6. *Je dán pravoúhlý lichoběžník se základnami a, c ($a > c$) a delším ramenem b. Sestrojte přímku, která daný lichoběžník rozdělí na dva navzájem podobné čtyřúhelníky. Proveďte diskusi o počtu řešení vzhledem k délkám a, b, c.*

Řešení: Hledaná přímka EF musí protínat dvě *protější* strany daného lichoběžníku $ABCD$. Nemohou to být základny (obr. 6.1): aby $AEFD$ a $EBCF$ byly podobné čtyřúhelníky, musel by druhý z nich mít (stejně jako ten první) dva vnitřní úhly pravé, a to mohou být jedině úhly při vrcholech E a F; pak by ovšem $AEFD$ byl pravoúhelník, zatímco $EBCF$ nikoliv.

Mají-li být čtyřúhelníky $ABFE$ a $EFCD$ z obr. 6.2 podobné, musí být úhel ABF shodný s jedním z úhlů EFC nebo FED. Tyto dvě možnosti nyní rozlišíme jako a) a b).

a) $|\angle ABF| = |\angle EFC|$. V tomto případě jsou $ABFE$ a $EFCD$ pravoúhlé lichoběžníky (obr. 6.3). Z úměry $|AB| : |EF| = |EF| : |CD|$ vychází

$$|EF| = \sqrt{ac}\,. \tag{1}$$

Konstrukce takové příčky EF je snadná: nejdříve na úsečce AB nalezneme bod F_1, pro který $|AF_1| = \sqrt{ac}$ (tuto délku sestrojíme podle jedné z Eukleidových vět, viz pom. úl. 1); úsečku AF_1 pak doplníme na pravoúhelník AF_1FE. Takto sestrojené čtyřúhelníky $ABFE$ a $EFCD$ jsou skutečně podobné podle pom. úl. 2, podm. (ii).

b) $|\angle ABF| = |\angle FED|$. Podle obr. 6.4 je jasné, že tato rovnost nastane, právě když $EF \perp BC$. Podobnost čtyřúhelníků $ABFE$ a $EFCD$ může být dvojího druhu: $ABFE \sim FEDC$ nebo $ABFE \sim DEFC$. Tyto dvě možnosti nyní rozlišíme jako b1) a b2).

b1) $ABFE \sim FEDC$. Z úměry $|AB| : |FE| = |FE| : |DC|$ opět vychází rovnost (1). Úsečka EF má tedy známou délku a je kolmá k BC, takže se snadno sestrojí. Podobnost $ABFE \sim FEDC$ se pak zdůvodní opět podle pom. úl., podm. (ii).

b2) $ABFE \sim DEFC$. Z úměry $|AB| : |DE| = |AE| : |DC|$ dostáváme

$$|AE| \cdot |DE| = ac\,. \tag{2}$$

Tím je bod E na rameni AD určen a jeho konstrukci lze založit na Eukleidově větě o výšce. Bod F pak sestrojíme kolmým průmětem bodu E na rameno BC. Z takové konstrukce plyne podobnost $\triangle ABE \sim \triangle DEC$ (věta *sus*), a tedy i podobnost $ABFE \sim DEFC$ podle pom. úl., podm. (i).

Diskuse: Protože $c < \sqrt{ac} < a$, řešení z části a) existuje vždy právě jedno.

Část b1): Úsečka (o jejíž délce zatím nic nepředpokládáme), která je kolmá k přímce BC a jejíž krajní body leží uvnitř ramen AD a BC, existuje, jen když kolmý průmět G bodu A na přímku BC padne mezi body B a C (obr. 6.5). Plyne to z toho, že úhel $\beta = \angle ABC$ je ostrý. Nepříznivá situace (obr. 6.6) se vyloučí podmínkou $|BG| < |BC| = b$. Protože $|BG| = a\cos\beta = a \cdot \dfrac{a-c}{b}$, dostáváme po snadné úpravě ekvivalentní podmínku

$$b > \sqrt{a(a-c)}\,. \tag{3}$$

(To je podstatné omezení, a priori totiž zřejmě platí pouze slabší nerovnost $b > a - c$). Ukažme, že podmínka (3) sama o sobě již zaručuje, že konstruovaná příčka EF délky $\sqrt{ac}$ existuje a je jediná. Z trojúhelníků ABG a CHD totiž plyne $|AG| = a\sin\beta$ a $|HC| = \dfrac{c}{\sin\beta}$, takže $|AG| \cdot |HC| = ac$. To znamená, že délka $\sqrt{ac}$ je geometrickým průměrem délek základen AG a HC pravoúhlého lichoběžníku $GAHC$. Proto příčka EF existuje, je jediná a při její konstrukci lze postupovat způsobem z části a) našeho řešení, uvažujeme-li lichoběžník $GAHC$ namísto lichoběžníku $ABCD$. Jiné pěkné vysvětlení poskytuje obr. 6.7, ve kterém podle Eukleidovy věty o odvěsnách pravoúhlého trojúhelníku ABX máme $|ZC| = |AX| = \sqrt{ac}$ a $|BX| = \sqrt{a(a-c)}$; nerovnosti $|HC| < \sqrt{ac} < |AG|$ proto plynou z tupoúhlých trojúhelníků ZCH a AGX.

Část b2): Bod E určený rovností (2) na rameni AD délky d existuje, právě když $\frac{1}{4}d^2 \geqq ac$ (plyne to z průběhu kvadratické funkce $f(x) = x(d-x)$ na intervalu $x \in (0, d)$, kde $x = |AE|$). Protože $d^2 = b^2 - (a-c)^2$, dostáváme odtud snadnou úpravou existenční podmínku

$$b \geqq a + c\,, \tag{4}$$

která je silnější než (3), takže pro úsečku AG zajišťuje potřebnou polohu z obr. 6.5. Pomocí vyjádření $|DH| = c \cdot \operatorname{cotg}\beta = c \cdot \dfrac{a-c}{d}$ se snadným výpočtem ověří, že za podmínky (4) platí obě nerovnosti $|DH| < \frac{1}{2}d$ a $|AH| \cdot |DH| < ac$, které zaručují, že každý bod E úsečky AD splňující (2) je vnitřním bodem úsečky AH (takové body jsou dva, resp. jeden, platí-li v (4) ostrá nerovnost, resp. rovnost). Proto kolmý průmět F takového bodu E na přímku BC skutečně padne mezi body B a C.

Závěr diskuse: Úloha má

- ▲ 1 řešení, je-li $a - c < b \leqq \sqrt{a(a-c)}$,
- ▲ 2 řešení, je-li $\sqrt{a(a-c)} < b < a + c$,
- ▲ 3 řešení, je-li $b = a + c$,
- ▲ 4 řešení, je-li $b > a + c$.

Jiné řešení: Popišme jiný rozbor částí b1) a b2) předchozího postupu. V první z nich z rovnosti úhlů CED a EBF (obr. 6.8) na základě věty o obvodovém a úsekovém úhlu (pom. úl. 3) usoudíme, že přímka AD je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku ECB. Tuto kružnici umíme sestrojit, neboť má procházet danými body B, C a dotýkat se dané úsečky AD (pom. úl. 4). Příslušný bod dotyku je hledaný bod E, jeho kolmým průmětem na rameno BC dostaneme bod F. Podobnost $ABFE \sim FEDC$ je pak zaručena podle pom. úl. 2, podm. (i), neboť $\triangle BFE \sim \triangle EDC$ podle věty uu.

Část b2): Z rovnosti úhlů CEF a EBF (obr. 6.9) usoudíme, že úhel BEC je pravý. Proto lze bod E sestrojit jako průsečík úsečky AD s Thaletovou kružnicí nad průměrem BC; bod F pak dostaneme stejně jako v části b1). Jako tam se dokáže i podobnost $ABFE \sim DEFC$, tentokrát na základě toho, že $\triangle BFE \sim \triangle EFC$.

Pomocné úlohy:

1. Připomeňte si a pomocí podobných trojúhelníků dokažte Eukleidovy věty o výšce a odvěsnách pravoúhlého trojúhelníku: $v^2 = c_a \cdot c_b$, $a^2 = c \cdot c_a$ a $b^2 = c \cdot c_b$.

2. Čtyřúhelníky $KLMN$ a $PQRS$ se shodují ve vnitřních úhlech, jak je vyznačeno na obr. 6.10. Dokažte, že tyto čtyřúhelníky jsou podobné, je-li splněna některá z podmínek:

(i) $\triangle KLM \sim \triangle PQR$, (ii) strany KN a LM nejsou rovnoběžné a $|KL| : |PQ| = |MN| : |RS|$.

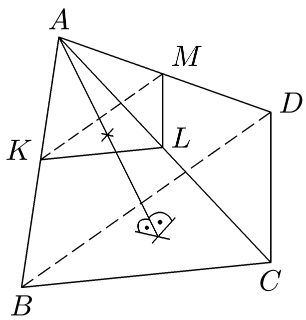
[Vysvětlete, že pokud $\triangle KLM \sim \triangle PQR$, platí rovněž $\triangle KMN \sim \triangle PRS$ podle věty uu, přičemž obě podobnosti mají stejný koeficient $|KM| : |PR|$. Za podmínky (ii) převeďte podobným zobrazením čtyřúhelník $PQRS$ na čtyřúhelník $KLM'N'$ tak, aby body M', N' ležely po řadě na polopřímkách LM a KN. Úsečky MN a $M'N'$ jsou pak shodné a rovnoběžné; kdyby nebyly totožné, byl by $MNN'M'$ rovnoběžník, takže strany KN a LM by byly rovnoběžné.]

3. Co jsou obvodové, středové a úsekové úhly a jaké mají vlastnosti? Dokažte je.

4. Sestrojte kružnici která prochází danými body K, L a dotýká se dané přímky p, jež je s přímkou KL různoběžná. [Bod dotyku T přímky p s hledanou kružnicí je určen podmínkou $|PT|^2 = |PK| \cdot |PL|$, kde P je průsečík přímek p a KL.]

5. (Doplňující úloha) Dané body A, B leží uvnitř téže poloroviny vyťaté danou přímkou p. Na přímce p sestrojte bod X tak, aby velikost konvexního úhlu AXB byla co největší. [Rozhledy mat.-fyz., roč. 62, č. 4, str. 168–169.]

3. Do daného čtyřstěnu $ABCD$ je vepsána koule. Její čtyři tečné roviny, které jsou se stěnami čtyřstěnu rovnoběžné, z něj odtínají čtyři menší čtyřstěny. Dokažte, že součet délek všech 24 jejich hran je roven dvojnásobku součtu délek hran celého čtyřstěnu $ABCD$. (*P. Leischner*)



Obr. 1

Řešení. Označme ϱ poloměr vepsané koule a v_A, v_B, v_C, v_D tělesové výšky daného čtyřstěnu (s indexy podle vrcholů, ze kterých vycházejí). Odťatý čtyřstěn $AKLM$ (obr. 1) je stejnolehlý podle středu A s celým čtyřstěnem $ABCD$. Součty délek jejich hran jsou proto ve stejném poměru jako jejich tělesové výšky ze společného vrcholu A, tedy v poměru $(v_A - 2\varrho) : v_A$, neboť 2ϱ je vzdálenost rovin KLM a BCD (jsou totiž rovnoběžné a obě se dotýkají vepsané koule). Stejnou úvahu můžeme zopakovat pro ostatní tři odťaté čtyřstěny. Naší úlohou je proto dokázat rovnost

$$\frac{v_A - 2\varrho}{v_A} + \frac{v_B - 2\varrho}{v_B} + \frac{v_C - 2\varrho}{v_C} + \frac{v_D - 2\varrho}{v_D} = 2,$$

která je ekvivalentní s rovností

$$\varrho\Big(\frac{1}{v_A} + \frac{1}{v_B} + \frac{1}{v_C} + \frac{1}{v_D}\Big) = 1.$$

K tomu nám pomůže následující úvaha o objemu V a povrchu S čtyřstěnu $ABCD$. Předně $S = S_A + S_B + S_C + S_D$ (kde S_X značí obsah té stěny, jež neobsahuje vrchol X), dále

$$V = \frac{1}{3}S_Av_A = \frac{1}{3}S_Bv_B = \frac{1}{3}S_Cv_C = \frac{1}{3}S_Dv_D$$

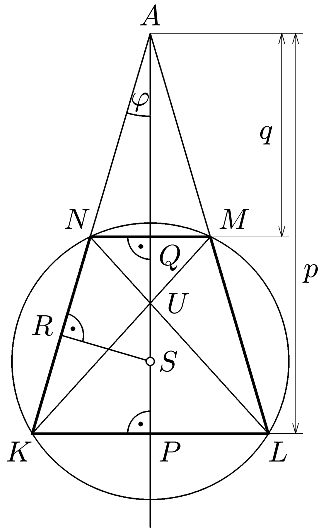
a konečně $V = \dfrac{1}{3}\varrho S$. Podle těchto vzorců platí

$$\varrho\Big(\frac{1}{v_A} + \frac{1}{v_B} + \frac{1}{v_C} + \frac{1}{v_D}\Big) = \frac{3V}{S}\Big(\frac{S_A}{3V} + \frac{S_B}{3V} + \frac{S_C}{3V} + \frac{S_D}{3V}\Big) = 1$$

a tím je celý důkaz hotov.

5. Ve vnější oblasti kružnice k je dán bod A. Všechny lichoběžníky, které jsou do kružnice k vepsány tak, že jejich prodloužená ramena se protínají v bodě A, mají společný průsečík úhlopříček. Dokažte. *(P. Leischner)*

Řešení. Základny KL a MN každého z uvažovaných lichoběžníků $KLMN$ jsou dvě rovnoběžné tětivy kružnice k, takže mají společnou osu souměrnosti. Na ní leží střed S kružnice k, středy P a Q základen KL a MN, průsečík U úhlopříček KM a LN i průsečík A prodloužených ramen (tedy polopřímek) KN a LM (obr. 2). Protože polopřímka AS na volbě lichoběžníku $KLMN$ nezávisí, stačí dokázat, že na něm nezávisí ani délka úsečky AU. Vyjádříme ji nejprve pomocí délek $p = |AP|$ a $q = |AQ|$ (ukáže se, že je jejich harmonickým průměrem). Délky $|PU|$ a $|QU|$ snadno vypočteme z dvojice rovnic



Obr. 2

$$|PU| + |QU| = p - q \quad \text{a} \quad \frac{|PU|}{|QU|} = \frac{|KL|}{|MN|} = \frac{p}{q}$$

(rovnosti poměrů plynou z podobností $\triangle KLU \sim \triangle MNU$ a $\triangle KLA \sim \triangle NMA$). Vyjde nám

$$|PU| = \frac{p(p-q)}{p+q} \quad \text{a} \quad |QU| = \frac{q(p-q)}{p+q},$$

a proto

$$|AU| = |AQ| + |QU| = q + \frac{q(p-q)}{p+q} = \frac{2pq}{p+q}.$$

Nyní sem dosadíme $p = |AK|\cos\varphi$ a $q = |AN|\cos\varphi$, kde $\varphi = |\sphericalangle PAK|$, a při následné úpravě využijeme toho, že

$$|AK| + |AN| = 2|AR| = 2|AS|\cos\varphi,$$

kde R je střed tětivy KN. Dostaneme tak

$$|AU| = \frac{2pq}{p+q} = \frac{2|AK|\cdot|AN|\cos^2\varphi}{(|AK|+|AN|)\cos\varphi} = \frac{|AK|\cdot|AN|}{|AS|}.$$

Zbývá využít mocnost bodu A k dané kružnici $k(S,r)$: součin $|AK|\cdot|AN|$ je roven rozdílu $|AS|^2 - r^2$, tedy na volbě lichoběžníku $KLMN$ nezávisí. Nezávislost veličiny $|AU|$ je tak dokázána.

1. Najděte všechny trojúhelníky ABC, pro které platí rovnost

$$|BC| \cdot |AX| = |AC| \cdot |BY|,$$

kde bod X je průsečíkem osy úhlu BAC se stranou BC a bod Y průsečíkem osy úhlu ABC se stranou AC. (P. Černek)

Řešení: Zkoumanou rovnost přepíšeme do tvaru $|BC| : |BY| = |AC| : |AX|$ a oba poměry vyjádříme pomocí sinových vět pro trojúhelníky BCY a ACX (ve kterých při obvyklém označení vnitřních úhlů trojúhelníku ABC zřejmě platí $|\angle BYC| = \alpha + \frac{1}{2}\beta$ a $|\angle AXC| = \beta + \frac{1}{2}\alpha$):

$$\frac{|BC|}{|BY|} = \frac{\sin(\alpha + \frac{1}{2}\beta)}{\sin\gamma} \quad \text{a} \quad \frac{|AC|}{|AX|} = \frac{\sin(\beta + \frac{1}{2}\alpha)}{\sin\gamma}.$$

Hledáme proto právě ty trojúhelníky, pro které $\sin(\alpha + \frac{1}{2}\beta) = \sin(\beta + \frac{1}{2}\alpha)$. Protože oba argumenty leží mezi 0° a 180°, rovnost jejich sinů nastane, jen pokud $\alpha + \frac{1}{2}\beta = \beta + \frac{1}{2}\alpha$, nebo $(\alpha + \frac{1}{2}\beta) + (\beta + \frac{1}{2}\alpha) = 180^\circ$. První podmínka znamená $\alpha = \beta$, druhá $\alpha + \beta = 120^\circ$, neboli $\gamma = 60^\circ$.

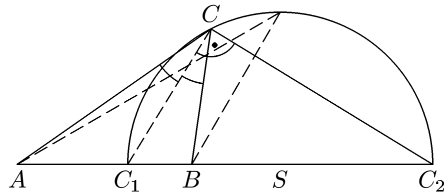
Malá obměna první části: Srovnáme-li zkoumanou rovnost s obecně platnou rovností $|BC| \cdot |AP| = |AC| \cdot |BQ|$, kde AP a BQ jsou výšky daného trojúhelníku, dostaneme ekvivalentní podmínku ve tvaru $|AP| : |AX| = |BQ| : |BY|$. Z pravoúhlých trojúhelníků APX a BQY tak opět vyjde rovnost $\sin(\alpha + \frac{1}{2}\beta) = \sin(\beta + \frac{1}{2}\alpha)$.

Odpověď: Hledanými jsou právě ty trojúhelníky, pro které platí $|AC| = |BC|$ nebo $|\angle ACB| = 60^\circ$.

2. *Najděte všechna kladná čísla k, pro něž platí: Ze všech trojúhelníků ABC, v nichž $|AB| = 5\,cm$ a $|AC| : |BC| = k$, má největší obsah trojúhelník rovnoramenný.*

Řešení. Pro $k = 1$ uvedené charakterizaci vyhovuje libovolný rovnoramenný trojúhelník s danou základnou AB a libovolně velkou výškou na stranu AB. Mezi nimi zřejmě neexistuje trojúhelník s největším obsahem.

Předpokládejme dále, že je $k > 1$ (jinak řešíme stejnou úlohu, v níž prohodíme A a B). Na přímce AB existují dva různé body C_1, C_2, pro které platí $\dfrac{|AC_1|}{|BC_1|} = \dfrac{|AC_2|}{|BC_2|} = k$. Všechny body C v rovině, pro které platí $|AC| : |BC| = k$, leží na Apolloniově kružnici sestrojené nad průměrem C_1C_2 (obr. 1). Odtud je zřejmé, že trojúhelník ABC bude mít největší obsah pro vrchol C ve středu oblouku C_1C_2 (v libovolné z polorovin určených přímkou AB). Za předpokladu $k > 1$ pro takto zvolený bod C platí $|AC| > |BC|$ a také $|AC| > |AS| > |AB|$, takže trojúhelník ABC bude rovnoramenný, právě když bude $|AB| = |BC|$. Odtud sestavíme rovnici pro odpovídající hodnotu k.



Obr. 1

Pro body C_1, C_2 především platí

$$|AC_1| = \frac{k}{k+1}|AB|, \qquad |AC_2| = \frac{1}{k+1}|AB|,$$

takže z rovností $|AC_2| = |AB| + |BC_2|$ a $|C_1C_2| = |BC_1| + |BC_2|$ vychází

$$|BC_2| = \frac{1}{k-1}|AB|, \qquad |C_1C_2| = \frac{2k}{k^2-1}|AB|.$$

Ještě spočteme

$$|BS| = \big||SC_1| - |BC_1|\big| = \left|\frac{k}{k^2-1} - \frac{1}{k+1}\right||AB| = \frac{1}{k^2-1}|AB|$$

a

$$|BC|^2 = |BS|^2 + |CS|^2 = |BS|^2 + |C_1S|^2 = \frac{1+k^2}{\left(k^2-1\right)^2}|AB|.$$

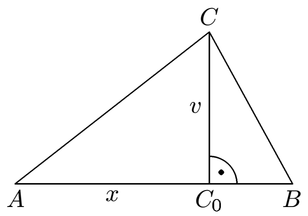
Odtud vychází rovnice

$$1 + k^2 = k^4 - 2k^2 + 1, \quad \text{neboli} \quad k^2\left(k^2 - 3\right) = 0,$$

která má jediné kladné řešení $k = \sqrt{3}$.

Úloze vyhovují dvě kladná čísla k, $k = \sqrt{3}$ a $k = 1/\sqrt{3}$.

Jiné řešení. Zřejmě $k \neq 1$ (pro $k = 1$ maximum neexistuje). Obě čísla k a $\dfrac{1}{k}$ zkoumanou vlastnost zároveň buď mají, nebo ne. Předpokládejme tedy (bez újmy na obecnosti), že $k > 1$ je pevné. Označme C_0 patu výšky z vrcholu C a $x = |AC_0|$ (obr. 2). Pro dané x spočítáme závislost $v = v(x)$, najdeme maximum této funkce a nakonec se podíváme, pro které $k > 1$ tomuto extrému odpovídá rovnoramenný trojúhelník.



Obr. 2

Zřejmě je

$$|AC|^2 = x^2 + v^2, \quad |BC|^2 = (x-c)^2 + v^2, \quad (1)$$

takže podmínka $|AC| = k|BC|$ je ekvivalentní rovnosti

$$x^2 + v^2 = k^2\left((x-c)^2 + v^2\right),$$

neboli po úpravě

$$v^2 = -x^2 + \frac{2k^2c}{k^2-1}\,x - \frac{k^2c^2}{k^2-1}.$$

Jak víme, nabývá nalezená kvadratická funkce maxima pro

$$x = \frac{k^2c}{k^2-1} > c$$

a té odpovídá maximální hodnota

$$v_{\max} = \frac{kc}{k^2-1}.$$

Protože vyšlo $x > c$, znamená to, že $|AC| > c$, takže trojúhelník ABC může být rovnoramenný, jedině když $|BC| = |BA| = c$. Dosazením do druhé rovnosti v (1) dostaneme

$$\left(\frac{k^2c}{k^2-1} - c\right)^2 + \frac{k^2c^2}{(k^2-1)^2} = \frac{c^2\bigl(k^2+1\bigr)}{(k^2-1)^2},$$

takže po úpravě máme pro $t = k^2$ kvadratickou rovnici

$$t + 1 = (t-1)^2,$$

která má jediný kladný kořen $t = 3$, odtud $k = \sqrt{3}$. Závěr je stejný jako v předchozím řešení.

Návodné úlohy:

1. V trojúhelníku ABC označme M průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu C se stranou AB. Potom je $|AM| : |BM| = |AC| : |BC|$. Dokažte.
2. Dokažte analogické tvrzení i pro osu vnějšího úhlu.
3. Sestrojte trojúhelník, v němž je dáno c, γ a $a : b$. [S. Horák: Kružnice. ŠMM sv. 16.]

2. Je dán čtverec $ABCD$. Dokažte, že pro všechny body P toho oblouku AB kružnice čtverci opsané, který neobsahuje body C a D, má výraz

$$\frac{|AP| + |BP|}{|CP| + |DP|}$$

stejnou hodnotu. Určete ji.

3. V libovolném trojúhelníku ABC označme M a N po řadě středy stran BC a AC. Dokažte, že těžiště trojúhelníku ABC leží na kružnici opsané trojúhelníku CMN, právě když platí rovnost

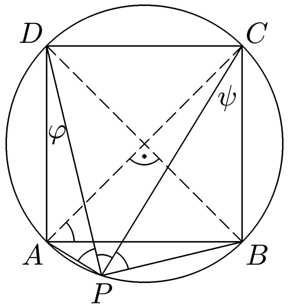
$$4 \cdot |AM| \cdot |BN| = 3 \cdot |AC| \cdot |BC|.$$

2. Protože zkoumaný podíl V nezávisí na velikosti a strany daného čtverce, budeme pro jednoduchost předpokládat, že $a = 1$.

Pokud $P = A$ nebo $P = B$, je zřejmě $V = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$. Pokud platí tvrzení úlohy, je $\sqrt{2} - 1$ hledaná hodnota zkoumaného podílu.

Předpokládejme dále, že bod P je vnitřním bodem uvedeného oblouku. Protože obvodové úhly nad shodnými tětivami téže kružnice jsou shodné, platí (obr. 1)

$$|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle CPD| = |\sphericalangle CPB| = |\sphericalangle CAB| = \frac{1}{4}\pi.$$



Obr. 1

Označme $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ a dále (obr. 1) $\varphi = |\sphericalangle ADP|$, $\psi = |\sphericalangle BCP|$, potom $\varphi + \psi = \alpha$, $|\sphericalangle PBC| = \pi - (\alpha + \psi)$, $|\sphericalangle PAD| = \pi - (\alpha + \varphi)$, takže podle sinové věty

$$V = \frac{\sin\varphi + \sin\psi}{\sin(\alpha+\varphi) + \sin(\alpha+\psi)} = \frac{2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}}{2\sin\frac{2\alpha+\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}} = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\sin\frac{3}{2}\alpha} = \text{konst.}$$

Tím je dokázáno, že V je konstantní, a protože $\alpha = \frac{1}{4}\pi$, vyjde skutečně $V = \sqrt{2} - 1$, jak se snadno přesvědčíme např. pomocí identity

$$\begin{aligned}\sin\frac{3}{2}\alpha &= \sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\Big(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\Big) = \\ &= \sin\frac{\alpha}{2}\Big(2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\Big) = \sin\frac{\alpha}{2}(1 + 2\cos\alpha),\end{aligned}$$

kam za $1 + 2\cos\alpha$ dosadíme $1 + \sqrt{2}$.

