimočné body 2. derivácie: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \notin D_f$, + krajné body $D_f : x = -5, x = 2$ (1 bod)

konvexita/ konkavita: $f''(x) > 0$ na $(-\infty, -5)$ a funkcia je tu konvexná, $f''(x) < 0$ na $(2, \infty)$ a funkcia je tu konkávna (1 bod)

inflexné body funkcia nemá (0,5 bodu)

asymptoty $y = kx + q$: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\ln\left(\frac{x-2}{x+5}\right)}{x} = \frac{0}{\pm\infty} = 0 = k_{1,2}$ v bodoch x=-5 a x=2 má zvislé asymptoty (2 body)

graf: (3 body)



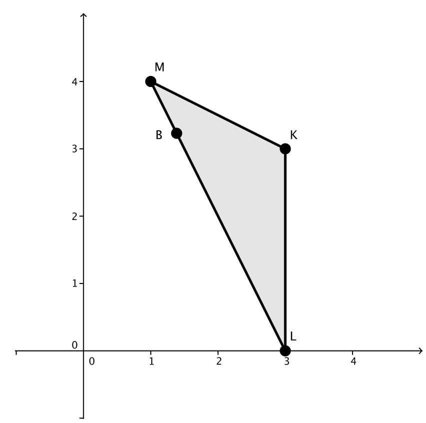
2. Uvažujme funkci $f(x, y) = x^2 - 4xy + y^2 - 6y + 3$.
a) Vyšetřete, v jakých bodech $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ má f lokální maxima, lokální minima a sedlové body.
b) Najděte maximum a minimum funkce f na trojúhelníku s vrcholy o souřadnicích [3,3], [3, 0] a [1,4].
Nakreslete zadanou množinu i všechny nalezené kandidáty na extrém.

---

a) $D_f = \mathbb{R}^2$
$\partial_x f = 2x - 4y$
$\partial_y f = -4x + 2y - 6$ (1 bod)
$\partial_x f = \partial_y f = 0$ v bode $A[-2, -1]$ (1 bod)
$\partial_{xx} f = 2$
$\partial_{xy} f = \partial_{yx} f = -4$
$\partial_{yy} f = 2$ (1 bod)

$|\mathbf{H}(A)| = -12\ldots$ sedlo v bode A (1 bod)

b) obrázok so všetkými bodmi (1 bod)
volné extrémy: body A z a) nepatrí množine (1 bod)
vrcholy: $f(3, 3) = -33, f(3, 0) = 12, f(1, 4) = -20$ (1 bod)
úsečka KL: $x = 3, y \in (0, 3)$
$f(3, y) = g(y) = y^2 - 18y + 12$ (1 bod)
$g'(y) = 2y - 18 = 0 \Leftrightarrow y = 9 \notin (0, 3) \ldots$ žiadny kandidát (1 bod)
úsečka LM: $y = -2x + 6, x \in (1, 3)$
$f(x, -2x + 6) = g(x) = 13x^2 - 36x + 3$ (1,5 bodu)
$g'(x) = 26x - 36 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{18}{13} \ldots$ kandidát $B[\frac{18}{13}, \frac{42}{13}]$ (1,5 bodu)
úsečka KM: $y = -\frac{x}{2} + \frac{9}{2}, x \in (1, 3)$
$f(x, -\frac{x}{2} + \frac{9}{2}) = g(x) = \frac{13x^2}{4} - \frac{39x}{2} - \frac{15}{4}$ (1,5 bodu)
$g'(x) = \frac{13x}{2} - \frac{39}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 3\ldots$ žiadny kandidát (1,5 bodu)



$f(\frac{18}{13}, \frac{42}{13}) = -\frac{285}{13}$
Maximum: $L[3, 0]$ s hodnotou 12, minimum: $K[3, 3]$ s hodnotou -33 (1 bod)