Jiné řešení. Pokud $P = A$ nebo $P = B$, zjistíme stejně jako v prvním řešení, že hodnota zkoumaného podílu je $\sqrt{2} - 1$. Je-li bod P vnitřním bodem uvedeného oblouku, jsou oba čtyřúhelníky $APBC$ i $APBD$ (obr. 1) tětivové, proto podle Ptolemaiovy věty platí

$$\begin{aligned}|AP| \cdot |BC| + |BP| \cdot |AC| &= |CP| \cdot |AB|, \\ |AP| \cdot |BD| + |BP| \cdot |AD| &= |DP| \cdot |AB|.\end{aligned}$$

Sečtením obou rovností a dosazením $|BC| = |AD| = |AB|$, $|BD| = |AC| = \sqrt{2}|AB|$ dostaneme

$$\big(|AP| + |BP|\big)\big(1 + \sqrt{2}\big) = |CP| + |DP|, \quad \text{neboli} \quad \frac{|AP| + |BP|}{|CP| + |DP|} = \sqrt{2} - 1.$$

Tím je tvrzení úlohy dokázáno. Daný výraz má pro každý bod P uvedeného oblouku hodnotu $\sqrt{2} - 1$.

Za úplné řešení je 6 bodů.

3. Protože těžiště T leží v opačné polorovině s hraniční přímkou MN než vrchol C, leží body C, M, N a T na jedné kružnici, právě když pro úhly $\gamma = |\sphericalangle MCN|$ a $\delta = |\sphericalangle MTN|$ platí $\gamma + \delta = \pi$, neboli $\sin\gamma = \sin\delta$ (rovnost $\gamma = \delta$ je a priori vyloučena: bod T leží uvnitř trojúhelníku ABC, takže $|\sphericalangle ATB| > |\sphericalangle ACB|$, neboli $\delta > \gamma$). Zapišme nyní, že obsah trojúhelníku ABT je roven jedné třetině obsahu trojúhelníku ABC:

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}|AM|\right) \cdot \left(\frac{2}{3}|BN|\right) \cdot \sin\delta = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}|AC| \cdot |BC| \cdot \sin\gamma\right).$$

Odtud již okamžitě plyne, že rovnost $\sin\gamma = \sin\delta$ je ekvivalentní s rovností ze zadání úlohy.

Jiné řešení. Využijeme větu o mocnosti bodu ke kružnici. Označme T zmíněné těžiště, k kružnici opsanou trojúhelníku CMN a rozlišme tři možné případy jejich vzájemné polohy. (Zdůrazněme, že vrcholy A a B vždy leží ve vnější oblasti kružnice k, neboť úsečky MC a NC jsou její tětivy.)

Je-li $T \in k$, pak $|AN| \cdot |AC| = |AT| \cdot |AM|$, tedy

$$\frac{b}{2} \cdot b = \left(\frac{2}{3}t_a\right) \cdot t_a, \quad \text{neboli} \quad 4t_a^2 = 3b^2;$$

stejně odvodíme i rovnost $4t_b^2 = 3a^2$. Vynásobením obou rovností a následným odmocněním dostaneme $4t_at_b = 3ab$, což je rovnost ze zadání úlohy.

Leží-li bod T ve *vnitřní* oblasti kružnice k, pak platí nerovnost $|AN| \cdot |AC| < |AT| \cdot |AM|$ (platí totiž rovnost $|AN| \cdot |AC| = |AT'| \cdot |AM|$, kde T' je průsečík úsečky AT s kružnicí k, takže $|AT'| < |AT|$). Postupem z předchozího odstavce tentokrát vyjde nerovnost $4t_at_b > 3ab$.

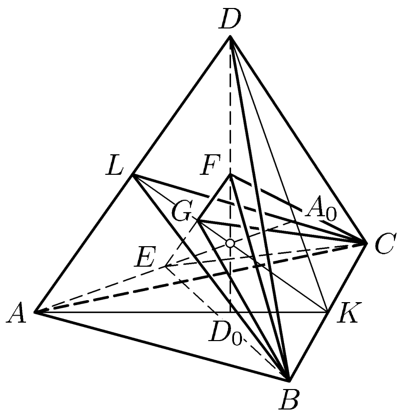
Leží-li bod T ve *vnější* oblasti kružnice k, pak platí nerovnost $|AN| \cdot |AC| > |AT| \cdot |AM|$ (platí totiž rovnost $|AN| \cdot |AC| = |AT'| \cdot |AM|$, kde T', $T' \neq M$, je průsečík polopřímky TM s kružnicí k, takže $|AT'| > |AT|$). V tomto případě vyjde nerovnost $4t_at_b < 3ab$.

Tím je důkaz u konce. Všimněme si jedné zajímavosti, která z něj plyne: rovnost $4t_at_b = 3ab$ v libovolném trojúhelníku ABC platí, jedině když zároveň $4t_a^2 = 3b^2$ a $4t_b^2 = 3a^2$.

Za úplné řešení je 6 bodů. Za důkaz toho, že rovnost ze zadání platí, pokud body C, M, N, T leží na kružnici, udělte 2 body, za důkaz opačné implikace 4 body.

2. V obecném čtyřstěnu $ABCD$ označme E a F středy těžnic z vrcholů A a D. Určete poměr objemů čtyřstěnů $BCEF$ a $ABCD$. (*P. Leischner*)

Řešení. Označme K a L středy hran BC a AD a A_0, D_0 příslušná těžiště stěn proti vrcholům A, D (obr. 1). Obě těžnice AA_0, DD_0 leží v rovině AKD, přičemž jejich průsečík T (těžiště čtyřstěnu) je dělí v poměru $3:1$ a zároveň je středem spojnice KL (to je zřejmé z vlastností těžiště: $T = \frac{1}{4}(A+B+C+D) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}(A+D)+\frac{1}{2}(B+C)) = \frac{1}{2}(K+L)$). Odtud plyne, že je $|ET| : |AT| = |FT| : |DT| = 1 : 3$, takže $|EF| = \frac{1}{3}|AD|$. Rovina BCL půlí obě úsečky AD i EF, a proto také rozděluje oba uvažované čtyřstěny $ABCD$ i $BCEF$ na části stejného objemu. Označme G střed úsečky EF, pro příslušné objemy pak platí



Obr. 1

$$\frac{V(BCEF)}{V(ABCD)} = \frac{V(BCGF)}{V(BCLD)} = \frac{|GF|}{|LD|} \cdot \frac{S(BCG)}{S(BCL)} = \\ = \frac{1}{3}\frac{|KG|}{|KL|} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}.$$

3. Ukažte, že existuje trojúhelník ABC, v němž při obvyklém označení stran a těžnic platí $a \neq b$ a zároveň $a + t_a = b + t_b$. Dále dokažte existenci takového čísla k, že pro každý zmíněný trojúhelník platí $a + t_a = b + t_b = k(a + b)$. Nakonec najděte všechny poměry $a : b$ stran a, b takových trojúhelníků. (*J. Šimša*)

Řešení. Víme, že

$$t_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2), \quad t_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2),$$

takže

$$t_a^2 - t_b^2 = \frac{3}{4}(b^2 - a^2).$$

Protože podle předpokladu úlohy $t_a - t_b = b - a \neq 0$, vychází odtud $t_a + t_b = \frac{3}{4}(b + a)$. Ze soustavy rovnic

$$t_a - t_b = b - a,$$
$$t_a + t_b = \frac{3}{4}(b + a)$$

určíme $t_a = \frac{1}{8}(7b - a)$, $t_b = \frac{1}{8}(7a - b)$, tedy

$$a + t_a = b + t_b = \frac{7}{8}(a + b).$$

Proto je $k = \frac{7}{8}$.

Nyní zjistíme, pro které délky $a \neq b$ existuje trojúhelník ABC o stranách a, b a těžnicích $t_a = \frac{1}{8}(7b - a)$, $t_b = \frac{1}{8}(7a - b)$. Především musí být $t_a > 0$, $t_b > 0$, což je ekvivalentní nerovnosti $\frac{1}{7} < \frac{a}{b} < 7$. Známe všechny tři strany trojúhelníku AB_1T:

$$|AB_1| = \frac{b}{2}, \quad |AT| = \frac{2}{3}t_a = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}(7b - a) = \frac{1}{12}(7b - a),$$
$$|B_1T| = \frac{1}{3}t_b = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}(7a - b) = \frac{1}{24}(7a - b).$$

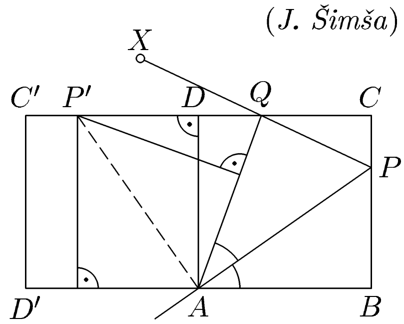
Zkoumáme-li trojúhelníkové nerovnosti pro tyto tři délky, dostaneme podmínku

$$\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < 3,$$

z níž je třeba dle předpokladu vyloučit hodnotu $\dfrac{a}{b} = 1$. To je zároveň i postačující podmínka: Sestrojený trojúhelník AB_1T lze vždy doplnit na trojúhelník ABC se stranou $b = |AC|$ a těžnicemi $t_a = |AA_1|$, $t_b = |BB_1|$. Konečně z rovnosti $t_a^2 - t_b^2 = \frac{3}{4}(b^2 - a^2)$ vidíme, že je i $a = |BC|$.

5. V rovině je dán ostrý úhel APX. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby bod P ležel na straně BC a aby polopřímka PX proťala stranu CD v takovém bodě Q, že bod P leží na ose úhlu BAQ. (*J. Šimša*)

Řešení. Uvažujme otočení kolem středu A o $90°$, které zobrazí vrchol B hledaného čtverce $ABCD$ na vrchol D, a označme P', C', D' obrazy bodů P, C, D v tomto otočení (obr. 2). Protože $|\sphericalangle PAP'| = 90°$, plyne z vlastnosti os vedlejších úhlů, že AP' je osa úhlu QAD'. Proto má bod P' stejnou vzdálenost od AD' i od AQ (rovnou straně hledaného čtverce). Tyto vzdálenosti jsou výšky v trojúhelníku AQP'. Protože bod P' můžeme sestrojit, můžeme sestrojit i bod Q jako průsečík ramene PX s osou úsečky AP'. Zbytek konstrukce je už zřejmý.



Obr. 2

2. *Nechť K, L, M jsou po řadě vnitřní body stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC takové, že kružnice vepsané dvojicím trojúhelníků ABK a CAK, BCL a ABL, CAM a BCM mají vnější dotyk. Pak platí*

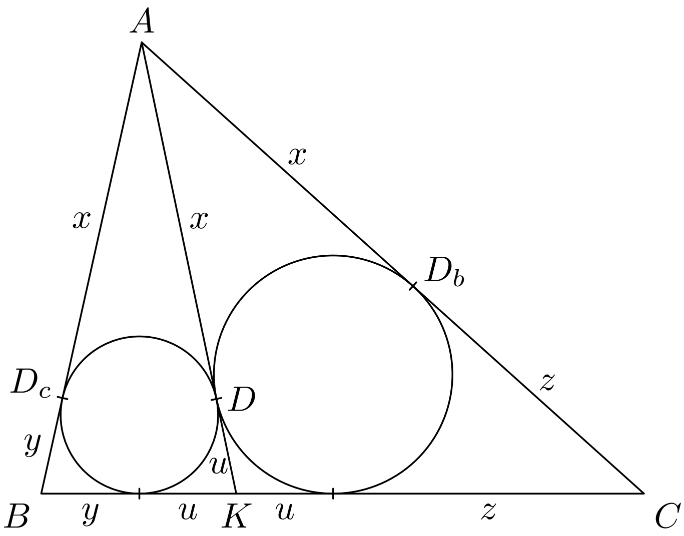
$$|BK| \cdot |CL| \cdot |AM| = |CK| \cdot |AL| \cdot |BM|.$$

Dokažte.

Poznámka. *Z uvedené rovnosti plyne na základě Cèvovy věty, že přímky AK, BL, CM procházejí týmž bodem.*

Řešení. Uvnitř strany BC trojúhelníku ABC uvažujme bod K takový, že kružnice vepsané trojúhelníkům BKA a CKA mají vnější dotyk v bodě D. Nechť dále (při obvyklém označení délek stran trojúhelníku ABC) platí označení podle obrázku 1, tj.

$$|AD_b| = |AD_c| = x,\ |BD_c| = y,\ |CD_b| = z,\ |BK| = y + u,\ |CK| = z + u.$$



Obr. 1

Z předešlého obrázku snadno vidíme, že platí následující soustava rovnic

$$\begin{aligned} y + z &= a - 2u, \\ z + x &= b, \\ x + y &= c. \end{aligned}$$

Jednoduchou úpravou odtud dostáváme $2y + 2u = a - b + c$ (analogicky vyjádříme $2z + 2u$), a tudíž platí

$$\begin{aligned} |BK| &= y + u = \frac{1}{2}(a - b + c) = s - b, \\ |CK| &= z + u = \frac{1}{2}(a + b - c) = s - c, \end{aligned}$$

kde $2s = a + b + c$. To značí (viz první návodná úloha), že bod K je bodem dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ABC se stranou BC. Pro body L a M platí využitím analogického postupu následující vztahy:

$$|CL| = s - c, \quad |AL| = s - a, \quad |AM| = s - a, \quad |BM| = s - b.$$

Z předešlých rovností již bezprostředně plyne

$$|BK| \cdot |CL| \cdot |AM| = (s - a)(s - b)(s - c) = |CK| \cdot |AL| \cdot |BM|.$$

Tím je důkaz ukončen.

Návodné úlohy:

1. Pomocí délek stran a, b, c daného trojúhelníku ABC vyjádřete
   a) vzdálenosti vrcholů a bodů dotyku kružnice tomuto trojúhelníku vepsané, které leží na přilehlých stranách;
   b) vzdálenosti vrcholů a bodů dotyku kružnic vně připsaných přilehlým stranám (které leží na těchto stranách);
   c) vzdálenosti středů jeho stran a bodů dotyku kružnice danému trojúhelníku vepsané (vně připsané), které leží na jednotlivých stranách daného trojúhelníku.
2. Seznamte žáky s následující variantou Cèvovy věty: Nechť K, L, M jsou po řadě vnitřní body stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC. Úsečky AK, BL, CM se protínají v jednom bodě uvnitř trojúhelníku ABC, právě když platí
$$\frac{|AM|}{|MB|} \cdot \frac{|BK|}{|KC|} \cdot \frac{|CL|}{|LA|} = 1.$$
   Větu dokažte, například podle [Švrček J., Vanžura J.: *Geometrie trojúhelníka*, SNTL Praha (1988)].

Poznámka. Úsečky AK, BL, CM vyhovující podmínkám úlohy se tedy protínají podle Cèvovy věty v jediném bodě G, zvaném *Gergonnův* bod daného trojúhelníku ABC.

4. *V rovině je dáno* 1999 *shodných trojúhelníků o obsahu* 1*, které jsou obrazy téhož trojúhelníku v různých posunutích. Je-li průnikem všech daných trojúhelníků množina* M*, která obsahuje těžiště každého z nich, je obsah množiny* M *alespoň* $\frac{1}{9}$*. Dokažte.*

Řešení. Nechť $A_sB_sC_s$, kde $s \in \{1, 2, \dots, 1999\}$, jsou trojúhelníky vyhovující podmínkám úlohy a XYZ nechť značí polorovinu s hraniční přímkou XY a vnitřním bodem Z. Každý z daných trojúhelníků $A_sB_sC_s$ je průnikem vždy tří polorovin $A_sB_sC_s$, $B_sC_sA_s$ a $C_sA_sB_s$, proto je (neprázdná) množina M průnikem $3 \cdot 1\,999 = 5\,997$ takových polorovin. Vzhledem k tomu, že poloroviny $A_sB_sC_s$, kde $s \in \{1, 2, \dots, 1999\}$, se navzájem liší jen posunutím, je jejich průnikem polorovina $A_iB_iC_i$, kde i je pevný index z množiny $\{1, 2, \dots, 1999\}$. Podobně průnikem všech polorovin $B_sC_sA_s$ je určitá polorovina $B_jC_jA_j$ a průnikem všech polorovin $C_sA_sB_s$ je určitá polorovina $C_kA_kB_k$, kde $j, k \in \{1, 2, \dots, 1999\}$.

Množina M je proto průnikem tří výše zmíněných polorovin $A_iB_iC_i$, $B_jC_jA_j$ a $C_kA_kB_k$, M je tedy trojúhelník ABC, kde A je průsečík přímek A_iB_i a C_kA_k, B je průsečík přímek A_iB_i a B_jC_j a konečně C je průsečík přímek B_jC_j a C_kA_k. Tento trojúhelník je podobný všem trojúhelníkům $A_sB_sC_s$, přičemž pro poměr podobnosti λ platí $0 < \lambda \leqq 1$. (Případ $A = B = C$ lze dle textu úlohy vyloučit.)

Vzhledem k tomu, že obsah trojúhelníku ABC je λ^2, stačí dokázat, že $\lambda \geqq \frac{1}{3}$. Označme v výšku z vrcholu C_i na stranu A_iB_i v trojúhelníku $A_iB_iC_i$. Protože přímka A_iB_i je totožná s přímkou AB, je vzdálenost těžiště T_i trojúhelníku $A_iB_iC_i$ od přímky AB rovna $\frac{1}{3}v$. Podle zadání obsahuje množina M těžiště všech trojúhelníků $A_sB_sC_s$, musí tudíž obsahovat těžiště T_i trojúhelníku $A_iB_iC_i$.

Vzdálenost vrcholu C trojúhelníku ABC od jeho strany AB je tedy alespoň $\frac{1}{3}v$. Porovnáním velikostí výšek z vrcholů C_i a C v podobných trojúhelnících $A_iB_iC_i$ a ABC dostáváme již přímo žádanou nerovnost $\lambda \geqq \frac{1}{3}$, tj. $\lambda^2 \geqq \frac{1}{9}$, což jsme chtěli dokázat.

Doplňující úlohy:

1. V rovině je dáno 1999 shodných obdélníků o obsahu 1, které jsou obrazy téhož obdélníku v různých posunutích. Je-li průnikem všech daných obdélníků množina M, která obsahuje průsečík úhlopříček každého z nich, je obsah množiny M alespoň $\frac{1}{4}$. Dokažte.
2. Je dána úsečka AB. Množina bodů M je definována takto:
   a) M obsahuje body A, B.
   b) Obsahuje-li M body X a Y, obsahuje i bod Z úsečky XY, pro který platí $|YZ| = 3|XZ|$.
3. Dokažte, že každá úsečka, která je částí úsečky AB, obsahuje alespoň jeden bod množiny M. [17. MO, A–I–1]

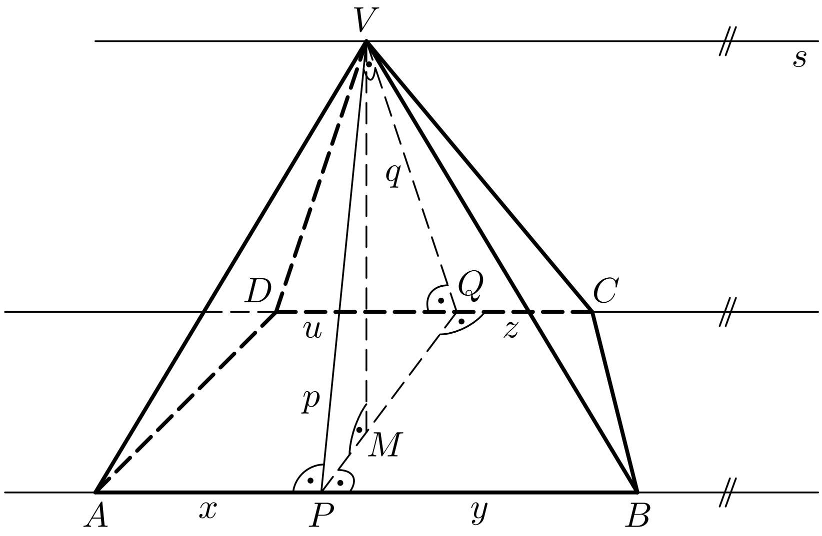
6. *Je dán čtyřboký jehlan $ABCDV$ s podstavou $ABCD$. Jeho hrany AB, CD jsou rovnoběžné a roviny ABV a CDV vzájemně kolmé. Označme P patu výšky z vrcholu V na stranu AB v trojúhelníku ABV a Q patu výšky z vrcholu V na stranu CD v trojúhelníku CDV. Dokažte nerovnost*

$$|AV|^2 + |BV|^2 + |CV|^2 + |DV|^2 \geqq |PQ|^2 + 2(S_{ABV} + S_{CDV} + S_{PQV}),$$

kde S_{XYZ} značí obsah trojúhelníku XYZ. Zjistěte rovněž, kdy platí rovnost.

Řešení. Přímka AB je průsečnicí roviny ABV s rovinou podstavy $ABCD$ čtyřbokého jehlanu $ABCDV$, podobně přímka CD je průsečnicí roviny CDV s rovinou podstavy $ABCD$ uvažovaného jehlanu. Vzhledem k tomu, že obě průsečnice jsou dle zadání rovnoběžné, je rovněž průsečnice s rovin ABV a CDV s nimi rovnoběžná (obr. 2). Rovina kolmá k přímce s, procházející vrcholem V daného jehlanu, protíná přímky AB, CD po řadě v bodech P, Q, které jsou patami výšek z vrcholu V po řadě na strany AB, CD v trojúhelnících ABV, CDV. Roviny ABV a CDV jsou podle zadání vzájemně kolmé, trojúhelník PQV má proto pravý úhel u vrcholu V. Pata M výšky z vrcholu V na přeponu PQ je přitom totožná s patou tělesové výšky z vrcholu V jehlanu $ABCDV$. Pro polohu bodů P a Q na přímce AB, resp. CD, je třeba dále rozlišit tři případy:

(i) Oba body P a Q leží na odpovídajících hranách AB, CD.
(ii) Jeden z bodů P, Q leží na odpovídající hraně, druhý na prodloužení odpovídající hrany.
(iii) Žádný z bodů P, Q neleží na odpovídající hraně.



Obr. 2

Dokážeme dále nerovnost z textu úlohy pro případ (i). Zaveďme označení ve shodě s obrázkem 2, tj.

$$|AP| = x,\ |BP| = y,\ |CQ| = z,\ |DQ| = u,\ |VP| = p,\ |VQ| = q.$$

Využitím Pythagorovy věty v pravoúhlých trojúhelnících APV, BPV, CQV, DQV a PQV dostáváme postupně vztahy:

$$|AV|^2 = x^2 + p^2, \quad |BV|^2 = y^2 + p^2, \quad |CV|^2 = z^2 + q^2,$$
$$|DV|^2 = u^2 + q^2, \quad |PQ|^2 = p^2 + q^2.$$

Pro obsahy trojúhelníků ABV, CDV a PQV platí vzorce

$$2S_{ABV} = (x + y)p, \quad 2S_{CDV} = (z + u)q, \quad 2S_{PQV} = pq.$$

Dosadíme-li nyní za $|AV|^2$, $|BV|^2$, $|CV|^2$, $|DV|^2$, $|PQ|^2$ a $2S_{ABV}$, $2S_{CDV}$, $2S_{PQV}$ do nerovnosti v textu úlohy, dostáváme po snadné úpravě

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + p^2 + q^2 \geqq xp + yp + zq + uq + pq.$$

Nyní dokážeme, že předešlá nerovnost platí pro libovolná nezáporná reálná čísla x, y, z, u a libovolná kladná čísla p, q. Vynásobením rozdílu levé a pravé strany této nerovnosti číslem 4 dostáváme po úpravě

$$(4x^2 - 4xp + p^2) + (4y^2 - 4yp + p^2) + (4z^2 - 4zq + q^2) + (4u^2 - 4uq + q^2) +$$
$$+ 2(p^2 - 2pq + q^2) = (2x - p)^2 + (2y - p)^2 + (2z - q)^2 + (2u - q)^2 + 2(p - q)^2 \geqq 0.$$

Vzhledem k tomu, že všechny provedené úpravy byly ekvivalentní, platí též nerovnost uvedená v textu úlohy, což jsme měli dokázat.

Podobně lze postupovat i v případech (ii) a (iii). Odlišné je zde pouze vyjádření hodnot $2S_{ABV}$ a $2S_{CDV}$.

Rovnost může nastat pouze v případě (i), ve zbylých dvou případech je vyloučena. V případě (i) přitom rovnost nastává, právě když platí

$$2x = 2y = 2z = 2u = p = q,$$

tj. právě když podstavou daného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ je obdélník $ABCD$, pata M výšky VM uvažovaného jehlanu je průsečíkem úhlopříček AC a BD v obdélníku $ABCD$ a současně platí

$$|AB| : |BC| : |VM| = 4 : 2\sqrt{2} : \sqrt{2}.$$

Návodné úlohy:

1. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x, y platí nerovnost
$$5x^2 + y^2 + 1 \geqq 2x(2 + y).$$
Zjistěte, kdy nastává rovnost. [Rovnost nastává, právě když $x = y = \frac{1}{2}$]
2. Označme a, b, c, d, e, f velikosti hran čtyřstěnu a S jeho povrch. Dokažte nerovnost
$$S \leqq \frac{\sqrt{3}}{6}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2)$$
[41. MO, A–III–2]
3. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c, d, e platí nerovnost
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geqq (a + b + c + d)e.$$
Zjistěte, kdy nastává rovnost. [Rovnost nastává, právě když $2a = 2b = 2c = 2d = e$.]
4. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 platí nerovnost
$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 \geqq 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1).$$

2. Je dán rovnoramenný lichoběžník $UVST$, v němž $3|ST| < 2|UV|$. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB tak, aby body B, C ležely na přímce VS, bod U na přímce AB a bod T byl těžištěm trojúhelníku ABC.

3. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b platí nerovnost

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt[3]{\frac{b}{a}} \leqq \sqrt[3]{2(a+b)\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\Big)}.$$

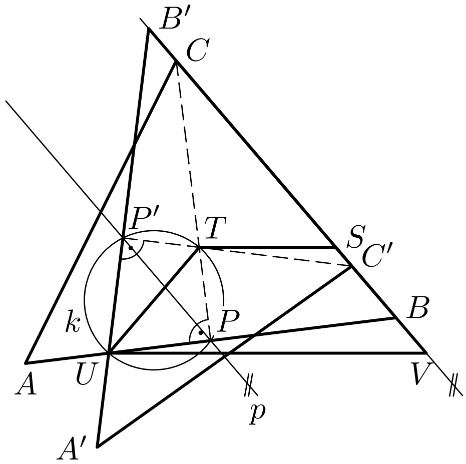
Zjistěte, kdy nastane rovnost.

4. Určete všechny konvexní čtyřúhelníky $ABCD$ s následující vlastností: Uvnitř čtyřúhelníku $ABCD$ existuje bod E takový, že každá přímka, která prochází tímto bodem a protíná strany AB a CD ve vnitřních bodech, dělí čtyřúhelník $ABCD$ na dvě části o stejném obsahu. Svou odpověď zdůvodněte.

2. Označme P střed základny AB hledaného rovnoramenného trojúhelníku ABC. Protože vrchol U daného lichoběžníku $UVST$ leží na přímce AB, je buď $U = P$, anebo tvoří body T, U, P vrcholy pravoúhlého trojúhelníku (obr. 1). V obou případech bod P leží na Thaletově kružnici k sestrojené nad průměrem TU. Označme d vzdálenost vrcholu T daného lichoběžníku od přímky VS. Vzhledem k tomu, že T je těžištěm trojúhelníku ABC, má jeho výška z vrcholu A velikost $3d$, tudíž bod P leží na přímce p, která je s přímkou VS rovnoběžná, má od ní vzdálenost $\frac{3}{2}d$ a leží v polorovině VST. Odtud již plyne *konstrukce* trojúhelníku ABC:

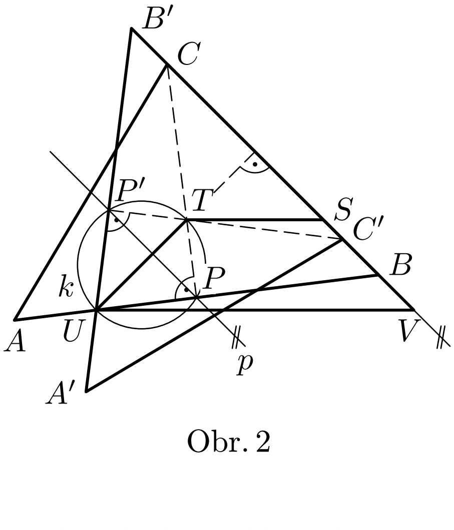
1. sestrojíme kružnici k s průměrem TU;
2. sestrojíme v polorovině VST přímku $p \parallel VS$ ve vzdálenosti $\frac{3}{2}d$ od VS;
3. sestrojíme bod $P \in k \cap p$;
4. sestrojíme přímku $PB \perp TP$, $B \in VS$;
5. sestrojíme vrcholy A ($A \in PB$, $A \neq B$, $|AP| = |PB|$) a C ($C \in PT \cap VS$).

Diskuse: Protože dle předpokladu je $ST \parallel UV$ a $\frac{3}{2}|ST| < |UV|$, protne přímka p stranu TU daného lichoběžníku ve vnitřním bodě, bude tedy sečnou kružnice k a protne ji ve dvou různých bodech P a P' (obr. 1). Pro každý z nich dostáváme jedno řešení, trojúhelníky

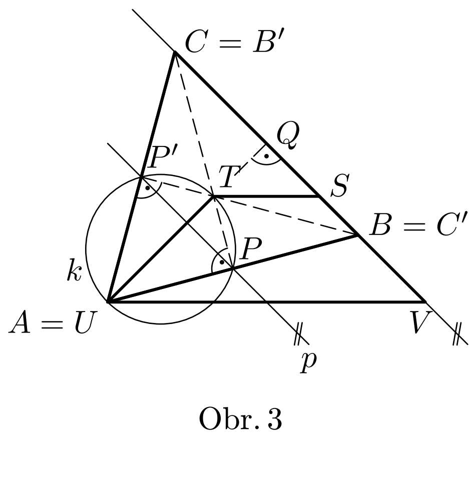


Obr. 1

ABC a $A'B'C'$. Z konstrukce je dále zřejmé, že pokud bude $TU \perp SV$, budou oba body P, P' souměrně sdružené podle osy TU, takže dostaneme dva shodné (souměrně sdružené) trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ (obr. 2). Obě souměrná řešení splynou v jedno v případě, kdy vyjde $A = U$. Přitom bude těžiště T trojúhelníku ABC zároveň průsečíkem jeho výšek, takže výsledný trojúhelník ABC bude rovnostranný (obr. 3). To nastane, právě když obě ramena daného lichoběžníku jsou navzájem kolmá a navíc platí $3|ST| = |UV|$, jak plyne z podobnosti trojúhelníků $UVQ \sim TSQ$. V tomto jediném případě má úloha jedno řešení. Ve všech ostatních případech má úloha dvě řešení (která jsou pro $TU \perp SV$ shodná).



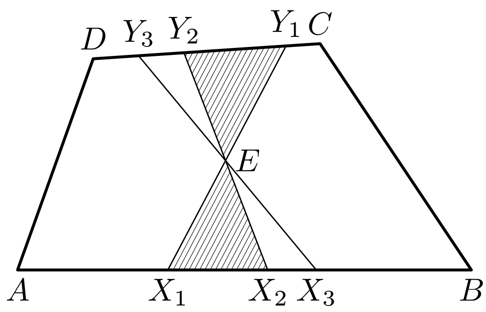
Obr. 2



Obr. 3

Za úplné řešení je 6 bodů. Není-li uveden počet řešení úlohy, strhněte 2 body. Pokud je v diskusi pominut případ, kdy obě ramena lichoběžníku jsou navzájem kolmá, strhněte 1 bod.

4. Nechť E je vnitřním bodem takového konvexního čtyřúhelníku $ABCD$, který vyhovuje podmínkám úlohy. Uvažujme přímky X_1Y_1, X_2Y_2 a X_3Y_3, které procházejí bodem E a protínají po řadě strany AB a CD v bodech X_1 a Y_1, X_2 a Y_2, X_3 a Y_3 (obr. 4). Jestliže všechny tři uvažované přímky dělí čtyřúhelník $ABCD$ na dvě části o stejném obsahu, rovnají se i obsahy trojúhelníků EX_1X_2 a EY_1Y_2, resp. EX_2X_3 a EY_2Y_3. Protože tyto trojúhelníky mají vždy shodné vnitřní úhly při vrcholu E, plyne z rovnosti jejich obsahů rovnost



Obr. 4

$$|EX_1| \cdot |EX_2| = |EY_1| \cdot |EY_2|,$$

resp.

$$|EX_2| \cdot |EX_3| = |EY_2| \cdot |EY_3|.$$

Z obou předešlých rovností dostáváme

$$\frac{|EX_1|}{|EX_3|} = \frac{|EY_1|}{|EY_3|}.$$

Trojúhelníky EX_1X_3 a EY_1Y_3 jsou tedy podobné (podle věty sus) a mají týž obsah. Jsou proto středově souměrné podle středu E a platí tudíž $X_1X_3 \parallel Y_1Y_3$. Čtyřúhelník $ABCD$ má tedy nutně rovnoběžné strany AB a CD.

Naopak každý (konvexní) čtyřúhelník $ABCD$, v němž platí $AB \parallel CD$, vyhovuje podmínkám úlohy. Za bod E pak zvolíme střed úsečky spojující středy rovnoběžných stran AB a CD; požadovaná vlastnost takového bodu je zřejmá.

Závěr: Podmínkám úlohy vyhovují právě všechny konvexní čtyřúhelníky $ABCD$, v nichž $AB \parallel CD$.

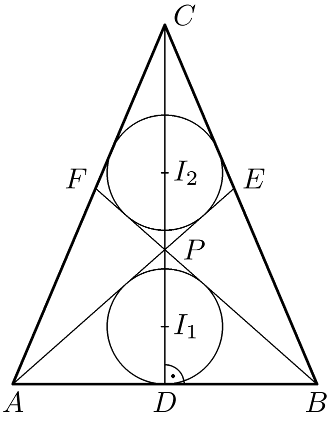
Za úplné řešení je 6 bodů. Za důkaz, že čtyřúhelník $ABCD$ má nutně rovnoběžné strany AB a CD, udělte 4 body. Za ověření skutečnosti, že každý takový čtyřúhelník (spolu s charakterizací bodu E) vyhovuje podmínkám úlohy, udělte 2 body.

2. *Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB. Na jeho výšce CD je zvolen bod P tak, že kružnice vepsané trojúhelníku ABP a čtyřúhelníku $PECF$ jsou shodné; přitom bod E je průsečík přímky AP se stranou BC a F průsečík přímky BP se stranou AC. Dokažte, že i kružnice vepsané trojúhelníkům ADP a BCP jsou shodné.* *(J. Šimša, K. Horák)*

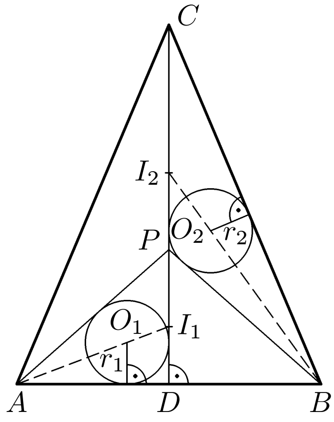
Řešení. Protože přímka CD je osou souměrnosti dvou vrcholových úhlů APB a EPF, leží střed I_1 kružnice vepsané trojúhelníku ABP na úsečce DP a zároveň střed I_2 kružnice vepsané čtyřúhelníku $PECF$ leží na úsečce CP (obr. 1). Navíc platí $|I_1P| = |I_2P|$, neboť obě zmíněné kružnice jsou shodné. Středy O_1, O_2 kružnic vepsaných trojúhelníkům ADP a BCP (obr. 2) pak leží po řadě na úsečkách AI_1, BI_2, neboť polopřímky AI_1 a BI_2 jsou osy odpovídajících úhlů DAP a CBP. Z rovnosti $|I_1P| = |I_2P|$ navíc plyne, že trojúhelníky API_1 a BPI_2 mají stejný obsah, protože se rovnají i příslušné výšky $|AD| = |BD|$.

Označme r_1, r_2 poloměry kružnic vepsaných trojúhelníkům ADP a BCP. Vyjádříme-li pomocí nich oba zmíněné obsahy ($S(XYZ)$ značí obsah trojúhelníku XYZ), dostaneme

$$S(API_1) = S(AO_1P) + S(O_1PI_1) = \frac{1}{2} \cdot |AP| \cdot r_1 + \frac{1}{2} \cdot |I_1P| \cdot r_1 = \frac{r_1}{2}(|AP| + |I_1P|),$$
$$S(BPI_2) = S(BO_2P) + S(O_2PI_2) = \frac{1}{2} \cdot |BP| \cdot r_2 + \frac{1}{2} \cdot |I_2P| \cdot r_2 = \frac{r_2}{2}(|BP| + |I_2P|).$$



Obr. 1

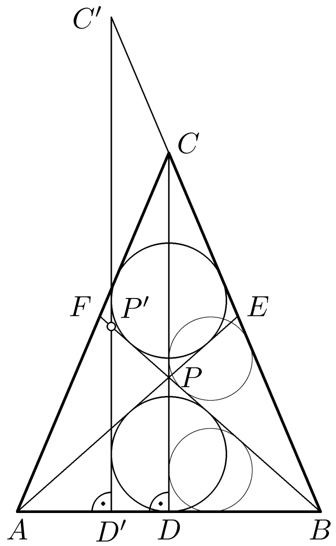


Obr. 2

Vzhledem k tomu, že $S(API_1) = S(BPI_2)$, $|I_1P| = |I_2P|$ a $|AP| = |BP|$, plyne odtud $r_1 = r_2$, což jsme měli dokázat.

Jiné řešení. Vzhledem k souměrnosti trojúhelníku ABC podle osy CD stačí dokázat, že se shodují kružnice vepsané trojúhelníkům BDP a BPC.

Vnější společné tečny shodných kružnic vepsaných úhelníkům ABP a $PECF$ jsou rovnoběžné se střednou CD, tedy kolmé na přímku AB. Uvažujme tu z nich, která protíná úsečky AD, PF a polopřímku opačnou CB. Tyto průsečíky označme po řadě D', P', C' (obr. 3). Ve stejnolehlosti, která zobrazí trojúhelník $BD'C'$ na trojúhelník BDC, odpovídají trojúhelníkům $BD'P'$ a $BP'C'$ trojúhelníky BDP a BPC. Protože kružnice vepsaná čtyřúhelníku $PECF$ je zároveň vepsána i trojúhelníku $BP'C'$ a kružnice vepsaná trojúhelníku ABP je zároveň vepsána trojúhelníku $BD'P'$ a obě uvedené kružnice jsou dle předpokladu shodné, jsou shodné i jejich obrazy ve zmíněné stejnolehlosti, tedy kružnice vepsané trojúhelníkům BDP a BPC.

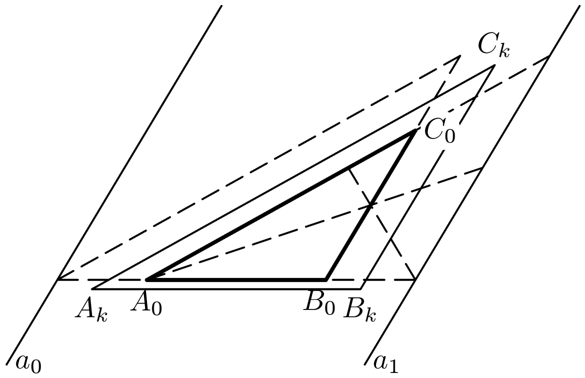


Obr. 3

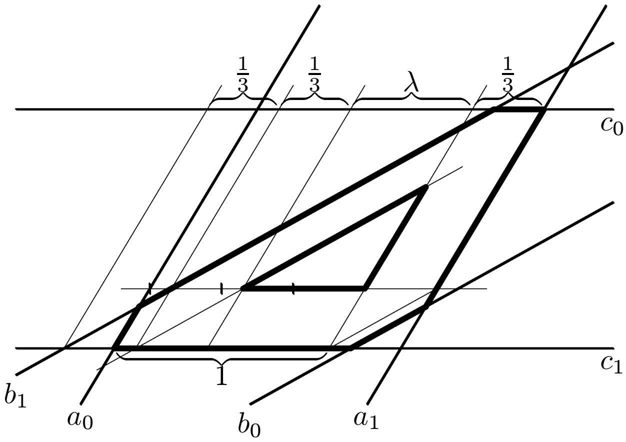
3. *V rovině je dáno 2 000 shodných trojúhelníků o obsahu 1, které jsou obrazy téhož trojúhelníku v různých posunutích. Každý z těchto trojúhelníků obsahuje těžiště všech zbývajících. Dokažte, že obsah sjednocení těchto trojúhelníků je menší než $\frac{22}{9}$.* *(P. Calábek)*

Řešení. Nechť trojúhelník ABC o obsahu 1 je vzorem všech 2 000 trojúhelníků $A_kB_kC_k$, $k \in \in \{1, 2, \dots, 2\,000\}$, v různých posunutích. Obsahuje-li každý z těchto trojúhelníků těžiště všech zbývajících, plyne z řešení úlohy 49–A–I–4, že průnikem všech těchto trojúhelníků je trojúhelník $A_0B_0C_0$, který je podobný trojúhelníku ABC, přičemž jeho strany A_0B_0, B_0C_0, C_0A_0 jsou po řadě rovnoběžné se stranami AB, BC, CA a pro poměr podobnosti λ navíc platí $\lambda \in \langle\frac{1}{3}; 1\rangle$.

Je-li $A_kB_kC_k$ ($k \in \{1, 2, \dots, 2\,000\}$) libovolný z daných trojúhelníků, je trojúhelník $A_0B_0C_0$ jeho částí, proto leží vrchol A_k v polorovině $B_0C_0A_0$ ve vzdálenosti nejvýše v_a od hraniční přímky B_0C_0, kde v_a je velikost výšky trojúhelníku ABC příslušné vrcholu A. Na druhou stranu je i vzdálenost strany B_kC_k od vrcholu A_0 nejvýše v_a. Protože navíc trojúhelník $A_0B_0C_0$ obsahuje těžiště všech takovýchto trojúhelníků $A_kB_kC_k$, nemůže být vzdálenost strany B_kC_k od strany $B_0C_0 \parallel B_kC_k$ větší než $\frac{1}{3}v_a$. Vzdálenost vrcholu A_0 od strany B_0C_0 je λv_a, dohromady je tedy vzdálenost obou rovnoběžných přímek B_kC_k, B_0C_0 nejvýše $\min(\frac{1}{3}, 1-\lambda)\cdot v_a$. Vidíme, že všechny dané trojúhelníky leží uvnitř pásu omezeného dvěma rovnoběžkami $a_0 \parallel a_1 \parallel B_0C_0$ (obr. 4), jejichž vzdálenost od B_0C_0 je v_a a $\min(\frac{1}{3}, 1-\lambda)\cdot v_a$. Analogické tvrzení můžeme vyslovit i pro další dva směry C_0A_0 a A_0B_0. Sjednocení všech daných trojúhelníků musí tedy ležet v průniku všech tří odpovídajících pásů.



Obr. 4



Obr. 5

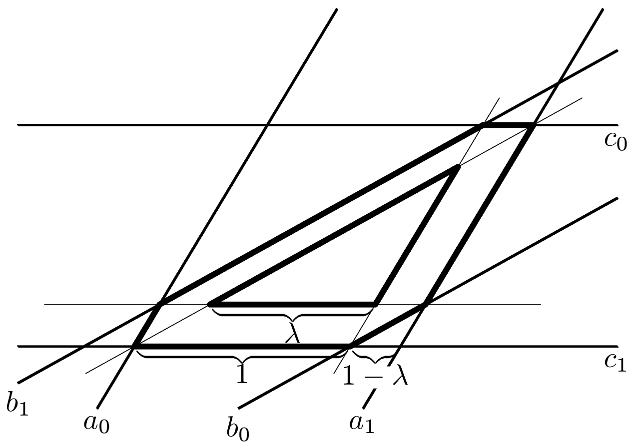
Rozlišíme nyní dva případy podle toho, čemu se rovná $\min(\frac{1}{3}, 1-\lambda)$.

1. Nechť $\frac{1}{3} \leqq \lambda < \frac{2}{3}$. Průnikem odpovídajících tří pásů je šestiúhelník, který vznikne z trojúhelníku T určeného trojicí přímek (a_1, b_1, c_1) odstraněním tří trojúhelníčků T_a, T_b, T_c určených trojicemi přímek (a_0, b_1, c_1), (a_1, b_0, c_1) a (a_1, b_1, c_0). V obr. 5 jsou vyznačeny některé poměrné vzdálenosti vzhledem k $|AB|$, s jejichž pomocí zjistíme, že trojúhelník T je podobný trojúhelníku ABC s poměrem podobnosti $1+\lambda$ a trojúhelníky T_a, T_b, T_c jsou podobné trojúhelníku ABC s poměrem podobnosti $\lambda - \frac{1}{3}$. Z vypočtených poměrů je zároveň zřejmé, že pro $\lambda = \frac{1}{3}$ se trojúhelníky T_a, T_b, T_c stáhnou do jediného bodu, takže uvedený šestiúhelník se zredukuje na trojúhelník T.

Pro obsah $S(\lambda)$ vyznačeného útvaru tak pro $\lambda < \frac{2}{3}$ platí

$$S(\lambda) = (1+\lambda)^2 - 3\Big(\lambda - \frac{1}{3}\Big)^2 =$$
$$= -2\lambda^2 + 4\lambda + \frac{2}{3} = -2(\lambda-1)^2 + \frac{8}{3} < \frac{8}{3} - 2\cdot\frac{1}{9} = \frac{22}{9}.$$

2. Nechť $\frac{2}{3} \leqq \lambda \leqq 1$. Průnikem odpovídajících tří pásů je opět šestiúhelník (obr. 6), přičemž



Obr. 6

odpovídající trojúhelník T je podobný trojúhelníku ABC s poměrem podobnosti $3-2\lambda$ a trojúhelníky T_a, T_b, T_c jsou podobné trojúhelníku ABC s poměrem podobnosti $1-\lambda$ (v tomto případě se šestiúhelník zredukuje na trojúhelník T pro $\lambda = 1$).

Pro obsah $S(\lambda)$ v tomto případě platí

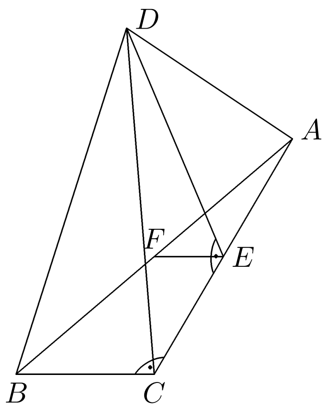
$$
\begin{aligned}
S(\lambda) &= (3-2\lambda)^2 - 3(1-\lambda)^2 = \\
&= \lambda^2 - 6\lambda + 6 = (\lambda-3)^2 - 3 \leqq \frac{49}{9} - 3 = \frac{22}{9}
\end{aligned}
$$

s rovností pro $\lambda = \frac{2}{3}$.

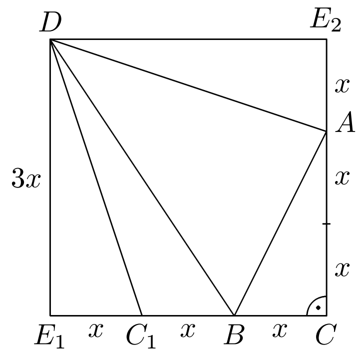
Zjistili jsme, že sjednocení všech trojúhelníků $A_kB_kC_k$ ($k = 1, 2, \dots, 2\,000$) je pro $\lambda \neq \frac{2}{3}$ částí rovinného útvaru, jehož obsah je menší než $\frac{22}{9}$. Pro $\lambda = \frac{2}{3}$ je pak částí šestiúhelníku s obsahem $\frac{22}{9}$. Strana tohoto šestiúhelníku, která leží např. na přímce a_0, může obsahovat jen konečně mnoho vrcholů A_i daných trojúhelníků $A_iB_iC_i$, takže v šestiúhelníku určitě najdeme trojúhelníček kladného obsahu, který do uvažovaného sjednocení nepatří. Obsah sjednocení uvažovaných trojúhelníků je proto i v tomto případě menší než $\frac{22}{9}$. Tím je důkaz hotov.

5. *Monika zhotovila papírový model trojbokého jehlanu, jehož podstavou byl pravoúhlý trojúhelník. Když model rozřízla podél odvěsen podstavy a podél těžnice jedné ze stěn, vznikl po rozvinutí do roviny čtverec o straně a. Určete objem tohoto jehlanu.* *(P. Leischner)*

Řešení. Označme $ABCD$ uvažovaný jehlan s podstavou ABC, kde $|\sphericalangle ACB| = 90°$. Podle textu úlohy byl model rozříznut podél obou odvěsen AC a BC podstavy a dále podél těžnice z vrcholu D jedné ze stěn BCD, ACD. Při řezu podél těžnice ve stěně ABD by totiž nebylo možné rozvinout model do roviny. Bez újmy na obecnosti předpokládejme dále, že řez je veden podél těžnice DE ve stěně ACD (obr. 7), kdy po rozvinutí do roviny vznikne útvar s hranicí $BCAE_2DE_1C_1B$ a pravým úhlem u vrcholu C (obr. 8). Protože tento útvar je čtverec (označme ho $\mathcal{C}$), jsou úhly AE_2D a DE_1C_1 pravé (žádný z nich nemůže být přímý, neboť jejich součet je 180°). Proto je těžnice DE trojúhelníku ACD zároveň jeho výškou a body E_1, E_2 jsou vrcholy čtverce $\mathcal{C}$.



Obr. 7



Obr. 8

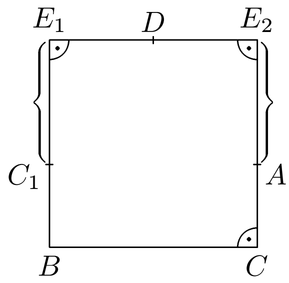
Kdyby vrcholy E_1 a E_2 čtverce $\mathcal{C}$ byly sousední, z rovnosti $|E_1C_1| = |E_2A|$ a z toho, že $\mathcal{C}$ má vrchol C, by plynulo, že $\mathcal{C} = CE_2E_1B$, a tak $|BC| = |BE_1|$, což ale odporuje rovnosti $|BC| = |BC_1|$ (obr. 9). Tak jsme (sporem) dokázali, že vrcholy E_1 a E_2 čtverce $\mathcal{C}$ *nejsou* sousední, proto k vrcholům $\mathcal{C}$ patří (kromě bodů E_1, E_2 a C) nutně bod D (z úseku E_2DE_1 hranice $BCAE_2DE_1C_1B$).