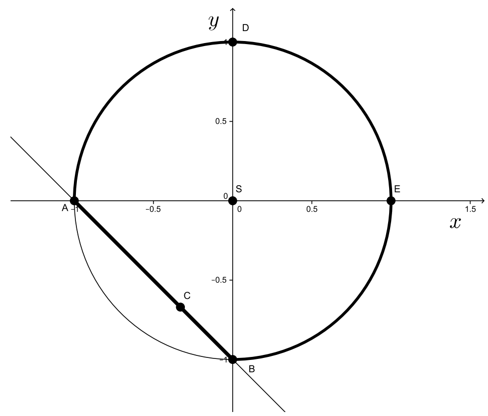
3. Určete extrémy funkce $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ na množině $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, -x - y - 1 \leq 0\}$.
Nakreslete zadanou množinu i všechny nalezené kandidáty na extrém.

Obrázok so všetkými kandidátmi (2 body)

Priesečníky kružnice a priamky - riešením sústavy:

1) $x^2 + y^2 = 1$

2) $y = -x - 1$



Riešením sú body $A[-1, 0], B[0, -1]$ (2 body)
Voľné extrémy: $\partial_x f = 4x, \partial_y f = 2y$,
parciálne derivácie sú nulové v bode $S[0, 0]$, ktorý patrí množine, takže je kandidát (1 bod)
Úsečka AB (dosadením): $y = -x - 1, x \in (-1, 0)$
$f(x, -x - 1) = g(x) = 3x^2 + 2x + 1$ (1 bod)
$g'(x) = 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ ... kandidát $C[-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}]$ (1 bod)

Oblúk AB (Jacobián): $|\mathbf{J}| = 8xy - 4xy = 4xy, |\mathbf{J}| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee y = 0$ (1 bod)
dosadením do $x^2 + y^2 = 1$ dostávame $x = 0 \Rightarrow y = \pm 1$ a $y = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ t.j. celkovo 4 kandidátov, z toho 2 sú body A a B: $D[0, 1], E[1, 0]$ (3 body)

$f(A) = f(E) = 2, f(B) = f(D) = 1, f(S) = 0, f(C) = \frac{2}{3}$, maximum v bodoch A, E, minimum v bode S. (1 bod)

4. Určete extrémy funkce $f(x,y,z) = 3x - 3y + 12z$ na množině dané vazbami:

$$g_1(x,y,z) = x + 2y - z$$

$$g_2(x,y,z) = \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{3}{2}y^2 - \tfrac{111}{9}.$$

Využijte metodu Lagrangeových multiplikátorů a vypočítejte hodnoty příslušných multiplikátorů.

Lagrange:
$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = 3x - 3y + 12z + \lambda_1(x + 2y - z) + \lambda_2(\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 - \frac{111}{9})$ (1 bod)

1) $\partial_x L = 3 + \lambda_1 + 3\lambda_2 x = 0$

2) $\partial_y L = -3 + 2\lambda_1 + 3\lambda_2 y = 0$

3) $\partial_z L = 12 - \lambda_1 = 0$ (1,5 bodu)

4) $g_1(x,y,z) = x + 2y - z = 0$

5) $g_2(x,y,z) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2 - \frac{111}{9} = 0$

Výpočet (optimálny, nazáleží ak ste došli k správnym záverom):
$3) \Rightarrow \lambda_2 = 12$ (2 body)
$\lambda_1 \to 1), 2) \Rightarrow x = -\frac{5}{\lambda_2}, y = -\frac{7}{\lambda_2}$
$x, y \to 4) \Rightarrow \lambda_2 = \pm 3$ (2 body)
dopočítanie x, y, z (6 bodov)
kandidáti:
$\lambda_1 = 12, \lambda_2 = 3, A[-\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{19}{3}], f(A) = -74$
$\lambda_1 = 12, \lambda_2 = -3, B[\frac{5}{3}, \frac{7}{3}, \frac{19}{3}], f(B) = 74$ (0,5 bodu)
Maximum je v bode B, minimum v bode A (1 bod)