Popsané body rozdělují hranici čtverce $\mathcal{C} = CE_2DE_1$ na úseky, jejichž délky jsou vyznačeny na obr. 8 pomocí výhodného označení $x = \frac{1}{3}a$. Délky ostatních hran jehlanu spočteme podle Pythagorovy věty:

$$|DC| = |DA| = \sqrt{(3x)^2 + (x)^2} = x\sqrt{10},$$
$$|DB| = \sqrt{(3x)^2 + (2x)^2} = x\sqrt{13}, \quad |AB| = x\sqrt{5}.$$

Abychom zjistili objem jehlanu $ABCD$, potřebujeme určit velikost jeho tělesové výšky.

Označíme-li F střed hrany AB, vidíme, že hrana AC je kolmá na rovinu EFD, neboť $AC \perp BC \parallel EF$ a $AC \perp DE$. Rovina EFD je tedy kolmá na základnu ABC.



Obr. 9

Tělesová výška jehlanu je proto výškou (z vrcholu D) trojúhelníku DEF. Protože DF tvoří těžnici trojúhelníku ABD, ze známého vzorce pro velikost těžnice dostaneme

$$2|DF|^2 = |DA|^2 + |DB|^2 - \frac{1}{2}|AB|^2 = \frac{41}{2}x^2,$$

takže strany trojúhelníku DEF mají délky $|DF| = \frac{1}{2}x\sqrt{41}$, $|DE| = 3x$ a $|EF| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}x$. Podle Heronova vzorce je obsah S takového trojúhelníku roven

$$S = \frac{x^2}{4}\sqrt{\left(3 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{41}}{2}\right)\left(3 + \tfrac{1}{2} - \tfrac{\sqrt{41}}{2}\right)\left(3 + \tfrac{\sqrt{41}}{2} - \tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{\sqrt{41}}{2} + \tfrac{1}{2} - 3\right)} =$$
$$= \frac{x^2}{16}\sqrt{\left(7 + \sqrt{41}\right)\left(7 - \sqrt{41}\right)\left(5 + \sqrt{41}\right)\left(\sqrt{41} - 5\right)} = \frac{x^2\sqrt{2}}{2},$$

a tak má jeho výška v z vrcholu D velikost $v = \dfrac{2S}{|EF|} = 2x\sqrt{2}$. Objem V jehlanu $ABCD$ je proto roven

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC| \cdot v = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,x^3 = \frac{2\sqrt{2}}{81}\,a^3.$$

Závěr: Objem uvažovaného jehlanu je $\dfrac{2\sqrt{2}}{81}\,a^3$.

Poznámka.

Ze čtverce lze popsaným způsobem čtyřstěn $ABCD$ požadovaných vlastností vytvořit, když je součet dvou ze tří předpokládaných stěnových úhlů při vrcholu D větší než úhel třetí. Protože jejich součet je $90°$, stačí ověřit, že každý z těchto tří úhlů je menší než $45°$. Nerovnost $|\sphericalangle CDB| < 45°$ je zřejmá, zbylé dvě nerovnosti jsou důsledkem výpočtů, podle kterých $\cos|\sphericalangle ADB| = \frac{9}{\sqrt{130}} > \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $\operatorname{tg}|\sphericalangle CDA| = \operatorname{tg}(2|\sphericalangle C_1DE_1|) = \frac{3}{4} < 1$.

2. Je dán trojúhelník ABC. Uvnitř jeho stran BC, CA, AB uvažujme po řadě body K, L, M takové, že úsečky AK, BL, CM se protínají v bodě U. Jestliže trojúhelníky AMU a KCU mají obsah P a trojúhelníky MBU a CLU obsah Q, pak $P = Q$. Dokažte.

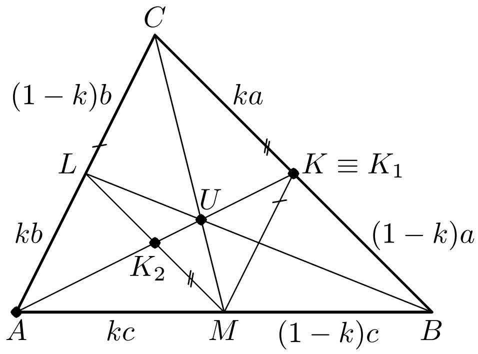
2. Z rovnosti obsahů trojúhelníků AMU a KCU plyne rovnost obsahů trojúhelníků AMC a AKC. Body K, M mají tedy stejnou vzdálenost od přímky AC. Odtud plyne, že $CA \parallel MK$ a čtyřúhelník $CAMK$ je tedy lichoběžník. Podobně dokážeme, že čtyřúhelník $BCLM$ je rovněž lichoběžník, kde $BC \parallel LM$. Trojúhelníky AML a ABC, resp. BKM a BCA jsou tedy stejnolehlé a platí (obr. 1)

$$|AL| = kb,\ |AM| = kc,\ |BM| = (1-k)c,\ |BK| = (1-k)a$$

a dále

$$|CK| = ka,\ |CL| = (1-k)b, \quad \text{kde } k \in (0;1).$$

Užitím Cèvovy věty pro trojici úseček AK, BL a CM, které se dle textu úlohy protínají



Obr. 1

v bodě U, dostáváme

$$\frac{kc}{(1-k)c} \cdot \frac{(1-k)a}{ka} \cdot \frac{(1-k)b}{kb} = 1.$$

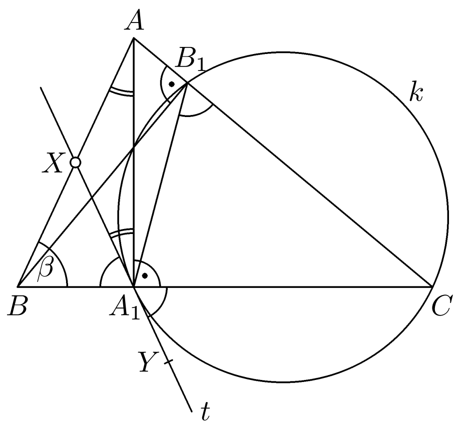
Odtud plyne $\dfrac{1-k}{k} = 1$, neboli $k = \dfrac{1}{2}$. Tyto úsečky jsou tedy těžnice a jejich průsečík U je těžištěm daného trojúhelníku. Ze shodnosti úseček AM a BM již plyne rovnost obsahů trojúhelníků AMU a BMU, tedy rovnost $P = Q$, což jsme měli dokázat.

Jiné řešení (bez užití Cèvovy věty). Stejně jako v prvním řešení ukážeme, že úsečky BC a LM jsou rovnoběžné, takže si navzájem odpovídají v jisté stejnolehlosti se středem U a zároveň i v jisté stejnolehlosti se středem A. Označme K_1, K_2 po řadě středy obou uvažovaných úseček. Vzhledem k tomu, že body K_1, K_2 si odpovídají v obou zmíněných stejnolehlostech, leží body A a U (středy obou stejnolehlostí) na přímce K_1K_2. Odtud plyne, že střed K_1 strany BC leží na přímce AU, je tedy totožný s bodem K z textu úlohy. Úsečka AK je tudíž těžnicí trojúhelníku ABC. Podobně dokážeme, že i úsečka BL je těžnicí daného trojúhelníku. Bod U je tedy jeho těžištěm. Závěr je pak stejný jako v prvním řešení.

Za úplné řešení udělte 6 bodů (z toho 5 bodů za důkaz, že U je těžištěm daného trojúhelníku).

3. *V rovině je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Paty výšek z vrcholů A, B označme po řadě A_1, B_1. Tečny kružnice opsané trojúhelníku CA_1B_1 sestrojené v bodech A_1, B_1 se protínají v bodě M. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům AMB_1, BMA_1, CA_1B_1 procházejí jedním bodem.*

Řešení. Označme k kružnici opsanou trojúhelníku CA_1B_1. V první části řešení ukážeme, že bod M z textu úlohy je středem strany AB. Protože trojúhelník ABC je ostroúhlý, leží paty A_1, B_1 příslušných výšek uvnitř odpovídajících stran. S ohledem na symetrii dané situace stačí uvažovat jen tečnu t ke kružnici k sestrojenou v bodě A_1, označit X její průsečík s přímkou AB a dokázat rovnost $|AX| = |BX|$ (obr. 1).



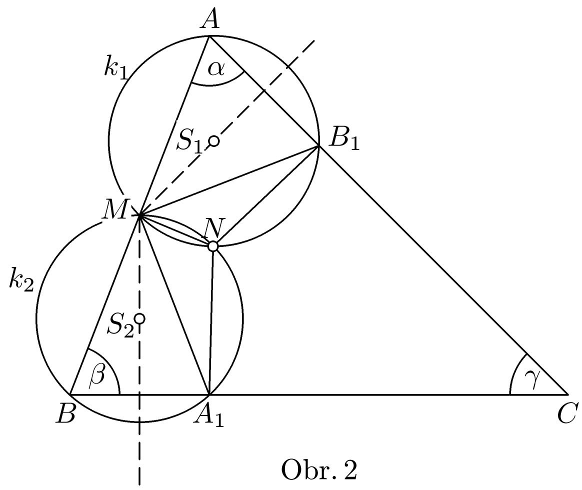
Obr. 1

Označme ještě Y libovolný vnitřní bod polopřímky opačné k polopřímce A_1X. Protože jsou oba úhly AA_1B a BB_1A pravé, je čtyřúhelník ABA_1B_1 tětivový, a tak platí $|\sphericalangle AB_1A_1| = 180° - |\sphericalangle ABA_1| = 180° - \beta$, kde jako obvykle $\beta = |\sphericalangle ABC|$. Proto má obvodový úhel A_1B_1C v kružnici k nad tětivou A_1C velikost $|\sphericalangle A_1B_1C| = 180° - |\sphericalangle AB_1A_1| = 180° - (180° - \beta) = \beta$, stejnou velikost má i příslušný úsekový úhel YA_1C.[2] Protože úhly XA_1B a YA_1C jsou vrcholové, dohromady dostáváme

[2] K pojmu úsekového úhlu a jeho shodnosti s obvodovým úhlem viz S. Horák: *Kružnice*, ŠMM 16, MF, Praha 1966, str. 3–7.

$|\sphericalangle XA_1B| = |\sphericalangle YA_1C| = |\sphericalangle A_1B_1C| = \beta$ (tyto shodné úhly jsou na obr. 1 vyznačeny obloučky). Zároveň platí i $|\sphericalangle XA_1A| = |\sphericalangle XAA_1| = 90° - \beta$. Zjistili jsme, že tečna t protne přímku AB v takovém bodě X, pro který jsou trojúhelníky BA_1X a A_1AX rovnoramenné, tj. $|BX| = |A_1X| = |AX|$.

Dokázali jsme, že bod M (průsečík tečen ke kružnici k s body dotyku A_1 a B_1) splývá se středem strany AB. Označme nyní k_1 a k_2 kružnice opsané po řadě trojúhelníkům AMB_1 a BMA_1 a S_1, S_2 jejich středy (obr. 2). Jedním průsečíkem kružnic k_1



Obr. 2

a k_2 je bod M, druhý průsečík označme N. Protože body S_1, S_2 leží v polorovině ABC, leží v ní i bod N, neboť je souměrně sdružený s M podle středné S_1S_2. Naší úlohou je dokázat, že bod N leží na jedné kružnici s body A_1, B_1 a C.

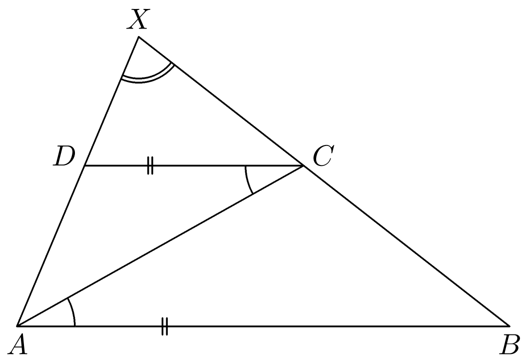
Jak už víme, je trojúhelník BA_1M rovnoramenný, a protože $|\sphericalangle BB_1M| = 90° - \alpha < \beta = |\sphericalangle BA_1M|$ (tato nerovnost je ekvivalentní tomu, že $\gamma < 90°$), leží bod B_1 vně kružnice k_2. To znamená, že kružnice k_2 musí protínat kružnici k_1 v tom jejím oblouku nad tětivou MB_1, který odpovídá obvodovému úhlu $180° - \alpha$. Analogicky zjistíme, že bod A_1 leží vně kružnice k_1, takže průsečík N leží na oblouku kružnice k_2 příslušného tětivě MA_1 a obvodovému úhlu $180° - \beta$. Protože zároveň

$$|\sphericalangle B_1NM| + |\sphericalangle A_1NM| = (180° - \alpha) + (180° - \beta) = 360° - (\alpha + \beta) = 180° + \gamma > 180°,$$

musí bod N ležet uvnitř trojúhelníku A_1B_1M (přímka A_1B_1 tedy odděluje body C a N). Protože $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (kde $\gamma = |\sphericalangle A_1CB_1|$), plyne odtud, že ve čtyřúhelníku A_1CB_1N je součet vnitřních úhlů u protilehlých vrcholů C a N roven $180°$, a tak je tento čtyřúhelník skutečně tětivový.

6. *Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky jeho ramen $|BC| = 4{,}5$ cm, $|DA| = 3$ cm a velikost $75°$ úhlu, který svírají přímky BC a AD, platí-li navíc $|AB| \cdot |CD| = |AC|^2$.*

První řešení. Rovnost ze zadání přepišme jako $|AB| : |CA| = |AC| : |CD|$. Tato úměra spolu s rovností střídavých úhlů BAC a ACD (obr. 3) znamená, že trojúhelníky



Obr. 3

BAC a ACD jsou podobné podle věty *sus*. Protože strany BC a AD si v této podobnosti odpovídají a podle zadání platí $|BC| : |AD| = 3 : 2$, platí rovněž $|AB| : |CA| = 3 : 2$ a $|AC| : |CD| = 3 : 2$. Vynásobením posledních dvou rovností dostaneme $|AB| : |CD| = 9 : 4$, takže základna AB lichoběžníku $ABCD$ je delší než základna CD. Proto se protínají polopřímky AD a BC, jejich průsečík označme X. Podle zadání má úhel CXD velikost $75°$ nebo $105°$.

Trojúhelníky ABX a DCX jsou podobné podle věty *uu* a podle předchozího platí $|AB| = \frac{9}{4}|DC|$, proto rovněž $|AX| = \frac{9}{4}|DX|$. Dosadíme-li sem za $|AX|$ součet $|AD| + |DX|$, vyjde $|DX| = \frac{4}{5}|AD| = 2{,}4$ cm. Analogicky $|CX| = \frac{4}{5}|BC| = 3{,}6$ cm.

Konstrukce:
1. Trojúhelník CDX: $|DX| = 2{,}4$ cm, $|CX| = 3{,}6$ cm, $|\sphericalangle DXC| \in \{75°, 105°\}$,
2. bod A: A leží na polopřímce opačné k DX, $|AD| = 3$ cm,
3. bod B: B leží na polopřímce opačné k CX, $|BC| = 4{,}5$ cm.

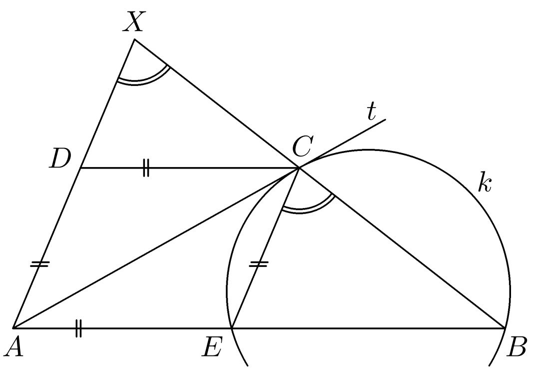
Nyní je třeba ukázat, že takto sestrojený čtyřúhelník $ABCD$ má všechny požadované vlastnosti (tj. provést *důkaz správnosti* konstrukce). Předně body 2 a 3 konstrukce zaručují, že strany BC a AD mají předepsané délky. Podle bodu 1 svírají přímky BC a AD předepsaný úhel a platí

$$|AX| = |AD| + |DX| = 5{,}4\,\mathrm{cm} \quad \text{a} \quad |BX| = |BC| + |CX| = 8{,}1\,\mathrm{cm},$$

a tak je poměr $|AX| : |BX|$ roven $2 : 3$ stejně jako poměr $|DX| : |CX|$. Trojúhelníky ABX a DCX jsou tudíž stejnolehlé, proto jsou úsečky AB a CD rovnoběžné. Tak jsme ověřili, že $ABCD$ je lichoběžník se základnami AB, CD. Z rovnosti poměrů $|AX| : : |BX| = 2 : 3 = |CX| : |AX|$ plyne podobnost trojúhelníků ABX a CAX (se společným úhlem při vrcholu X), takže úhly ABX a CAX (neboli úhly ABC a CAD) jsou shodné. Protože jsou shodné rovněž (střídavé) úhly BAC a ACD, podle věty *uu* zjišťujeme, že jsou podobné trojúhelníky ABC a CAD. Proto platí $|AB| : |CA| = |AC| : |CD|$, tudíž $|AB| \cdot |CD| = |AC|^2$. (Poslední rovnost lze dokázat také tak, že délky úseček AB, CD a AC vyjádříme podle kosinové věty pro trojúhelníky ABX, CDX resp. ACX.) Všechny požadované vlastnosti sestrojeného čtyřúhelníku $ABCD$ jsou tak ověřeny.

Druhé řešení. Zadaná rovnost $|AB| \cdot |CD| = |AC|^2$ evokuje otázku, zda nelze úlohu řešit pomocí tvrzení o mocnosti bodu ke kružnici (viz návodnou úlohu níže). Ukažme, že je tomu skutečně tak.

Předpokládejme nejprve, že $|AB| > |CD|$ a označme X průsečík polopřímek AD a BC. Vhodným bodem E základny AB doplňme trojúhelník ACD na rovnoběžník $AECD$ (obr. 4).[4] Všimněme si, že v trojúhelníku BCE známe délky stran BC,



Obr. 4

EC ($|EC| = |AD|$) a velikost úhlu BCE ($|\sphericalangle BCE| = |\sphericalangle CXD|$). Opišme tomuto trojúhelníku kružnici a označme ji k. Protože $|AE| = |CD|$, lze zadanou rovnost $|AB| \cdot |CD| = |AC|^2$ zapsat jako $|AB| \cdot |AE| = |AC|^2$. Podle tvrzení z návodné úlohy to znamená, že přímka AC je tečnou ke kružnici k. Tím je rozbor případu $|AB| > |CD|$

[4] To je dosti obvyklý obrat v situaci, kdy jsou dány délky ramen lichoběžníku a úhel, který tato ramena svírají.

ukončen. V případě $|AB| < |CD|$ stačí v rozboru provést dvě změny: bod X je průsečíkem polopřímek DA a CB, bod E leží na polopřímce opačné k BA (nikoliv na základně AB).

Konstrukce:
1. Trojúhelník BCE: $|BC| = 4{,}5\,\mathrm{cm}$, $|EC| = 3\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle BCE| \in \{75°, 105°\}$,
2. kružnice k opsaná trojúhelníku BCE,
3. tečna t ke kružnici k v bodě C,
4. bod A: $A \in BE \cap t$,
5. bod D: $AECD$ je rovnoběžník.

(Protože dle zadání platí $|BC| > |EC|$, padne bod A při konstrukci podle bodu 4 na polopřímku opačnou k EB. Bod E bude tedy náležet úsečce AB, takže nastane případ $|AB| > |CD|$.)

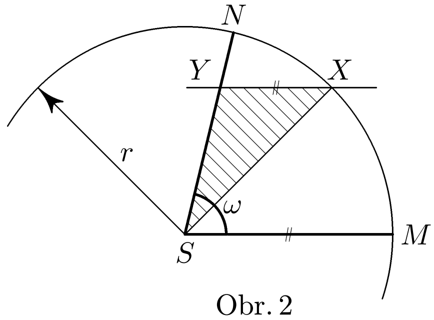
Při důkazu správnosti konstrukce opět využijeme tvrzení z návodné úlohy (v opačném „směru", než tomu bylo v rozboru): protože je přímka AC tečnou kružnice k, platí rovnost $|AB| \cdot |AE| = |AC|^2$. Zbytek důkazu je triviální.

Návodná úloha:
Je-li kružnice k opsána trojúhelníku KLT a leží-li bod M na přímce KL vně úsečky KL, pak rovnost $|MK| \cdot |ML| = |MT|^2$ platí, právě když je přímka MT tečnou kružnice k. Dokažte. [S. Horák: *Kružnice*, ŠMM 16, MF, Praha 1966, str. 45–48.]

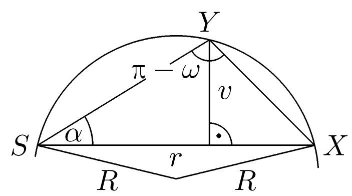
3. Je dána kružnice $k(S, r)$ a na ní body M, N takové, že úhel MSN je ostrý. Libovolným bodem X menšího z oblouků MN veďme rovnoběžku s přímkou MS a označme Y její průsečík s úsečkou SN. Sestrojte takový bod X, pro který je obsah trojúhelníku SXY maximální.

3. Ve všech řešeních značíme $\omega = |\sphericalangle MSN|$.

Řešení 1. Z rovnoběžnosti přímek SM a XY plyne rovnost $|\sphericalangle SYX| = \pi - \omega$ (obr. 2). Proto se všechny uvažované trojúhelníky SXY shodují nejen v délce strany SX (rovné poloměru r kružnice k) ale i ve velikosti protilehlého vnitřního úhlu SYX. Kružnice opsané všem trojúhelníkům SXY mají tedy týž poloměr R (rovný $\dfrac{r}{2\sin\omega}$), a bod Y leží vždy na tom jejich oblouku, ze kterého je tětiva SX délky r vidět pod úhlem $\pi - \omega$. Výška v ke straně SX trojúhelníku SYX tudíž zřejmě nepřevyšuje výšku kruhové úseče z obr. 3, přitom je rovna této výšce, právě když platí $|SY| = |XY|$. Proto má ze všech trojúhelníků SXY největší obsah právě ten, který má shodné strany SY a XY. Jeho vnitřní úhel α u vrcholu S je shodný s vnitřním úhlem u vrcholu X, a tak platí $2\alpha + (\pi - \omega) = \pi$, odkud $\alpha = \frac{1}{2}\omega$, což znamená, že polopřímka SX je osou úhlu MSN. Průsečík této osy s kružnicí k proto určuje hledaný bod X.



Obr. 2



Obr. 3

Dodejme, že maximální výšku v trojúhelníku SXY ke straně SX lze určit i jiným postupem (bez úvah o kruhové úseči): označíme-li Y_0 patu výšky z vrcholu Y, $\alpha = |\sphericalangle XSY|$ a $\beta = |\sphericalangle SXY|$, potom platí

$$v \cdot \operatorname{cotg}\alpha + v \cdot \operatorname{cotg}\beta = |SY_0| + |XY_0| = |SX| = r,$$

odkud s ohledem na to, že $\alpha + \beta = \omega$ a že funkce cotg je v intervalu $(0, \frac{1}{2}\pi)$ konvexní, vychází odhad

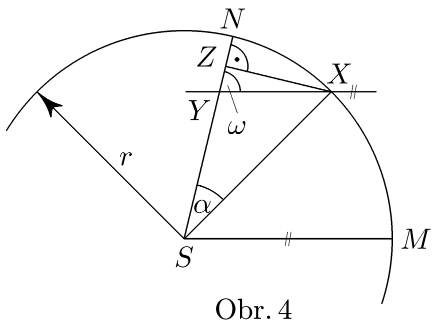
$$v = \frac{r}{\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta} \leqq \frac{r}{2\operatorname{cotg}\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{r}{2\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}} = \frac{r}{2}\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}.$$

Řešení 2. Označme $p = |XY|$ a $q = |SY|$. Podle kosinové věty pro trojúhelník SXY platí $r^2 = p^2 + q^2 + 2pq \cdot \cos\omega$, neboť $|\sphericalangle SYX| = \pi - \omega$. Vypsanou rovnost upravíme do tvaru $r^2 = (p-q)^2 + 2pq(1 + \cos\omega)$, z něhož už snadno odhadneme velikost součinu pq shora:

$$pq = \frac{r^2 - (p-q)^2}{2(1+\cos\omega)} \leqq \frac{r^2}{2(1+\cos\omega)},$$

přitom rovnost nastane, právě když $p = q$. To je i podmínka, za které je obsah $\frac{1}{2}pq\sin\omega$ trojúhelníku SXY maximální. Došli jsme tak ke stejnému závěru jako při prvním řešení.

Řešení 3. Vyjádřeme obsah trojúhelníku SXY jako funkci úhlu $\alpha = |\sphericalangle XSN|$ a zjistěme její největší hodnotu v intervalu $0 < \alpha < \omega$. Při označení z obr. 4 platí $|XZ| = |SX| \sin\alpha = r \sin\alpha$; protože $|\sphericalangle SYX| = \pi - \omega$ a $|\sphericalangle SXY| = \omega - \alpha$, ze sinové



Obr. 4

věty pro trojúhelník SXY vychází

$$|SY| = |SX| \cdot \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin\omega} = r \cdot \frac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin\omega}.$$

Pro obsah P trojúhelníku SXY tak dostáváme vyjádření

$$P = \frac{|SY| \cdot |XZ|}{2} = \frac{r^2 \sin\alpha \sin(\omega - \alpha)}{2 \sin\omega} = \frac{r^2 \big(\cos(2\alpha - \omega) - \cos\omega\big)}{4 \sin\omega}$$

(využili jsme vzorec $2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$ pro $x = \alpha$ a $y = \omega - \alpha$). Proto pro hodnotu P platí horní odhad

$$P \leqq \frac{r^2(1 - \cos\omega)}{4 \sin\omega} \quad \left(= \frac{r^2}{4} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}\right),$$

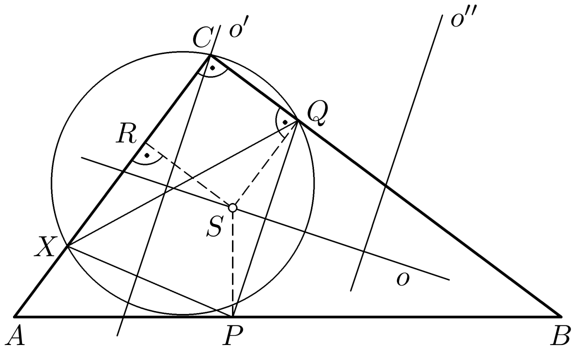
přitom rovnost nastane právě v případě, kdy $\cos(2\alpha - \omega) = 1$, což je v naší situaci splněno jedině pro $\alpha = \frac{1}{2}\omega$ (z nerovností $0 < \alpha < \omega$ totiž plyne odhad $|2\alpha - \omega| < \omega$).

Za úplné řešení je 6 bodů. Vyjádření obsahu trojúhelníku SXY jako explicitní funkce některé (jedné!) z vhodných proměnných ($|\sphericalangle XSN|$, $|YS|$, $|XY|$) oceňte 3 body. Za povšimnutí, že všechny trojúhelníky SXY mají stejný úhel při vrcholu Y, udělte 1 bod.

2. *V rovině je dán trojúhelník PQX, kde $|PQ| = 3$ cm, $|PX| = 2{,}6$ cm, $|QX| = 3{,}8$ cm. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC tak, aby se jemu vepsaná kružnice dotýkala přepony AB v bodě P, odvěsny BC v bodě Q a aby bod X ležel na přímce AC.*

(J. Šimša)

Řešení. Označme ještě R bod dotyku s odvěsnou AC a S střed zmíněné kružnice (obr. 1). Protože $SQCR$ je čtverec a bod S leží na ose o úsečky PQ, leží bod C na přímce o', která je obrazem osy o v otočení kol bodu Q o pravý úhel. Vrchol C proto sestrojíme jako průsečík přímky o' s Thaletovou kružnicí τ nad průměrem QX. Zbytek konstrukce je zřejmý.

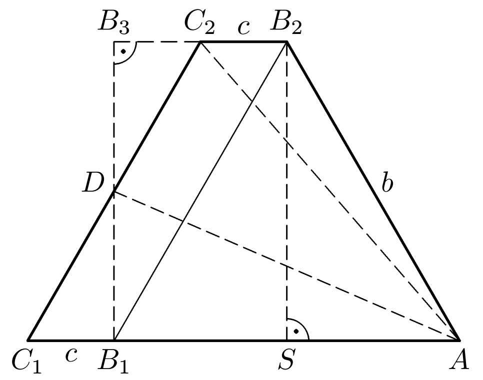


Obr. 1

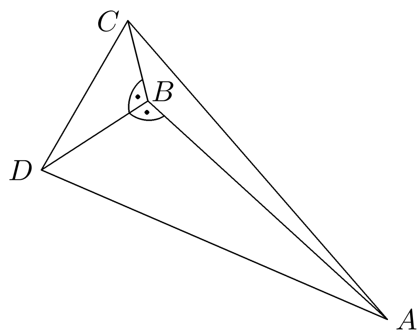
Úloha má (pro dané body P, Q, X) jediné řešení. I když osu o můžeme kol bodu Q otočit o pravý úhel dvěma způsoby, jedna z otočených přímek o'' kružnici τ vůbec neprotne; druhá z nich má s kružnicí τ sice dva společné body, ale jednomu z nich odpovídá takový trojúhelník ABC, že místo kružnice vepsané má požadované vlastnosti kružnice *připsaná* přeponě AB (bod Q jejího dotyku s přímkou BC neleží na odvěsně BC, ale na jejím prodloužení za vrchol B).

5. *Z papíru byl vystřižen rovnoramenný lichoběžník $C_1AB_2C_2$ s kratší základnou B_2C_2. Patu kolmice ze středu D ramena C_1C_2 na základnu AC_1 označíme B_1. Po přehnutí papíru podél úseček DB_1, AD a AC_2 se body C_1, C_2 přemístily v prostoru do jednoho bodu C a body B_1, B_2 do bodu B. Vznikl tak model čtyřstěnu $ABCD$ s objemem $64\,\mathrm{cm}^3$. Určete délky stran původního lichoběžníku.* *(P. Leischner)*

Řešení. Z rovnosti úseček, jež v popsané síti odpovídají týmž hranám výsledného čtyřstěnu $ABCD$, dostáváme, že $|AB_1| = |AB_2| = |AB| = b$, $|B_1C_1| = |B_2C_2| = |BC| = c$. Označme S střed úsečky AB_1 a B_3 patu kolmice z bodu D na přímku B_2C_2 (obr. 2). Trojúhelníky B_1C_1D a B_3C_2D jsou středově souměrné podle bodu D, proto $|B_3C_2| = |B_1C_1| = c$. Protože lichoběžník $C_1AB_2C_2$ je rovnoramenný, je rovnoramenný i trojúhelník B_1AB_2 (vzhledem k předchozím rovnostem je dokonce rovnostranný), a z obdélníku $B_1SB_2B_3$ tak plyne $\frac{1}{2}b = |B_1S| = |B_2B_3| = 2c$, takže $b = 4c$.



Obr. 2



Obr. 3

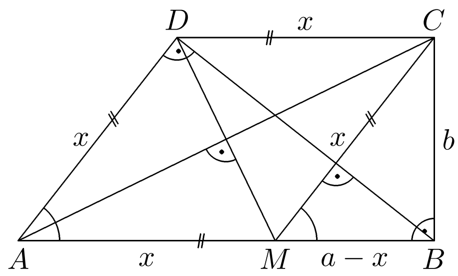
Nyní si už jen uvědomíme, že sestavený čtyřstěn $ABCD$ bude mít dvě pravoúhlé stěny CDB a ADB s pravými úhly při vrcholu B (obr. 3), což znamená, že hrana BD bude kolmá ke stěně ABC. Přitom výška v trojúhelníku ABC (neboli trojúhelníku AB_2C_2) na stranu BC je zároveň výškou B_2S rovnostranného trojúhelníku B_1AB_2, takže $v = \frac{1}{2}\sqrt{3}b$ a zároveň $|BD| = |B_1D| = \frac{1}{2}v$. Objem V čtyřstěnu $ABCD$ tedy spočteme jako

$$V = \frac{1}{3}S(ABC)|BD| = \frac{1}{3}S(AB_2C_2)\cdot\frac{1}{2}v = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}cv\cdot\frac{1}{2}v = \\ = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}b\cdot v^2 = \frac{1}{4^3}b^3,$$

takže $b = \sqrt[3]{64^2}\,\mathrm{cm} = 16\,\mathrm{cm}$.

2. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnou AB délky a, v němž oba úhly ABC, ADB jsou pravé. Na straně AB leží bod M tak, že úsečka MD je kolmá na AC a úsečka MC je kolmá na BD. Určete délky ostatních stran lichoběžníku.

2. Úsečky MC a AD jsou rovnoběžné (obě jsou totiž kolmé k úsečce BD, obr. 1); protože jsou rovnoběžné i úsečky AM a DC, je čtyřúhelník $AMCD$ rovnoběžník. Je to



Obr. 1

dokonce kosočtverec, neboť jeho úhlopříčky jsou dle zadání navzájem kolmé. Označme proto $x = |CD| = |DA| = |AM| = |MC|$, zřejmě $a > x$. Pak $|MB| = a - x$ a ze shodnosti souhlasných úhlů DAM a CMB plyne podobnost pravoúhlých trojúhelníků ABD a MCB, takže platí úměra $|AD| : |AB| = |MB| : |MC|$, neboli $x : a = (a - x) : x$. Odtud pro neznámou délku x vychází kvadratická rovnice $x^2 + ax - a^2 = 0$, která má jediné kladné řešení $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\,a$. Tak jsme vypočetli (shodné) délky základny CD a ramena AD daného lichoběžníku; zbývá určit délku ramena BC. Podle Pythagorovy věty pro trojúhelník CMB dostáváme

$$|BC| = \sqrt{|MC|^2 - |MB|^2} = \sqrt{x^2 - (a - x)^2} = \sqrt{a(2x - a)} = a\sqrt{\sqrt{5} - 2},$$

neboť $2x - a = a\bigl(\sqrt{5} - 2\bigr)$.

Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 3 body za odvození rovnosti $|AD| = |AM|$.

51. ROČNÍK MATEMATICKÉ OLYMPIÁDY

Úlohy domácího kola kategorie A

1. *Je-li S obsah trojúhelníku o stranách a, b, c a T obsah trojúhelníku o stranách $a+b$, $b+c$, $c+a$, pak platí $T \geqq 4S$. Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost.*

ŘEŠENÍ. Vyjádření obsahu S obecného trojúhelníku z délek jeho stran a, b, c je dáno Heronovým vzorcem

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \text{kde} \quad s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Bez označení s pro poloviční obvod je zápis Heronova vzorce poněkud delší:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}. \tag{1}$$

Udělejme malou odbočku a všimněme si, jak Heronův vzorec nepřímo „testuje“ známé nerovnosti, které zaručují existenci trojúhelníku: *Čísla a, b, c jsou délkami stran některého trojúhelníku, právě když všichni činitelé pod odmocninou ve vzorci* (1) *jsou kladní.*

Podle vzorce (1) je obsah T trojúhelníku o stranách $a+b$, $b+c$, $c+a$ roven

$$T = \frac{1}{4}\sqrt{(2a+2b+2c)(2c)(2a)(2c)} = \sqrt{abc(a+b+c)}.$$

Dokazovanou nerovnost $T \geqq 4S$ tudíž rozepíšeme jako

$$\sqrt{abc(a+b+c)} \geqq \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)};$$

v ekvivalentní nerovnosti mezi odmocňovanými výrazy zkrátíme činitel $(a+b+c)$ a dostaneme tak nerovnost

$$abc \geqq (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c), \tag{2}$$

kterou nyní (pro strany a, b, c obecného trojúhelníku) několika způsoby dokážeme.

Při prvním z nich využijeme zřejmých nerovností

$$\begin{aligned} a^2 &\geqq a^2-(b-c)^2 = (a-b+c)(a+b-c),\\ b^2 &\geqq b^2-(c-a)^2 = (b-c+a)(b+c-a),\\ c^2 &\geqq c^2-(a-b)^2 = (c-a+b)(c+a-b). \end{aligned} \tag{3}$$

Protože jde o tři nerovnosti mezi kladnými výrazy, součin jejich levých stran není menší než součin jejich pravých stran:

$$a^2b^2c^2 \geqq (b+c-a)^2(a+c-b)^2(a+b-c)^2,$$

odkud po odmocnění dostaneme nerovnost (2). Tím je nerovnost $T \geqq 4S$ dokázána. Z našeho postupu rovněž plyne, že rovnost $T = 4S$ nastane, právě když budou splněny současně tři rovnosti

$$a^2 = a^2 - (b-c)^2,\ b^2 = b^2 - (c-a)^2,\ c^2 = c^2 - (a-b)^2,$$

tj. právě když bude platit $a = b = c$ (případ rovnostranného trojúhelníku).

Poznamenejme, že důkazu (2) jsme dosáhli vynásobením tří analogických nerovností (3). První z nich po odmocnění obou stran získá tvar nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem (kladných) čísel $u = a + b - c$ a $v = a - b + c$:

$$a = \frac{(a+b-c)+(a-b+c)}{2} \geqq \sqrt{(a+b-c)(a-b+c)},$$

Využít takovou AG-nerovnost vás možná napadne, když dokazovanou nerovnost (2) přepíšete z původních proměnných a, b, c do nových proměnných

$$u = a + b - c > 0,\ v = a - b + c > 0,\ w = -a + b + c > 0.$$

Protože $a = \frac{1}{2}(u+v)$, $b = \frac{1}{2}(u+w)$ a $z = \frac{1}{2}(v+w)$, přejde nerovnost (2) v nerovnost

$$(u+v)(u+w)(v+w) \geqq 8uvw \tag{2'}$$

a souvislost s AG-nerovnostmi

$$\frac{u+v}{2} \geqq \sqrt{uv},\ \frac{u+w}{2} \geqq \sqrt{uw},\ \frac{v+w}{2} \geqq \sqrt{vw}$$

je nasnadě. Dokázat transformovanou nerovnost (2′) můžeme ovšem i užitím jediné AG-nerovnosti: po roznásobení levé strany (2′) a zřejmé úpravě dostaneme

$$\frac{u^2v + u^2w + v^2u + v^2w + w^2u + w^2v}{6} \geqq uvw,$$

což je AG-nerovnost pro skupinu šesti členů

$$u^2v,\ u^2w,\ v^2u,\ v^2w,\ w^2u,\ w^2v,$$

neboť jejich geometrický průměr je roven $\sqrt[6]{u^2v \cdot u^2w \cdot v^2u \cdot v^2w \cdot w^2u \cdot w^2v} = uvw$.

Na závěr uveďme ještě jeden algebraický důkaz nerovnosti (2). S ohledem na symetrii předpokládejme, že $a \leqq \min\{b, c\}$, položme $x = b - a \geqq 0$, $y = c - a \geqq 0$ a přepišme nerovnost (2) jako nerovnost pro mnohočlen proměnné a s koeficienty závislými na x a y:

$$\begin{aligned}
&abc - (b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) = \\
&= a(a+x)(a+y) - (a+x+y)(a+y-x)(a+x-y) = \\
&= a[a^2 + a(x+y) + xy] - [a + (x+y)][a^2 - (x-y)^2] = \\
&= [a^3 + a^2(x+y) + axy] - [a^3 + a^2(x+y) - a(x-y)^2 - (x+y)(x-y)^2] = \\
&= a[xy + (x-y)^2] + (x+y)(x-y)^2.
\end{aligned}$$

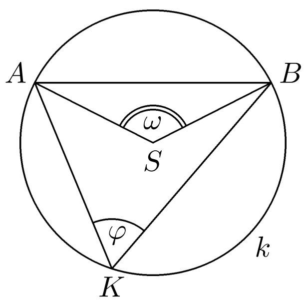
Poslední výraz je (vzhledem k tomu, že $a > 0$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$) zřejmě nezáporný, přičemž nule se rovná, právě když platí $xy = 0$ a $x - y = 0$, neboli $x = y = 0$.

3. *V daném trojúhelníku ABC protíná osa úhlu ACB stranu AB v bodě K a kružnici opsanou v bodě L $(L \neq C)$. Označme V střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC, S střed kružnice opsané trojúhelníku KBV a Z průsečík přímek AB a SL. Dokažte, že přímka SK je tečnou kružnice opsané trojúhelníku KLZ.*

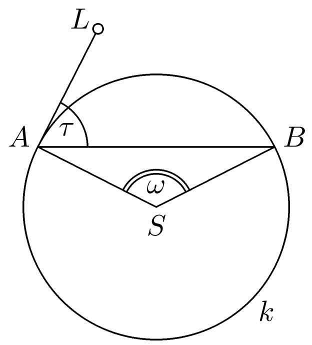
Řešení. Skutečnost, že některá přímka je tečnou některé kružnice, ověřujeme často pomocí důležité planimetrické poučky o tzv. *úsekovém úhlu*, ta však nepatří k běžnému gymnaziálnímu učivu. Proto se o ní zmíníme před vlastním řešením úlohy.

Obrázek 1a ilustruje známý školský poznatek o obvodových a středových úhlech: *Velikost ω středového úhlu ASB kružnice k je rovna dvojnásobku velikosti φ příslušného obvodového úhlu AKB.* Na obrázku 1b je kromě kružnice k o středu S a její tětivy AB nakreslena ještě úsečka LA, která svírá s tětivou AB úhel velikosti τ. Z rovnoramenného trojúhelníku ABS se základnou AB plyne, že úhel SAB má velikost $\frac{1}{2}(180° - \omega) = 90° - \frac{1}{2}\omega$, a proto úhel SAL má velikost $(90° - \frac{1}{2}\omega) + \tau$. Přímka LA je tečnou kružnice k, pokud je úhel SAL pravý, tedy pokud platí

$$\left(90° - \frac{1}{2}\omega\right) + \tau = 90°, \quad \text{neboli} \quad \omega = 2\tau.$$

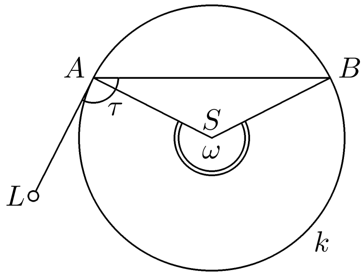


Obr. 1a

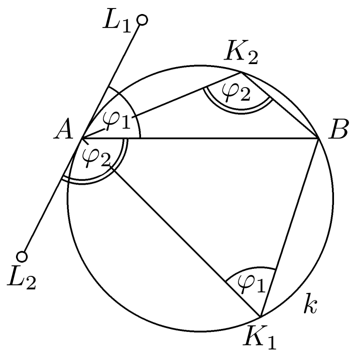


Obr. 1b

Stejná podmínka $\omega = 2\tau$ se podobně odvodí i v případě z obr. 1c, kdy středový úhel ω je větší než 180°. V obou situacích se úhel LAB mezi *úsekem* LA tečny a tětivou AB nazývá *úsekový úhel.* Jak jsme právě dokázali, *velikost* ω *středového úhlu* ASB *je rovna dvojnásobku velikosti* τ *úsekového úhlu* LAB. V důsledku uvedených vět platí tvrzení o shodnosti obvodových a úsekových úhlů, pokud tyto dva úhly vybíráme v opačných polorovinách vyťatých přímkou, na které leží dotyčná tětiva kružnice (obr. 1d). Protože velikost úsekového úhlu polohu příslušné tečny jednoznačně určuje, využijeme při řešení dané úlohy shodnost obvodového a úsekového úhlu ve formě této implikace: *Jsou-li dány tři různé body* A, B, K *téže kružnice* k *a vnitřní bod* L *poloroviny opačné k polorovině* ABK *a jsou-li úhly* AKB *a* LAB *shodné, pak přímka* LA *je tečnou kružnice* k.



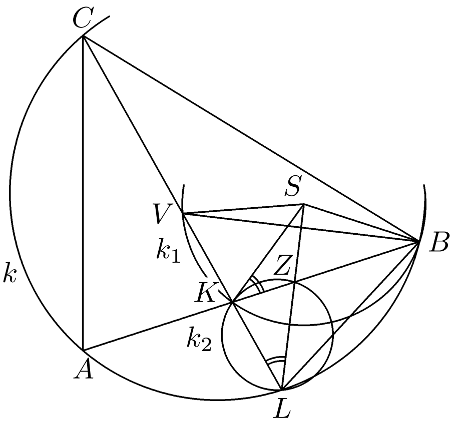
Obr. 1c



Obr. 1d

Situace z naší úlohy je znázorněna na obr. 2. Kružnice opsané trojúhelníkům ABC, KBV a KLZ jsou označeny po řadě k, k_1 a k_2. Naší úlohou je dokázat, že přímka SK je tečnou kružnice k_2; k tomu podle předchozího odstavce stačí vysvětlit, proč jsou shodné úhly SKZ a KLZ, vyznačené na obr. 2 obloučky. Kromě toho ovšem musíme zdůvodnit, proč body L a S vždy leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou AB (jak je tomu v případě našeho obrázku).

Střed V kružnice vepsané je vždy vnitřním bodem trojúhelníku ABC, neboť je průsečíkem os jeho vnitřních úhlů. Proto je bod V vnitřním bodem úsečky CK, za-



Obr. 2

tímco bod L leží na jejím prodloužení za bod K. Body V a L proto leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou AB. Označíme-li jako obvykle α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC, má trojúhelník BCV u vrcholů B a C vnitřní úhly velikostí $\frac{1}{2}\beta$ a $\frac{1}{2}\gamma$, takže pro jeho vnější úhel při vrcholu V platí

$$|\sphericalangle BVK| = \frac{\beta+\gamma}{2} < 90^\circ.$$

Úhel BVK je tudíž ostrý, a proto střed S kružnice k_1 leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou BK jako bod V, což spolu s předchozím tvrzením o poloze bodů V a L znamená, že body L a S skutečně leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou AB, jak jsme potřebovali ověřit. Podle věty o obvodových a středových úhlech v kružnici k_1 platí

$$|\sphericalangle BSK| = 2 \cdot |\sphericalangle BVK| = \beta + \gamma,$$

z rovnoramenného trojúhelníku BKS tudíž plyne

$$|\sphericalangle SKZ| = |\sphericalangle SKB| = \frac{1}{2}(180^\circ - |\sphericalangle BSK|) = \frac{1}{2}(180^\circ - \beta - \gamma) = \frac{1}{2}\alpha.$$

Zbývá nám proto dokázat, že také úhel KLZ má velikost $\frac{1}{2}\alpha$. Provedeme to dvěma nezávislými postupy.

Při prvním z nich nejprve určíme velikost úhlu LBV. Protože $|\sphericalangle LBA| = |\sphericalangle LCA| = \frac{1}{2}\gamma$ (obvodové úhly v kružnici k) a $|\sphericalangle ABV| = \frac{1}{2}\beta$, vzhledem k vzájemné poloze úseček LV a AB můžeme psát

$$|\sphericalangle LBV| = |\sphericalangle LBA| + |\sphericalangle ABV| = \frac{1}{2}(\beta+\gamma).$$

Již dříve jsme zjistili, že takovou velikost má i úhel BVK (neboli úhel BVL), a tak je trojúhelník BVL rovnoramenný: $|BL| = |VL|$. Zároveň ovšem platí $|BS| = |VS|$, takže oba body L a S leží na ose úsečky BV (čtyřúhelník $BLVS$ je tedy deltoid, případně kosočtverec nebo čtverec). Odtud plyne, že úsečky BV a SL jsou navzájem kolmé, úhel KLZ je proto doplňkový k úhlu BVK:

$$|\sphericalangle KLZ| = 90^\circ - |\sphericalangle BVK| = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma) = \tfrac{1}{2}\alpha.$$

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Při druhém způsobu určení velikosti úhlu KLZ si nejdříve všimneme, že platí $|\sphericalangle BLK| = |\sphericalangle BLC| = |\sphericalangle BAC| = \alpha$ (obvodové úhly v kružnici k), což spolu s dříve odvozenou rovností $|\sphericalangle BSK| = \beta + \gamma$ znamená, že ve čtyřúhelníku $BLKS$ je součet vnitřních úhlů u protějších vrcholů L a S roven 180°, jedná se proto o čtyřúhelník, kterému lze opsat kružnici. V ní jsou KBS a KLS shodné obvodové úhly nad tětivou KS, a proto platí

$$|\sphericalangle KLZ| = |\sphericalangle KLS| = |\sphericalangle KBS| = \tfrac{1}{2}\alpha$$

(připomínáme, že BKS je rovnoramenný trojúhelník s úhly $\frac{1}{2}\alpha$ při základně BK).

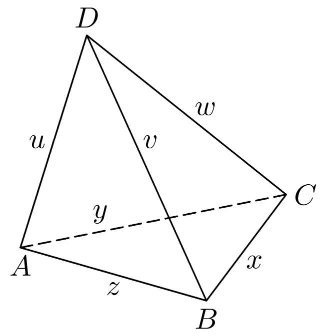
6. *Najděte všechny čtyřstěny, které mají síť tvaru deltoidu a právě čtyři hrany dané délky a. (Deltoidem rozumíme konvexní čtyřúhelník souměrný podle jediné ze svých úhlopříček; nepatří k nim tedy ani čtverec, ani kosočtverec.)*

Řešení. V první (podstatnější) části řešení najdeme všechny čtyřstěny, které mají síť tvaru deltoidu; poté již poměrně snadno zjistíme, které z nalezených čtyřstěnů mají právě čtyři shodné hrany.

Uvažujme proto libovolný čtyřstěn $ABCD$ a popišme délky jeho hran písmeny x, y, z, u, v, w podle obr. 3. Všechny sítě čtyřstěnu $ABCD$ rozdělíme do dvou skupin. Do první z nich zařadíme ty sítě, v nichž některá stěna čtyřstěnu sousedí s třemi ostatními stěnami;

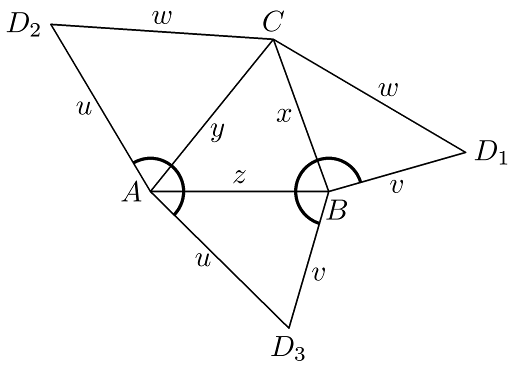
do druhé skupiny budou patřit ostatní sítě, v nichž každá stěna sousedí s nejvýše dvěma stěnami. Protože jsme označení vrcholů čtyřstěnu předem nijak neupřesnili, budeme dále uvažovat jen po jedné síti z každé z obou skupin, totiž sítě znázorněné na obr. 4 a 5. Zabývejme se každou z nich samostatně.

Síť na obr. 4 je (obecně vzato) šestiúhelníkem $AD_3BD_1CD_2$, o čtyřúhelník půjde jedině tehdy, když dva z jeho úhlů u vrcholů A, B, C budou přímé (tj. budou mít velikost 180°). Je totiž jasné, že přímý úhel nemůže být u žádného z vrcholů D_1, D_2, D_3. S ohledem na již zmíněnou libovůli značení předpokládejme, že přímé jsou úhly D_2AD_3 a D_3BD_1 (vyznačené na obr. 4). Naše síť je tehdy čtyřúhelníkem $D_2D_3D_1C$, jehož strany mají (v pořadí, v jakém za sebou cyklicky následují) délky $2u$, $2v$, w a w. Je-li tento čtyřúhelník deltoid (a ne kosočtverec), musí zřejmě platit $u = v$ a $2u \neq w$ (obr. 6a). Z osové souměrnosti podle přímky D_3C pak zjišťujeme, že platí $y = x$; čtyřstěn s „deltoidní“ sítí z obr. 6a vidíte na obr. 6b. Je to čtyřstěn souměrný podle roviny souměrnosti hrany AB. Dodejme, že kromě nerovnosti $2u \neq w$ musí platit rovněž nerovnost $z < w$, která plyne z vlastnosti střední příčky AB trojúhelníku $D_1D_2D_3$ a trojúhelníkové nerovnosti pro rovnoramenný trojúhelník CD_1D_2:

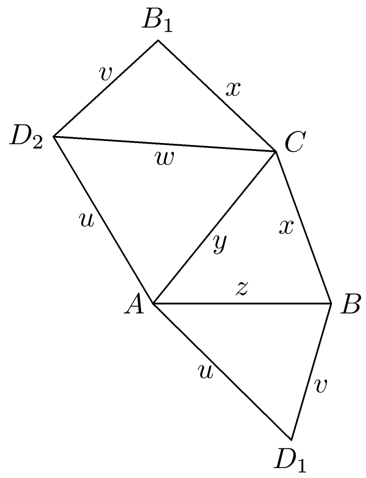


Obr. 3

$$2z = 2|AB| = |D_1D_2| < |D_1C| + |D_2C| = 2w.$$



Obr. 4



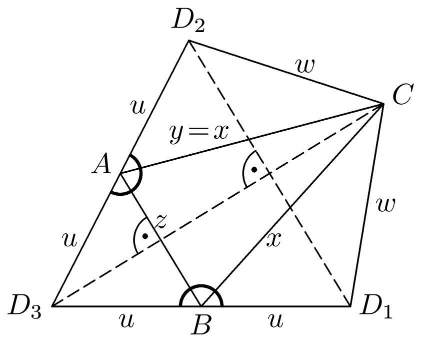
Obr. 5

Síť z obr. 5 je (obecně vzato) šestiúhelníkem $AD_1BCB_1D_2$, o čtyřúhelník půjde jen v těch případech, kdy právě dva z jeho úhlů při vrcholech A, B, C, D_2 budou přímé (takové totiž nemohou být úhly při vrcholech D_1 a B_1). S ohledem na libovůli značení stačí uvažovat jen tři následující případy.

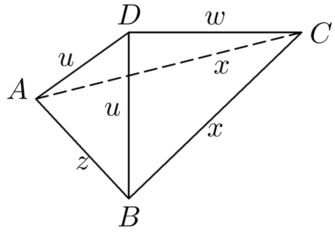
a) *Přímé úhly u vrcholů A a D_2.* Síť je čtyřúhelník B_1D_1BC, jehož strany mají v pořadí délky $2u+v$, v, x, x. Zřejmě nejde o deltoid, neboť $2u+v \neq v$.

b) *Přímé úhly u vrcholů A a C.* Síť je čtyřúhelník $D_2D_1BB_1$, jehož strany mají v pořadí délky $2u$, v, $2x$, v. Protože dvojice protějších stran má tutéž délku v, nejde o deltoid.

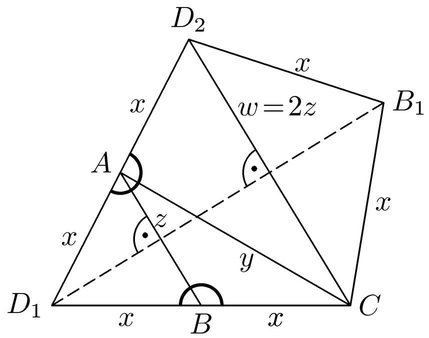
c) *Přímé úhly u vrcholů A a B.* Síť je čtyřúhelník $D_2D_1CB_1$, jehož strany mají v pořadí délky $2u$, $x+v$, x, v. Jde-li o deltoid, pak s ohledem na nerovnost $x+v > x$ musí platit $2u = x+v$ a $x = v$, tedy $x = u = v$. V trojúhelníku D_2D_1C je úsečka AB střední příčkou (obr. 7a), takže platí $w = |D_2C| = 2|AB| = 2z$. Příslušný čtyřstěn vidíte na obr. 7b.



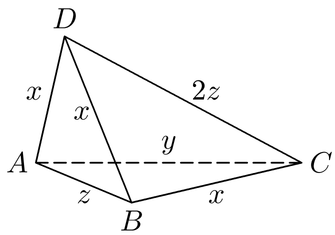
Obr. 6a



Obr. 6b



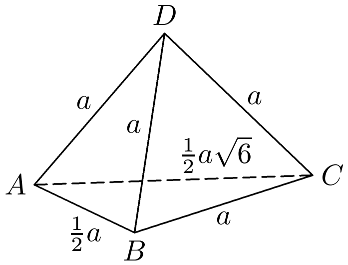
Obr. 7a



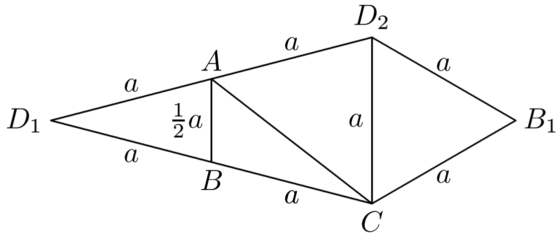
Obr. 7b

Shrňme výsledky našich dosavadních úvah: Pouze dva typy čtyřstěnů (obr. 6b a 7b) mají síť tvaru deltoidu. Naším úkolem je nyní zjistit, kdy tyto čtyřstěny mají právě čtyři shodné hrany (dané délky a). Zabývejme se nejdříve čtyřstěnem z obr. 6b, jehož hrany mají délky x, x, z, u, u, w. Předpokládejme tedy, že právě čtyři z nich jsou rovny a, které to jsou? Předně musí platit $x = a$, jinak by muselo platit $a = z = u = w$, což je ale ve sporu s nerovností $z < w$, odvozenou výše. Protože jsou vyloučeny i rovnosti $z = u$ a $u = w$ (v obou případech by délku a mělo *pět* hran čtyřstěnu $ABCD$), musí platit $u = a$. V případě $x = u$ je ovšem čtyřúhelník AD_3BC kosočtverec;

z rovnoběžnosti přímek AC a D_3B plyne rovnost souhlasných úhlů CAD_2 a BD_3A. Rovnoramenné trojúhelníky CAD_2 a BD_3A jsou tehdy shodné podle věty *sus*, takže $|D_2C| = |AB|$, neboli $z = w$, což je opět spor.[5] *Žádný čtyřstěn z obr. 6b proto není řešením naší úlohy.* Přejděme nyní k druhému typu čtyřstěnů a předpokládejme, že právě čtyři z hran některého čtyřstěnu $ABCD$ z obr. 7b mají délku a. Protože tři jeho hrany mají délku x, musí platit $x = a$; která (jediná) z ostatních délek y, z, $2z$ je rovna a? V síti na obr. 7a z trojúhelníku B_1CD_2 plyne $x + x > 2z$, tedy $x > z$. V téže síti má trojúhelník ABC tupý vnitřní úhel u vrcholu B, neboť jeho vnější úhel ABD_1 je vnitřním úhlem při základně AB rovnoramenného trojúhelníku ABD_1, takže je nutně ostrý. Proto je nejdelší stranou trojúhelníku ABC strana AC, což zapíšeme takto: $y > \max\{x, z\}$. Dohromady dostáváme $y > x > z$, s ohledem na rovnost $x = a$ proto nezbývá, než aby platilo $2z = a$. Nalezenými podmínkami je již čtyřstěn $ABCD$ jednoznačně (až na shodnost) určen. Délku y poslední hrany AC vypočteme jako těžnici ke straně D_1D_2 trojúhelníku CD_1D_2 o stranách $2a$, $2a$, a. Vyjde nám $y = \frac{1}{2}a\sqrt{6}$. *Řešením naší úlohy je jediný čtyřstěn z obr. 8a, jeho síť tvaru deltoidu je na obr. 8b.*



Obr. 8a



Obr. 8b

Odpověď. Hledaný čtyřstěn je jediný: jeho tři hrany délky a vycházejí z jednoho vrcholu, hrany protilehlé stěny mají délku a, $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}a\sqrt{6}$. Jedna ze sítí tohoto čtyřstěnu má tvar deltoidu o stranách a, a, $2a$, $2a$.[6]

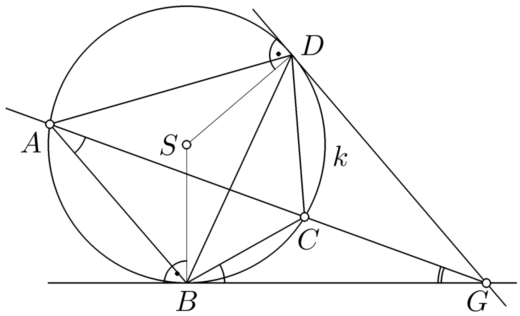
[5] V případě $w = z$ má „deltoidní" síť z obr. 6a přímý úhel u vrcholu C, takže nejde o deltoid, ale o trojúhelník.

[6] Doporučujeme řešitelům, aby takový deltoid vystřihli z papíru a pak model čtyřstěnu složili.

3. Do kružnice k je vepsán čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčka BD není průměrem. Dokažte, že průsečík přímek, jež se kružnice k dotýkají v bodech B a D, leží na přímce AC, právě když platí $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$.

3. Protože úsečka BD není průměrem kružnice k, její tečny v bodech B a D nejsou rovnoběžné, takže se protínají v bodě, který označíme G.

(i) Předpokládejme, že bod G leží na přímce AC, například na polopřímce opačné k CA (obr. 1). (Leží-li bod G na polopřímce opačné k AC, vyměníme označení vrcholů A a C, které nic nemění na rovnosti, kterou máme dokázat.) Trojúhelníky ABG a BCG

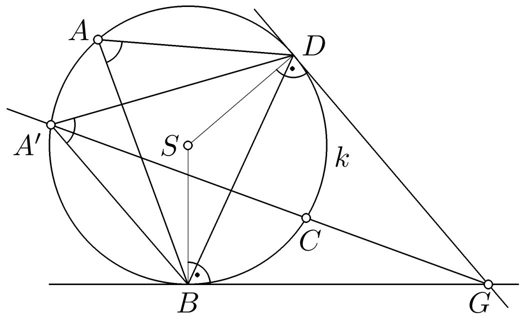


Obr. 1

se shodují jak ve vnitřních úhlech u společného vrcholu G, tak ve vnitřních úhlech BAG a CBG (podle věty o obvodovém a úsekovém úhlu pro tětivu BC kružnice k). Proto jsou tyto trojúhelníky podobné, tudíž platí $|AB| : |BC| = |GB| : |GC|$. Analogická úměra

$|AD| : |CD| = |GD| : |GC|$ plyne z podobných trojúhelníků ADG a DCG. Porovnáme-li obě úměry a přihlédneme-li k rovnosti $|GB| = |GD|$ (úseky tečen z bodu G ke kružnici k), zjistíme, že platí $|AB| : |BC| = |AD| : |CD|$, odkud již plyne rovnost $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$.

(ii) Předpokládejme nyní, že platí rovnost $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$ a že bod G leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou BD jako bod C (jinak opět vyměníme označení bodů A a C, které přímka BD odděluje.) Pak polopřímka GC protíná kružnici k ve dvou bodech, v bodě C a v bodě, který označíme A' (obr. 2). Pro čtyřúhelník $A'BCD$ můžeme



Obr. 2

použít tvrzení dokázané v části (i), dostaneme tak rovnost $|A'B| \cdot |CD| = |A'D| \cdot |BC|$. Porovnáním s rovností $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$ zjistíme, že platí $|A'B| : |AB| = |A'D| : |AD|$. Tato úměra spolu se shodností úhlů $BA'D$ a BAD (obvodové úhly nad tětivou BD kružnice k) znamená, že trojúhelníky $BA'D$ a BAD jsou podobné podle věty *sus*. Protože však straně BD odpovídá strana BD, jde o shodné trojúhelníky (ležící ve stejné polorovině s hraniční přímkou BD), tudíž body A a A' splývají. Bod G proto leží na přímce AC.

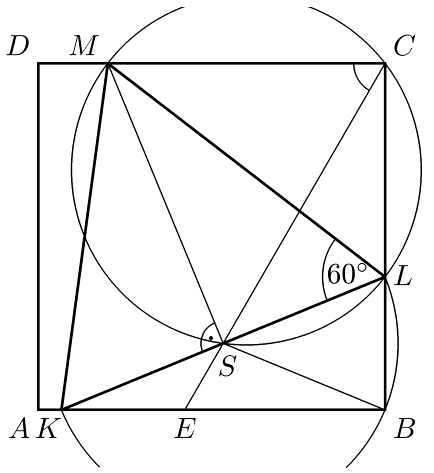
Za úplné řešení udělte 6 bodů, po 3 bodech za každou z obou implikací dokázaných v částech (i) a (ii).

2. *Uvažujme libovolný rovnostranný trojúhelník KLM, jehož vrcholy K, L a M leží po řadě na stranách AB, BC a CD daného čtverce $ABCD$. Najděte množinu středů stran KL všech takových trojúhelníků KLM.* *(J. Zhouf)*

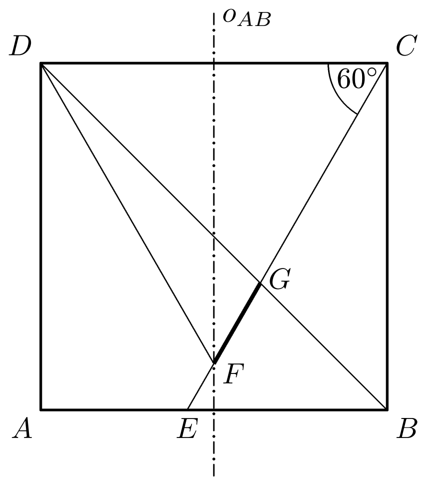
Řešení. Označme S střed strany KL libovolného z uvažovaných trojúhelníků KLM (obr. 1). Protože oba úhly LCM a LSM jsou pravé, je čtyřúhelník $CMSL$ tětivový, a proto platí $|\sphericalangle MCS| = |\sphericalangle MLS| = 60°$. Bod S tudíž leží na fixní úsečce CE, jejíž krajní bod $E \in AB$ je dán rovností $|\sphericalangle ECD| = 60°$. Ukážeme, že hledanou množinou všech středů S je jistá úsečka mezi body C a E, která je určena podmínkami $S \in CE$,

$$\text{(i)} \quad |AS| \geqq |BS| \quad \text{a} \quad \text{(ii)} \quad |\sphericalangle CBS| \geqq 45°.$$

Z těchto podmínek zřejmě plyne, že se jedná o úsečku FG, kde F je vrchol rovnostranného trojúhelníku CDF a G je ten bod strany CF, který leží na úhlopříčce BD, obr. 2.



Obr. 1



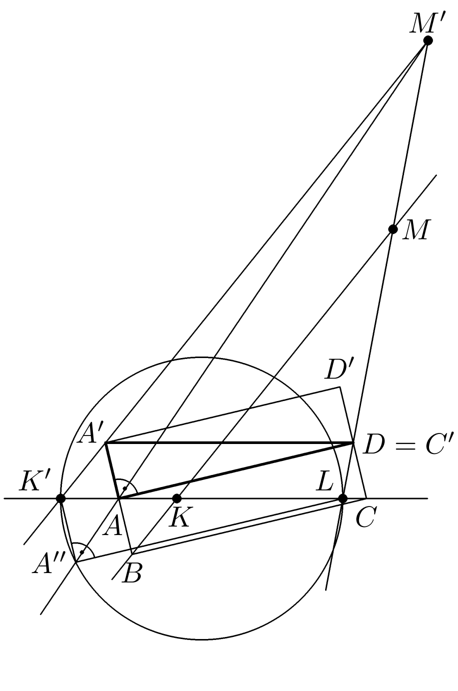
Obr. 2

Z bodů úsečky CE totiž podmínku (i) splňují právě body úsečky CF, podmínku (ii) právě body úsečky EG.

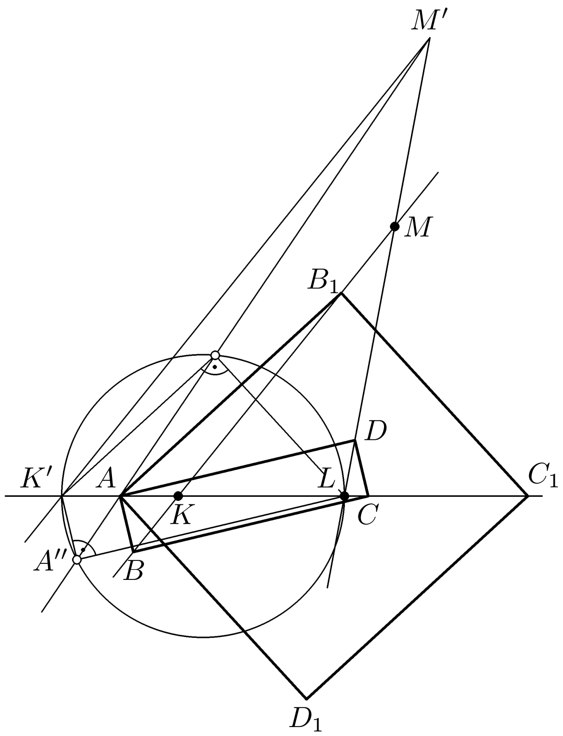
Zmíněné tvrzení dokážeme tak, že uvnitř úsečky CE zvolíme libovolný bod S a pokusíme se rekonstruovat vyhovující trojúhelník KLM, jehož strana KL má střed ve zvoleném bodě S. Zjistíme, že takový trojúhelník KLM existuje, právě když bod S splňuje obě podmínky (i) a (ii). Vraťme se znovu k obr. 1. Protože úhel KBL je pravý, jsou podle Thaletovy věty všechny tři úsečky SK, SB a SL shodné. Proto podle bodu S lze body K, L určit jako průsečíky úseček AB resp. BC s kružnicí o středu S a poloměru $|SB|$. Takový průsečík K ($K \neq B$) existuje, právě když platí podmínka (i), průsečík L ($L \neq B$) existuje, právě když platí nerovnost $|BS| \leqq |CS|$, neboli $|\sphericalangle BCS| \leqq |\sphericalangle CBS|$. Protože však $|\sphericalangle BCS| = 30°$, je poslední nerovnost zaručena silnější podmínkou (ii), jejíž nutnost se vyjeví za chvíli. Známe-li již body K a L, můžeme určit bod M jako průsečík strany CD s osou úsečky KL. Předpokládejme, že takový průsečík M existuje; sestrojený rovnoramenný trojúhelník KLM je pak skutečně rovnostranný, neboť čtyřúhelník $CMSL$ je tětivový (úhly u vrcholů C a S jsou pravé), a proto platí $|\sphericalangle MLS| = |\sphericalangle MCS| = 60°$. Zbývá proto posoudit, kdy existuje průsečík úsečky CD s osou úsečky KL, tedy kdy body C, D leží v opačných polorovinách určených zmíněnou osou, jež jsou popsány nerovnicemi $|KX| \leqq |LX|$ a $|KX| \geqq |LX|$. Protože platí $|KC| \geqq |BC|$ a $|BC| \geqq |LC|$, tedy $|KC| \geqq |LC|$, je naším úkolem zjistit, kdy je splněna nerovnost $|KD| \leqq |LD|$. Z pravoúhlých trojúhelníků KDA a LDC usoudíme, že poslední nerovnost platí, právě když $|AK| \leqq |LC|$, neboli $|KB| \geqq |LB|$, neboli $|\sphericalangle BLK| \geqq 45°$. Úhel BLK je ale shodný s úhlem CBS (víme totiž, že $|SB| = |SL|$), a tak dostáváme podmínku (ii). Důkaz je hotov.

5. *V rovině je dán trojúhelník KLM a bod A ležící na polopřímce opačné k polopřímce KL. Sestrojte pravoúhelník $ABCD$, jehož vrcholy B, C a D leží po řadě na přímkách KM, KL a LM.* *(P. Calábek)*

Řešení. Předpokládejme, že $ABCD$ je hledaný pravoúhelník, a označme $A'B'C'D'$ jeho obraz v posunutí o vektor $\boldsymbol{BA}$ (obr. 3, $B' = A$). Bod A' leží na přímce souměrně sdružené s přímkou KM podle středu A — odpovídající průsečíky této přímky s přímkami LK a LM označme K' a M'. Protože úhlopříčka AC hledaného pravoúhelníku leží na přímce KL, je úhlopříčka $A'C'$ posunutého obdélníku $A'B'C'D'$ s KL rovnoběžná. Ve stejnolehlosti se středem M', která převádí bod A' do bodu K' (a bod $C' = D$ do bodu L) odpovídá pravoúhlému trojúhelníku $A'AC'$ trojúhelník $K'A''L$. Bod A'' už dovedeme sestrojit, protože leží na Thaletově kružnici nad průměrem $K'L$ a na přímce $M'A$. Nyní již snadno sestrojíme hledaný pravoúhelník $ABCD$: nejprve určíme body A' a $C' = D$, které jsou obrazy bodů K' a L ve stejnolehlosti se středem M', jež převádí bod A'' do bodu A, a k nim doplníme vrcholy B a C jako obrazy bodů $B' = A$, $C' = D$ v posunutí o vektor $\boldsymbol{A'A} = \boldsymbol{AB}$.



Obr. 3



Obr. 4

Protože bod A leží uvnitř úsečky $K'L$ a $M' \neq A$, protíná přímka $M'A$ Thaletovu kružnici nad průměrem $K'L$ vždy ve dvou bodech. Jim odpovídají dvě různá řešení $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ (obr. 4). Úloha má vždy dvě řešení.

2. Označme S střed kružnice vepsané danému trojúhelníku ABC a P, Q paty kolmic z vrcholu C k přímkám, na kterých leží osy vnitřních úhlů BAC a ABC. Dokažte, že přímky AB a PQ jsou rovnoběžné.

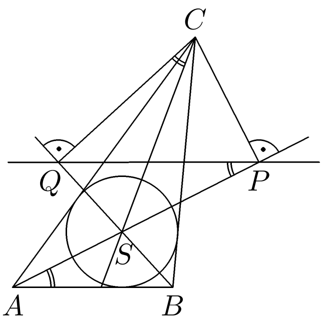
2. Označme jako obvykle α, β, γ vnitřní úhly trojúhelníku ABC. Protože platí (obr. 1)

$$|\sphericalangle ASC| = 180^\circ - |\sphericalangle SAC| - |\sphericalangle SCA| = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\beta}{2},$$

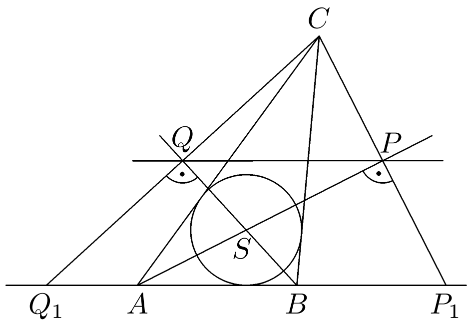
je úhel ASC tupý, takže bod P leží na polopřímce opačné k polopřímce SA. Obdobně zdůvodníme, že bod Q leží na polopřímce opačné k polopřímce SB. Přímky AB a PQ jsou rovnoběžné, právě když střídavé úhly BAP a APQ jsou shodné. Vzhledem k tomu, že $|\sphericalangle BAP| = \dfrac{\alpha}{2}$ a $|\sphericalangle APQ| = |\sphericalangle SPQ|$, stačí ukázat, že $|\sphericalangle SPQ| = \dfrac{\alpha}{2}$. Protože body P a Q leží na Thaletově kružnici nad průměrem CS, je úhel SPQ shodný s úhlem SCQ (obvodové úhly nad tětivou SQ zmíněné kružnice). Velikost úhlu SCQ snadno vyjádříme z trojúhelníků BCS a BCQ:

$$|\sphericalangle SCQ| = |\sphericalangle BCQ| - |\sphericalangle BCS| = \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) - \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2},$$

což jsme potřebovali ukázat.



Obr. 1



Obr. 2

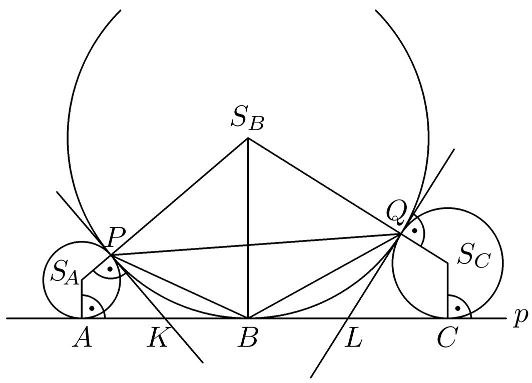
Jiné řešení. Označme P_1, Q_1 odpovídající průsečíky polopřímek CP a CQ s přímkou AB (obr. 2, pořadí bodů A, S, P a bodů B, S, Q na obou osách bylo vysvětleno v prvním řešení). Výška AP trojúhelníku P_1CA leží na ose AS jeho vnitřního úhlu P_1AC, takže jde o rovnoramenný trojúhelník, který má základnu P_1C se středem P. Obdobně pomocí rovnoramenného trojúhelníku Q_1CB zdůvodníme, že bod Q je středem úsečky Q_1C. Úsečka PQ je tedy střední příčkou trojúhelníku P_1Q_1C, takže je rovnoběžná s přímkou AB.

Za úplné řešení je 6 bodů. Pokud chybí zmínka o pořadí bodů A, S, P a B, S, P na příslušných osách, strhněte 1 bod.

2. *Na přímce p jsou dány různé body A, B, C v tomto pořadí, kde $|AB| = 1$ a $|BC| = h$. Uvažujme kružnice k_A, k_B, k_C, které se dotýkají přímky p po řadě v bodech A, B, C. Kružnice k_A, k_B mají přitom vnější dotyk v bodě P a kružnice k_B, k_C vnější dotyk v bodě Q. Určete všechny hodnoty poloměru kružnice k_B, pro něž je trojúhelník BPQ rovnoramenný.*

Řešení. Je jasné, že zvolíme-li velikost $r_B > 0$ poloměru kružnice k_B, jsou už tím obě další kružnice k_A, k_C určeny. K jejich sestrojení využijeme základní vlastnosti tečen kružnic.

Předpokládejme, že kružnice k_A, k_B, k_C mají vlastnosti popsané v zadání. Označíme-li např. K průsečík vnitřní společné tečny kružnic k_A a k_B (v bodě P jejich vnějšího dotyku) s přímkou p, která je společnou vnější tečnou všech tří kružnic, musí být $|KA| = |KP|$ a $|KB| = |KP|$ (obr. 1). To znamená, že bod K je středem úsečky AB a zároveň bod P leží na Thaletově kružnici nad průměrem AB. Známe-li bod P, snadno už sestrojíme kružnici k_A, o níž víme, že se dotýká přímky p v bodě A. Analogicky sestrojíme kružnici k_C.

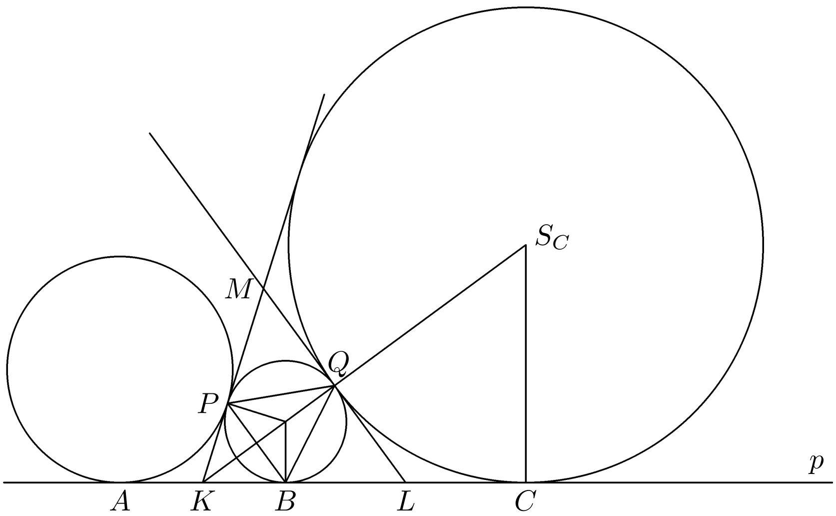


Obr. 1

Máme zjistit, pro které hodnoty r_B je trojúhelník BPQ rovnoramenný. Protože body dotyku P, Q kružnice k_B s oběma sousedními kružnicemi leží uvnitř opačných polorovin určených přímkou BS_B, jsou oba úhly BPQ a BQP ostré (příslušné středové úhly jsou menší než 180°). Pokud tedy náhodou vyjde trojúhelník PBQ tupoúhlý, může být rovnoramenný, jen když $|BP| = |BQ|$. V takovém případě je ale ze souměrnosti zřejmé, že $|AB| = |BC|$, tj. $h = 1$. Trojúhelník BPQ je pak rovnoramenný pro každé $r_B > 0$.

Předpokládejme dále, že $h \neq 1$. V takovém případě můžeme předpokládat, že trojúhelník BPQ je ostroúhlý (jinak podle předchozího odstavce nemůže být rovnoramenný). Je-li rovnoramenný, je buď $|PQ| = |BQ|$, anebo $|PQ| = |BP|$. Předpokládejme, že je např. $|PQ| = |BQ|$ (jak ukážeme později, druhý případ lze řešit využitím souměrnosti).

Trojúhelník BPQ je souměrný podle spojnice S_BS_C středů obou kružnic, která prochází bodem dotyku Q obou kružnic a průsečíkem K tečen KB, KP. Označme ještě L průsečík společné vnitřní tečny kružnic k_C a k_B s přímkou p (L je střed úsečky BC, obr. 2) a M průsečík obou tečen KP a LQ (ten je obrazem bodu L v uvedené osové



Obr. 2

souměrnosti). Trojúhelník KLM je tedy rovnoramenný se stranami $|KL| = |KM| = \frac{1}{2}(1 + h)$, $|ML| = 2|LQ| = h$, jeho obvod je $1 + 2h$. Velikost poloměru r_B vepsané kružnice spočteme pomocí obsahu: Pro obsah S trojúhelníku KLM platí

$$S = \frac{1}{2}h\sqrt{\left(\frac{1+h}{2}\right)^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}h\sqrt{1+2h}$$

a zároveň

$$S = \frac{1}{2}r_B(1 + 2h).$$

Odtud vychází

$$r_B = \frac{h}{2\sqrt{2h+1}}. \tag{1}$$

Naopak je-li r_B dáno vztahem (1), můžeme sestrojit rovnoramenný trojúhelník KLM s rameny KL a KM délky $\frac{1}{2}(1+h)$ a základnou ML, $|ML| = h$, přičemž jeho vepsaná kružnice k_B se bude dotýkat ramene KL v bodě B. Označme P, Q po řadě body dotyku kružnice k_B se stranami KM a LM. Protože K je střed úsečky AB, je $|KA| = |KB| = |KP|$. To znamená, že kružnice k_A dotýkající se přímky p v bodě A a procházející bodem P se bude dotýkat kružnice k_B v bodě P. Analogicky sestrojíme i kružnici k_C dotýkající se přímky p v bodě C a procházející bodem Q. Ze souměrnosti trojúhelníku KLM podle přímky KQ plyne, že $|PQ| = |BQ|$. Tím je první případ vyřešen.

V případě rovnosti $|PQ| = |BP|$ můžeme postupovat úplně stejně. Jednodušší však bude, když změníme měřítko původního obrázku v poměru $1 : h$, takže bude $|AB| = h' = 1/h$, $|BC| = 1$. Když navíc prohodíme označení bodů A a C, tak se z rovnosti $|BP| = |PQ|$ stane rovnost $|BQ| = |PQ|$. Podle předchozího pak pro velikost poloměru $r'_B = (1/h)r_B$ dostaneme

$$\frac{1}{h} r_B = r'_B = \frac{h'}{2\sqrt{2h'+1}} = \frac{\frac{1}{h}}{2\sqrt{2\frac{1}{h}+1}},$$

tj.

$$r_B = \frac{h}{2\sqrt{2h+h^2}}. \tag{2}$$

Anebo jsme mohli řešit úlohu poněkud obecněji za předpokladu $|AB| = a$, $|BC| = b$, pak bychom místo vztahu (1) dostali

$$r_B = \frac{b\sqrt{a^2+2ab}}{2(a+2b)}. \tag{1'}$$

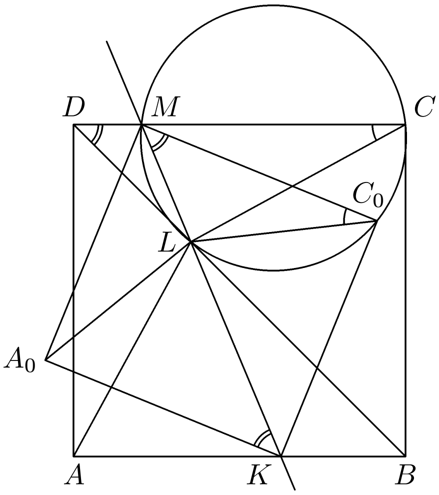
Pro $a = 1$, $b = h$ vyjde za předpokladu $|PQ| = |BQ|$ původní vztah (1), zatímco pro $|PQ| = |BP|$ prohodíme označení bodů A, C (a tím i bodů P, Q) a do vzorce (1′) dosadíme $a = h$, $b = 1$. Dostaneme tak vztah (2).

Závěr: Pro $h = 1$ je trojúhelník BPQ rovnoramenný pro libovolné $r_B > 0$. Pro $h \neq 1$ je trojúhelník BPQ rovnoramenný pro r_B určené vztahem (1) ($|PQ| = |BQ|$) nebo pro r_B určené vztahem (2) ($|PQ| = |BP|$).

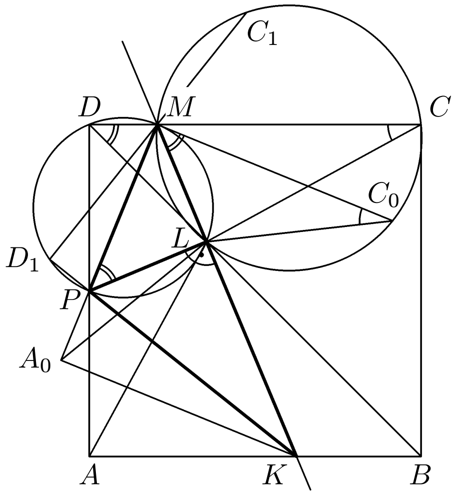
5. *V rovině jsou dány tři různé body K, L, M, které v tomto pořadí leží na přímce. V této rovině najděte množinu všech vrcholů C čtverců $ABCD$ takových, že bod K leží na straně AB, bod L na úhlopříčce BD a bod M na straně CD.*

Řešení. Je-li $ABCD$ libovolný čtverec, který splňuje podmínky úlohy, bude stejným podmínkám vyhovovat i čtverec, který dostaneme osovou souměrností podle přímky MK. Hledaná množina bude tedy osově souměrná podle této přímky a nám stačí určit tu její část, která leží v jedné z obou polorovin s hraniční přímkou MK.

Kromě libovolného čtverce $ABCD$, který splňuje podmínky úlohy, uvažujme čtverec $A_0B_0C_0D_0$ s úhlopříčkou $B_0D_0 = KM$ ($B_0 \equiv K$, $D_0 \equiv M$), přičemž vrchol C_0 leží



Obr. 3



Obr. 4

ve stejné polorovině ohraničené přímkou KM jako vrchol C čtverce $ABCD$ (obr. 3). (Vrchol C_0 zřejmě rovněž patří do hledané množiny.)

Protože trojúhelníky KLB a MLD jsou podobné podle věty *uu*, dělí bod L úhlopříčky obou čtverců ve stejném poměru

$$|BL| : |LD| = |KL| : |LM| = \text{konst.}$$

Velikost úhlu LCD ($|\sphericalangle LCD| = |\sphericalangle LC_0M|$) je určena polohou bodu L na úsečce MK, má tedy konstantní velikost, takže bod C leží na stejném oblouku γ kružnice opsané trojúhelníku LC_0M nad tětivou LM jako bod C_0. Navíc kružnice opsaná trojúhelníku A_0KL je shodná s kružnicí opsanou trojúhelníku C_0ML, protože v jedné z nich je vidět tětivu A_0L z bodu K pod úhlem 45° a v druhé tětivu C_0L shodné délky pod stejným úhlem z bodu M.

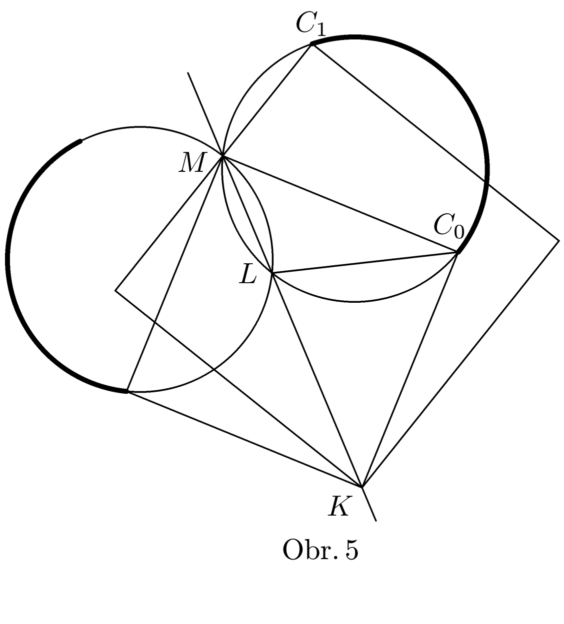
Protože bod M leží na straně CD, je zřejmě $|\sphericalangle LMC| \geqq |\sphericalangle LDC| = 45°$ (pokud $M \neq D$, je to vnější úhel trojúhelníku DML, který má při vrcholu D úhel 45°). Protože úhel LMC_0 měří právě 45°, leží bod C na části oblouku γ mezi body C_0 a M.

Dále si všimněme, že vrchol D čtverce $ABCD$ leží na oblouku, ze kterého je vidět úsečku LM pod úhlem 45° v polorovině opačné ke KMC. Sestrojme bod P (obr. 4), který leží na průsečíku přímky AD a kolmice k přímce MK v bodě L. Body M, D, L a P leží na Thaletově kružnici s průměrem MP, a protože $|\sphericalangle MPL| = |\sphericalangle MDL| = 45°$, je trojúhelník MPL rovnoramenný pravoúhlý. To znamená, že bod P je jednoznačně určen polohou bodu L na úsečce MK. (Mimochodem, bod P vznikne otočením bodu M kolem středu L o 90°, protože bod L jako bod úhlopříčky BD má od přímek CD a DA stejnou vzdálenost, je tedy přímka DA ve zmíněném otočení obrazem přímky CD; odtud rovněž plyne rovnost $|LM| = |LP|$.)

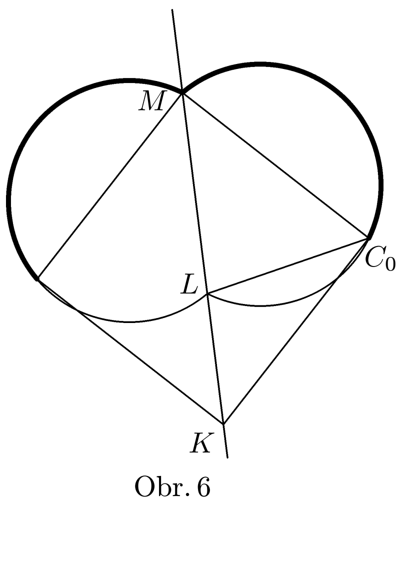
Bod D tudíž musí ležet na oblouku δ Thaletovy polokružnice nad průměrem MP v polorovině opačné k PML, zároveň však polopřímka DP (která obsahuje vrchol A) nesmí protnout úsečku LK. Odtud plyne, že vrchol D může ležet jen v té části zmíněné polokružnice nad průměrem MP, která leží v polorovině PKL. Přitom je zřejmé, že přímka PK tuto polokružnici protne v dalším bodě různém od P, právě když $|KL| > > |LM|$ (pro $|KL| = |LM|$ bude KP tečnou kružnice nad průměrem MP). Označíme-li v takovém případě D_1 průsečík KP s polokružnicí δ a C_1 průsečík polopřímky D_1M s obloukem γ, je zřejmé, že vrchol C padne do části C_0C_1 oblouku γ. V opačném případě, tj. pro $|KL| \leqq |LM|$, vyplní zřejmě vrcholy C celou část C_0M oblouku γ.

Skutečně. Zvolme libovolný bod C na části C_0C_1 oblouku γ v prvním případě, resp. na C_0M v druhém případě. Přímka CM protne oblouk δ v bodě, který označíme D. Vrchol A pak sestrojíme jako průsečík polopřímky DP s Thaletovou kružnicí nad průměrem PK (v prvním případě máme zaručeno, že bude ležet v polorovině PKA_0, a ne v opačné). Protože jak už víme, jsou kružnice opsané trojúhelníkům LC_0M a LA_0K shodné, zjistíme snadno z příslušných obvodových úhlů, že $|\sphericalangle DAL| = |\sphericalangle DCL|$, takže trojúhelníky DAL a DCL jsou shodné, tudíž $|DA| = |DC|$. Protože polopřímka DL protíná úsečku MK v bodě L, protne polopřímka AK polopřímku DL v bodě B za bodem K, přičemž trojúhelník DAB je rovnoramenný pravoúhlý. Je tedy $ABCD$ čtverec, který splňuje podmínky úlohy.

Závěr: Hledanou množinou vrcholů C čtverců $ABCD$ je pro $|ML| < |LK|$ oblouk C_0C_1 kružnice opsané trojúhelníku MLC_0 a oblouk s ním osově souměrný podle dané přímky MK (obr. 5), pro $|ML| \geqq |LK|$ je to oblouk C_0M stejné kružnice a oblouk s ním osově souměrný podle přímky MK (obr. 6).



Obr. 5



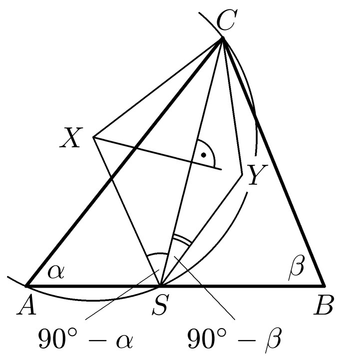
Obr. 6

2. Uvnitř strany AB daného ostroúhlého trojúhelníku ABC zvolte bod S tak, aby trojúhelník SXY, kde X a Y jsou po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům ASC a BSC, měl nejmenší možný obsah.

2. Vnitřní úhly trojúhelníku ABC označme jako obvykle α, β, γ.

Podle věty o obvodovém a středovém úhlu v kružnici opsané trojúhelníku ASC platí (obr. 1) $|\sphericalangle SXC| = 2\alpha$, tudíž úhel při základně SC rovnoramenného trojúhelníku SCX má velikost $|\sphericalangle XSC| = \frac{1}{2}(180° - 2\alpha) = 90° - \alpha$ (využili jsme předpokladu, že α je ostrý úhel). Analogicky se odvodí rovnost $|\sphericalangle YSC| = 90° - \beta$. Protože úhly při vrcholech A a C trojúhelníku ASC jsou ostré, je střed X vnitřním bodem úhlu ASC; obdobně je střed Y vnitřním bodem úhlu BSC. Proto lze vyjádřit velikost úhlu XSY jako součet velikostí úhlů XSC a YSC:

$$|\sphericalangle XSY| = |\sphericalangle XSC| + |\sphericalangle YSC| = (90° - \alpha) + (90° - \beta) = \gamma.$$



Obr. 1

Označíme-li ještě $\omega = |\sphericalangle ASC|$, pak pro poloměry kružnic opsaných trojúhelníkům ASC a BSC platí vzorce

$$|SX| = \frac{|AC|}{2\sin\omega} \quad \text{a} \quad |SY| = \frac{|BC|}{2\sin(180° - \omega)} = \frac{|BC|}{2\sin\omega},$$

které spolu s dříve určenou velikostí úhlu XSY vedou k následující závislosti mezi obsahy S_{SXY} a S_{ABC} trojúhelníků SXY a ABC:

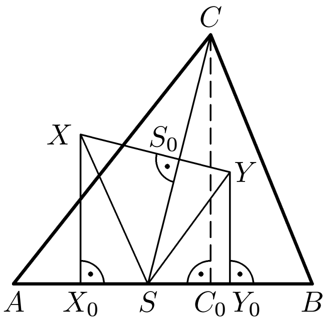
$$S_{SXY} = \frac{|SX| \cdot |SY| \cdot \sin |\sphericalangle XSY|}{2} = \frac{|AC| \cdot |BC| \cdot \sin \gamma}{8 \sin^2 \omega} = \frac{S_{ABC}}{4 \sin^2 \omega}.$$

Odtud plyne nerovnost $S_{SXY} \geqq \frac{1}{4} S_{ABC}$, přičemž rovnost nastane, právě když $\sin \omega = 1$, neboli $\omega = 90°$. Obsah trojúhelníku SXY je proto nejmenší, právě když je bod S patou výšky z vrcholu C ke straně AB. (Tato pata je vnitřním bodem strany AB díky podmínce, že trojúhelník ABC je ostroúhlý.)

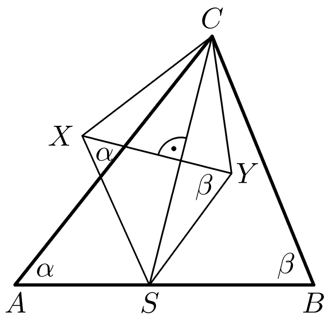
Jiné řešení. Středná XY obou opsaných kružnic protíná společnou tětivu CS v jejím středu S_0 a kolmé průměty X_0, Y_0 bodů X, Y na stranu AB jsou středy úseček AS, SB (obr. 2). Je tedy $|X_0Y_0| = \frac{1}{2}|AB|$ a pro obsah trojúhelníku SXY tudíž platí

$$\begin{aligned} S_{SXY} &= \frac{1}{2}|XY| \cdot |S_0S| \geqq \frac{1}{2}|X_0Y_0| \cdot |S_0S| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}|AB| \cdot \frac{1}{2}|CS| \geqq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}|AB| \cdot |CC_0| = \frac{1}{4} S_{ABC}, \end{aligned}$$

kde CC_0 je výška trojúhelníku ABC. Rovnost v první z předchozích dvou nerovností nastane, právě když $XY \parallel AB$, tj. právě když $CS \perp AB$, neboli $S = C_0$. A právě tehdy přejde v rovnost i druhá nerovnost.



Obr. 2



Obr. 3

Jiné řešení. Průsečíky C a S kružnic opsaných trojúhelníkům ASC a BSC jsou souměrně sdružené podle přímky XY, takže pro velikost úhlu SXY platí (obr. 3)

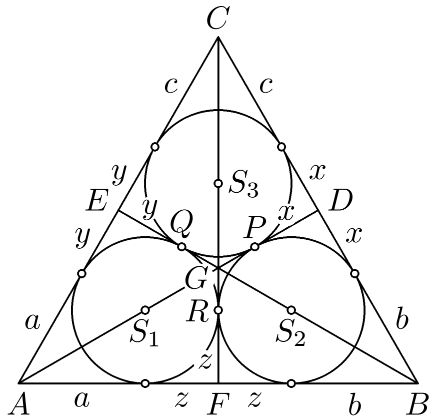
$$|\sphericalangle SXY| = \frac{1}{2}|\sphericalangle SXC| = \frac{1}{2} \cdot 2|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BAC|,$$

obdobně $|\sphericalangle SYX| = |\sphericalangle ABC|$. Proto jsou trojúhelníky SXY a CAB podobné podle věty *uu*, takže jejich obsahy S_{SXY} a S_{ABC} jsou pomocí koeficientu podobnosti $k = |XS| : |AC|$ svázány rovností $S_{SXY} = k^2 S_{ABC}$. Protože úsečka AC je tětivou kružnice o poloměru $|XS|$, platí nerovnost $|AC| \leqq 2|XS|$, neboli $k \geqq \frac{1}{2}$; rovnost $k = \frac{1}{2}$ přitom nastane, jen když je strana AC průměrem kružnice opsané trojúhelníku ASC, což je ekvivalentní s podmínkou $CS \perp AB$. Tím je dokázána nerovnost $S_{SXY} \geqq \frac{1}{4} S_{ABC}$ i nalezena podmínka, kdy nastane rovnost.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za pouhé odvození podobnosti $\triangle ABC \sim \triangle XYS$ udělte 4 body, podobně za důkaz rovnosti $|\sphericalangle XSY| = |\sphericalangle ACB|$ udělte 2 body.

2. *Uvnitř stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC zvolíme po řadě body D, E, F tak, aby se úsečky AD, BE, CF protaly v jednom bodě, který označíme G. Pokud lze čtyřúhelníkům $AFGE$, $BDGF$, $CEGD$ vepsat kružnice, z nichž každé dvě mají vnější dotyk, pak je trojúhelník ABC rovnostranný. Dokažte.* *(M. Tancer)*

Řešení. Předpokládejme, že zmíněné čtyřúhelníky mají uvedenou vlastnost. Ze souměrnosti tečen *z daného bodu k dané kružnici* vyplývá, že strany trojúhelníku ABC jsou rozděleny body D, E, F a body dotyku kružnic vepsaných uvažovaným čtyřúhelníkům na úseky délek, jež označíme podle obr. 1. Jsou na něm rovněž vyznačeny body P, Q, R vzájemného dotyku zmíněných kružnic. Naším cílem je dokázat rovnosti $x = y = z$ a $a = b = c$.



Obr. 1

Pro úseky tečen z bodu A ke kružnicím při straně BC platí rovnosti $a + 2z = |AP| = a + 2y$, odkud ihned plyne $y = z$; z důvodů symetrie tudíž skutečně platí $x = y = z$. (Všude dále budeme psát x namísto y a z.) Všimněme si nyní trojúhelníků AEG a AFG. Mají společnou stranu AG a shodné strany AF a AE (délky $a+x$). Také jejich třetí strany EG a FG jsou shodné:

$$|EG| = |EQ| + |QG| = x + |RG| = |FR| + |RG| = |FG|.$$

Proto $\triangle AEG \simeq \triangle AFG$ podle věty *sss*, tudíž úhly BAD a CAD jsou shodné a polopřímka AD je osou úhlu BAC. Jak víme, osa úhlu trojúhelníku protíná protější stranu v poměru délek přilehlých stran. V našem případě to znamená, že

$$\frac{a + 2x + b}{a + 2x + c} = \frac{b + x}{c + x}.$$

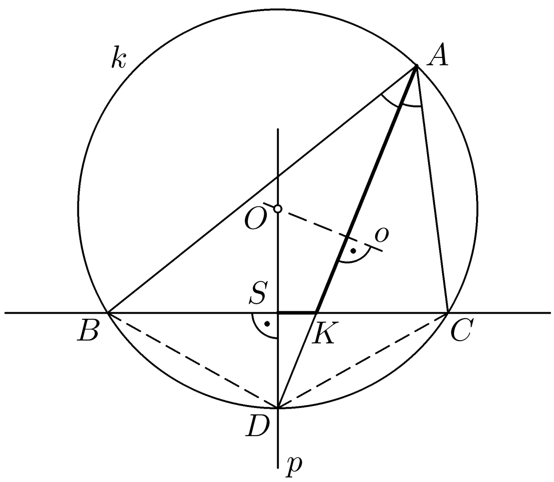
Snadnou úpravou dostaneme rovnost $(b - c)(a + x) = 0$, ze které vidíme, že $b = c$. Z důvodů symetrie tudíž platí $a = b = c$ a celý důkaz je hotov.

Jiné řešení. Označme S_1, S_2, S_3 středy vepsaných kružnic (obr. 1). Stejně jako v předchozím řešení si nejprve všimneme, že platí $x = y = z$ a že trojúhelníky AEG a AFG jsou shodné. K tomu jsme využili rovnost $|GQ| = |GR|$, ze které plyne, že podle věty *sss* jsou shodné i trojúhelníky S_1QG a S_1RG. Jelikož $R \in S_1S_2$ a $Q \in S_1S_3$, ze souměrnosti podle osy AD nyní plyne, že přímky AB a S_1S_2 svírají stejný úhel jako přímky AC a S_1S_3, a protože kolmé průměty úseček S_1S_2 a S_1S_3 na odpovídající přímky AB, resp. AC jsou shodné (mají délku $2x$), je $|S_1S_2| = |S_1S_3|$. Analogicky $|S_1S_2| = |S_2S_3|$, takže trojúhelník $S_1S_2S_3$ je rovnostranný. Odtud pro poloměry r_1, r_2 a r_3 vepsaných kružnic plyne $r_1 + r_2 = r_2 + r_3 = r_3 + r_1$, neboli $r_1 = r_2 = r_3$. Kružnice jsou tedy shodné, takže je $AB \parallel S_1S_2$, $BC \parallel S_2S_3$ a $CA \parallel S_3S_1$ a trojúhelník ABC je rovnostranný.

Poznámka. K dokončení předchozího důkazu můžeme úvahu o délkách úseček S_iS_j nahradit úvahou o tzv. *orientovaných úhlech* mezi přímkami. Orientovaný úhel $\langle p, q\rangle$ přímek p, q (v tomto pořadí) je úhel, o který musíme v kladném směru otočit přímku q, aby byla rovnoběžná s přímkou p. Přitom $\langle p, q\rangle = \langle q, p\rangle$, právě když $\langle p, q\rangle$ je násobek $90°$. Ze souměrnosti podle os AD, BE a CF tak postupně dostáváme $\langle S_1S_3, AC\rangle = \langle AB, S_1S_2\rangle = \langle S_2S_3, BC\rangle = \langle AC, S_1S_3\rangle$. Protože obě odpovídající kružnice se středy S_1, S_3 mají společnou tečnu AC a leží v téže polorovině určené přímkou AC, znamená to, že S_1S_3 a AC jsou rovnoběžné.

4. *V rovině je dán tupý úhel AKS. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby jeho strana BC ležela na přímce KS, bod S byl jejím středem a bod K jejím průsečíkem s osou protilehlého úhlu BAC.* *(P. Leischner)*

Řešení. *Rozbor.* Předpokládejme, že trojúhelník ABC má všechny požadované vlastnosti a označme D průsečík kružnice k opsané trojúhelníku ABC s polopřímkou opačnou k rameni KA daného úhlu AKS (obr. 2). Polopřímka AD půlí úhel BAC, proto jsou úhly BAD a CAD shodné, tudíž jsou shodné i tětivy BD a CD kružnice k. Bod S je proto středem základny BC rovnoramenného trojúhelníku BCD, takže úhel BSD je pravý. To znamená, že bod D leží na přímce p, která prochází bodem S kolmo k danému rameni KS. Střed O kružnice k leží jednak na přímce p (ose tětivy BC), jednak na přímce o, která je osou tětivy AD.



Obr. 2

Konstrukce. Pro daný úhel AKS nejprve proložíme bodem S přímku p kolmou k rameni KS. Pak sestrojíme průsečík D přímky p s polopřímkou opačnou k rameni KA.

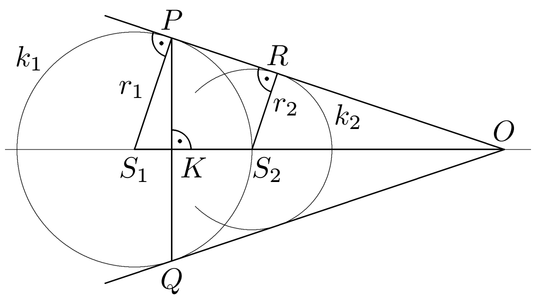
Dále sestrojíme osu o úsečky AD a její průsečík s přímkou p označíme O. Konečně sestrojíme kružnici k se středem O a poloměrem $r = |OA|$ $(= |OD|)$ a její průsečíky s přímkou KS označíme B a C.

Důkaz konstrukce. Ukážeme, že sestrojený trojúhelník ABC má všechny požadované vlastnosti. Z posledního kroku konstrukce plyne, že body B, C leží na přímce KS a že bod S je středem úsečky BC. Protože na přímce p, ose úsečky BC, leží i bod D, platí $|BD| = |CD|$, a proto $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle CAD|$ (neboť všechny body A, B, C, D leží na kružnici k.) Polopřímka AD je tedy osou úhlu BAC a bod K je její průsečík s úsečkou BC.

Diskuse. Vysvětlíme, proč pro daný tupý úhel AKS je hledaný trojúhelník ABC jediný (nepřihlížíme-li k možnosti zaměnit označení vrcholů B a C). Protože je úhel AKS tupý, bod D z naší konstrukce zřejmě existuje a přímky p a o jsou různoběžné, takže i bod O je určen jednoznačně. Zbývá zdůvodnit, proč kružnice k protne přímku KS ve dvou bodech. Protože bod K je vnitřním bodem základny AD rovnoramenného trojúhelníku ADO, platí $|OK| < |OA| = |OD| = r$, tudíž bod K leží ve vnitřní oblasti kružnice k a přímka KS je nutně její sečnou.

2. V rovině jsou dány kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ tak, že $S_2 \in k_1$ a $r_1 > r_2$. Společné tečny obou kružnic se dotýkají kružnice k_1 v bodech P a Q. Dokažte, že přímka PQ se dotýká kružnice k_2.

2. Ze souměrnosti společných tečen plyne, že body dotyku P a Q jsou souměrně sdružené podle přímky S_1S_2, takže platí $PQ \perp S_1S_2$. Přímka PQ proto bude tečnou ke kružnici k_2, když ukážeme, že průsečík K přímek PQ a S_1S_2 leží na kružnici k_2 (obr. 1). Označme ještě O průsečík obou tečen s přímkou S_1S_2 a R bod dotyku tečny PO s kružnicí k_2.



Obr. 1

Z podobných pravoúhlých trojúhelníků S_1OP a S_2OR plyne úměra

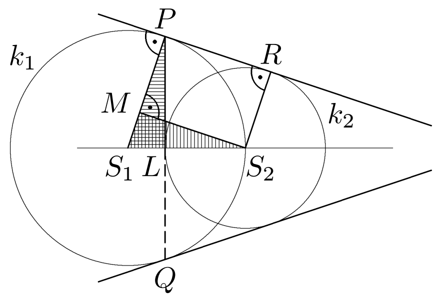
$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{|S_1P|}{|S_2R|} = \frac{|S_1O|}{|S_2O|} = \frac{|S_1O|}{|S_1O| - r_1}, \quad \text{odkud} \quad |S_1O| = \frac{r_1^2}{r_1 - r_2}.$$

Z Eukleidovy věty o odvěsně S_1P trojúhelníku S_1OP proto vyplývá, že

$$r_1^2 = |S_1P|^2 = |S_1K| \cdot |S_1O| = |S_1K| \cdot \frac{r_1^2}{r_1 - r_2},$$

tudíž $|S_1K| = r_1 - r_2$, a proto $|S_2K| = |S_1S_2| - |S_1K| = r_1 - (r_1 - r_2) = r_2$. To znamená, že bod K skutečně leží na kružnici k_2 a důkaz tvrzení je hotov.

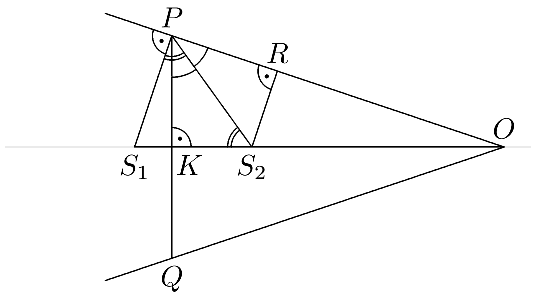
Jiné řešení. Označme L průsečík kružnice k_2 s úsečkou S_1S_2, M patu kolmice spuštěné z bodu S_2 na úsečku S_1P a R bod dotyku kružnice k_2 s tou společnou tečnou, která prochází bodem P (obr. 2). Protože S_2RPM je pravoúhelník, platí $|MP| = |S_2R| = r_2$,



Obr. 2

a proto $|S_1M| = |S_1P| - |MP| = r_1 - r_2$. Stejnou délku $r_1 - r_2$ má rovněž úsečka S_1L, neboť $r_1 = |S_1S_2|$ a $r_2 = |S_2L|$. Trojúhelníky S_1MS_2 a S_1LP mají tudíž shodné úhly při vrcholu S_1 i přilehlé strany, jsou proto shodné podle věty *sus*. Platí tedy nejen $S_1M \perp S_2M$, ale také $S_1L \perp PL$. Bod L ale leží na kružnici k_2, takže přímka PL je její tečnou, která s ohledem na souměrnost prochází rovněž bodem Q. Důkaz je ukončen.

Jiné řešení. Označme O průsečík obou tečen, K patu kolmice z bodu P na OS_1 (vzhledem k souměrnosti obou tečen podle spojnice S_1S_2 je to průsečík PQ s OS_1) a R patu kolmice z bodu S_2 na OP (obr. 3). Protože $|S_1P| = |S_1S_2| = r_1$, je $|\sphericalangle S_1PS_2| = |\sphericalangle S_1S_2P|$,



Obr. 3

proto

$$
\begin{aligned}
|\sphericalangle S_2PK| &= 90^\circ - |\sphericalangle S_1S_2P| = \\
&= 90^\circ - |\sphericalangle S_1PS_2| = |\sphericalangle S_2PR|,
\end{aligned}
$$

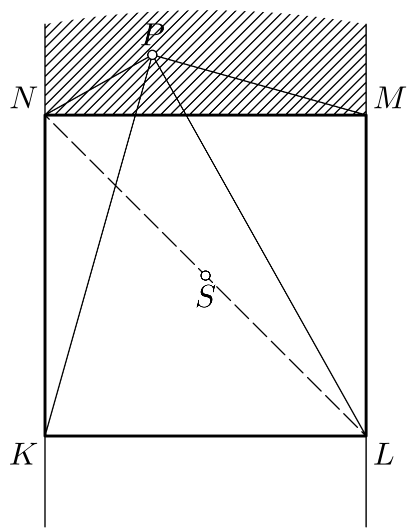
takže pravoúhlé trojúhelníky KS_2P a RS_2P se shodují v přeponě S_2P a přilehlém úhlu u vrcholu P. Je tudíž $|S_2K| = |S_2R|$ a kružnice se středem S_2 a poloměrem $r_2 = |S_2R|$ se dotýká spojnice PQ v bodě K.

Za úplné řešení je 6 bodů.

2. *V rovině daného čtverce $KLMN$ určete množinu všech bodů P, pro něž jsou úhly NPK, KPL a LPM shodné.*

Řešení. Označme P hledanou množinu bodů a S střed čtverce $KLMN$. Zřejmě $S \in \mathsf{P}$ (obr. 2).

Dále určíme všechny hledané body P ($P \neq S$), které leží uvnitř pásu omezeného rovnoběžkami KN a LM. Ukážeme, že každý takový bod P leží v polorovině opačné k polorovině MNK. Pro každý bod P uvažovaného pásu, který leží v polorovině opačné k polorovině KLM, platí totiž $|\sphericalangle KPL| > |\sphericalangle KPN|$, neboť polopřímka PN leží v úhlu KPL. Podobně zjistíme, že žádný bod čtverce $KLMN$ (s výjimkou jeho středu S) nemá danou vlastnost.



Obr. 2

Leží-li tedy hledaný bod P ve vyšrafované oblasti na obr. 2, jsou přímky PK a PL podle zadání osami úhlů NPL a KPM. Proto v trojúhelníku LPN osa PK úhlu NPL protíná kružnici opsanou tomuto trojúhelníku (kromě bodu P) v bodě ležícím na ose strany NL. Tímto bodem je ovšem vrchol K čtverce $KLMN$. Body P, N, K, L tedy leží na téže kružnici, kterou je kružnice opsaná čtverci $KLMN$. (Analogický výsledek obdržíme, uvažujeme-li osu PL úhlu KPM.) Bod P proto leží na kratším oblouku

$l = \widehat{MN}$ kružnice opsané čtverci $KLMN$. Naopak pro každý bod $P \in l$ platí podle věty o obvodových úhlech (pro shodné tětivy NK, KL, LM)

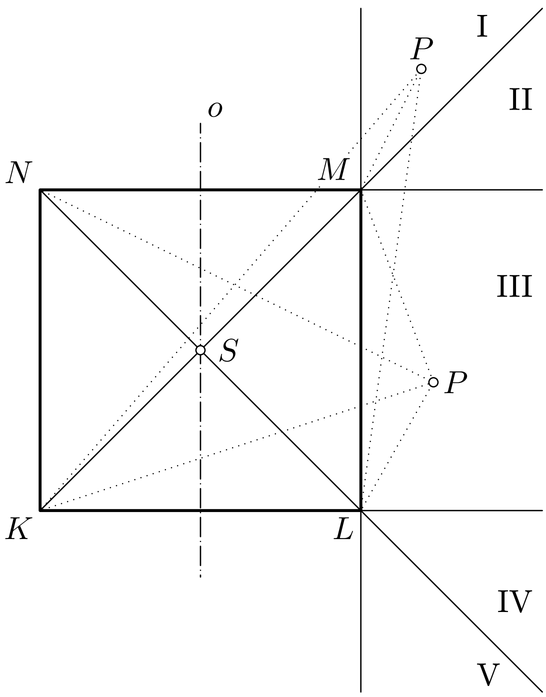
$$|\sphericalangle NPK| = |\sphericalangle KPL| = |\sphericalangle LPM| = 45^\circ.$$

Tím je hledání bodů P v pásu mezi rovnoběžkami KM a LM ukončeno.

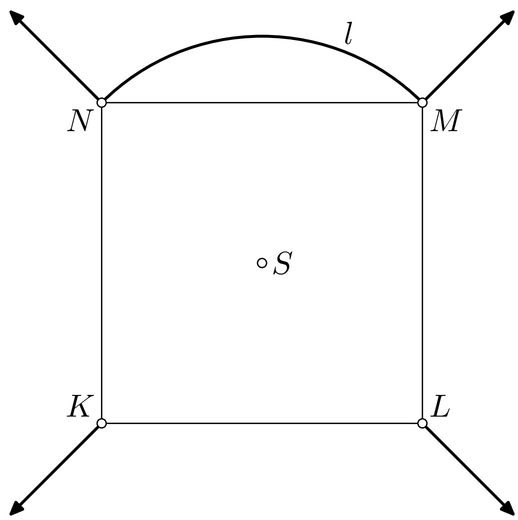
Dále snadno nahlédneme, že libovolný vnitřní bod P každé z polopřímek opačných k polopřímkám KM, LN, MK, NL má danou vlastnost. Ukážeme, že žádný další bod roviny čtverce $KLMN$ uvedenou vlastnost nemá. Stačí se přitom díky symetrii omezit na jednu z polorovin vyťatých osou o strany KL daného čtverce. Protože jsme již vyšetřili celý pás omezený rovnoběžkami KN a LM, lze (bez újmy na obecnosti) zkoumat jen body poloroviny opačné k polorovině LMN. Přímky KL, MN, LM, KM a LN dělí tuto polorovinu na pět částí (obr. 3), přitom žádný bod přímek KL, LM a MN danou vlastnost očividně nemá.

Ukážeme, že žádný vnitřní bod každé z oblastí I–V roviny čtverce $KLMN$ není prvkem množiny P. Jestliže P je vnitřním bodem oblasti I, evidentně platí $|\sphericalangle KPL| > |\sphericalangle LPM|$ (obr. 3). Je-li P vnitřním bodem libovolné z oblastí II nebo III, platí naopak $|\sphericalangle KPL| < |\sphericalangle LPN|$. Pro libovolný vnitřní bod oblasti IV zase platí $|\sphericalangle NPK| > |\sphericalangle KPL|$ a pro libovolný vnitřní bod P oblasti V platí naopak $|\sphericalangle NPK| < |\sphericalangle KPL|$. Ve všech pěti uvažovaných případech jsme se však vždy dostali do rozporu s podmínkami úlohy.

Tím jsme prozkoumali všechny body roviny čtverce $KLMN$.



Obr. 3



Obr. 4

Závěr. Hledaná množina bodů P se skládá ze všech vnitřních bodů kratšího oblouku MN kružnice opsané danému čtverci $KLMN$, ze všech vnitřních bodů polopřímek opačných k polopřímkám KM, LN, MK a NL a ze středu S daného čtverce (obr. 4).

Návodná úloha:
V rovině daného pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ABC s přeponou AB určete množinu všech bodů P, pro něž jsou úhly APC a BPC shodné. [Pro každé $\alpha \in (0^\circ, 180^\circ)$ nakreslete dvojice oblouků, z nichž jsou úsečky AC a BC vidět pod úhlem α, a zjistěte, jakou množinu vyplní jejich průsečíky. Zvláštní pozornost věnujte hodnotě $\alpha = 45^\circ$.]

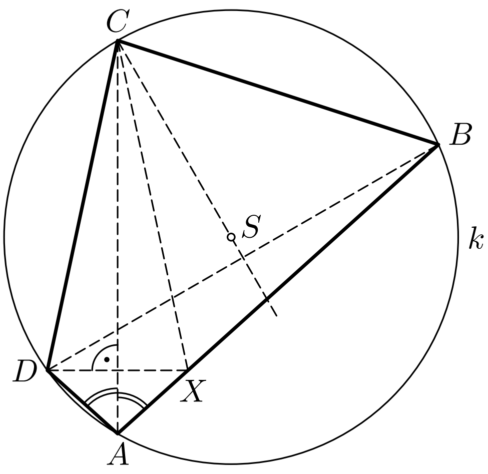
Poznámka. Dvojím užitím výsledku návodné úlohy ($\triangle ABC = \triangle KML$ a $\triangle ABC = \triangle LNK$) obdržíte jiné řešení dané úlohy.

5. *Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník, jehož vnitřní úhel při vrcholu B má velikost $60°$.*

a) Jestliže $|BC| = |CD|$, pak platí $|CD| + |DA| = |AB|$. Dokažte.

b) Rozhodněte, zda platí opačná implikace.

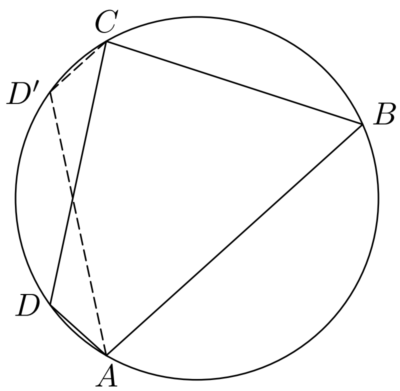
Řešení. Nejprve zvažme, jak může takový tětivový čtyřúhelník $ABCD$ s šedesátistupňovým úhlem při vrcholu B a se shodnými stranami BC a CD vypadat. Označme k kružnici, jež je čtyřúhelníku $ABCD$ opsána. Protože $|\sphericalangle ABC| = 60°$, je už určena velikost úhlopříčky AC, která je tětivou odpovídající obvodovému úhlu $60°$. Vrchol D pak musí být vnitřním bodem kratšího oblouku AC kružnice k (v polorovině opačné k ACB) a vrchol B je obrazem bodu D v souměrnosti podle přímky SC (obr. 5), kde S je střed kružnice k.



Obr. 5

Protože dle předpokladu $|BC| = |CD|$, jsou obvodové úhly BAC a CAD příslušné shodným tětivám shodné. Vidíme tedy, že polopřímky AD a AB jsou souměrně sdruženy dle osy AC. Označme X obraz bodu D v této souměrnosti (obr. 5). Bod X zřejmě leží uvnitř strany AB (obraz kratšího oblouku AC leží celý ve vnitřní oblasti kružnice k), a protože $|CX| = |CD| = |BC|$, je trojúhelník XBC rovnoramenný. Trojúhelník XBC je dokonce rovnostranný, protože velikost jeho úhlu při vrcholu B je $60°$. Je proto $|BX| = |BC| = |CD|$. Ze souměrnosti navíc plyne $|DA| = |XA|$, takže $|CD|+|DA| = |BX|+|XA| = |AB|$, což je požadovaná rovnost.

b) Snadno nahlédneme, že opačná implikace neplatí. Stačí vzít takový čtyřúhelník $ABCD$, který splňuje předpoklady úlohy, a zároveň v něm platí $|CD| \neq |DA|$ (takový určitě existuje, jak jsme naznačili hned v úvodu řešení). Prohodíme-li nyní strany CD a DA, tj. nahradíme-li vrchol D vrcholem D' souměrně sdruženým s vrcholem D podle osy úhlopříčky AC (obr. 6), dostaneme tětivový čtyřúhelník $ABCD'$ s šedesátistupňovým úhlem při vrcholu B, který bude i nadále splňovat rovnost $|CD'|+|D'A| = |DA|+|CD| = |AB|$, ale bude v něm platit $|BC| = |CD| = |D'A| \neq |D'C|$.



Obr. 6

Jiné řešení. Naučíme se *sinovou větu* v následujícím tvaru, který plyne z věty o obvodových úhlech: *Je-li R poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC, je* $\sin\alpha = \frac{1}{2}a/R$*, kde* $a = |BC|$. (Doplníme-li cyklicky další dvě rovnosti, dostaneme odtud snadno běžné znění sinové věty ze školních učebnic.)

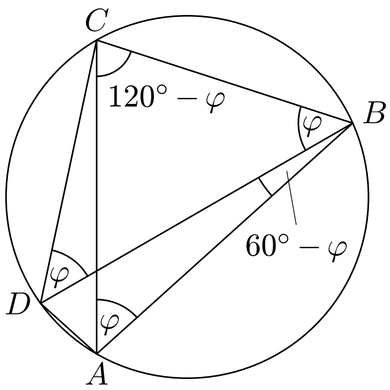
Označíme-li nyní φ obvodový úhel příslušný shodným tětivám BC a CD ($0° < \varphi < 60°$), snadno zjistíme, že tětivě DA přísluší obvodový úhel $60° - \varphi$ a tětivě AB obvodový úhel $120° - \varphi$ (obr. 7). Dokazovaná rovnost je pak dle sinové věty ekvivalentní rovnosti

$$\sin\varphi + \sin(60° - \varphi) = \sin(120° - \varphi).$$

Protože $\sin(120° - \varphi) = \sin(60° + \varphi)$, je uvedená rovnost (po jednoduché úpravě) ekvivalentní rovnosti

$$\sin\varphi = 2\cos 60° \sin\varphi,$$

která triviálně platí.



Obr. 7

Stejně jako v předchozím řešení si uvědomíme, že rovnost $|CD| + |DA| = |AB|$ zůstane zachována, i když v daném čtyřúhelníku vyměníme obě strany CD a DA. Nový čtyřúhelník zůstane tětivový, velikost jeho vnitřního úhlu při vrcholu B se nezmění, ale místo rovnosti $|BC| = |CD|$ bude splněna rovnost $|BC| = |DA|$.

Jiné řešení. Označme délky stran čtyřúhelníku $ABCD$, který splňuje podmínky úlohy, obvyklým způsobem a, b, c, d. Protože vnitřní úhly při vrcholech B a D mají velikost $60°$, resp. $120°$, z kosinové věty pro trojúhelníky ABC a CDA plyne dvojím vyjádřením hodnoty $|AC|^2$ rovnost

$$a^2 + b^2 - ab = c^2 + d^2 + cd. \tag{6}$$

a) Jestliže $b = c$, lze z rovnosti (6) postupně odvodit:

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 - ac &= c^2 + d^2 + cd,\\ a^2 - d^2 &= ac + cd,\\ (a-d)(a+d) &= c(a+d),\\ a - d &= c. \end{aligned}$$

Rovnost $a = c + d$, kterou jsme měli dokázat, tedy platí.

b) Jestliže platí $a = c + d$, dostaneme po dosazení za a do rovnosti (6)

$$(c + d)^2 + b^2 - (c + d)b = c^2 + d^2 + cd.$$

Odtud po úpravě obdržíme vztah $(b - c)(b - d) = 0$, z něhož plyne, že platí $b = c$ nebo $b = d$. Opačná implikace tedy obecně neplatí.

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Dokažte, že pro libovolný bod K kratšího oblouku AB kružnice opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC platí rovnost $|AK| + |BK| = |CK|$. [První řešení: Na úsečce CK zvolte bod X tak, aby $|KX| = |AK|$, a rovnost $|CX| = |BK|$ odvoďte ze shodnosti $\triangle AKB \cong \triangle AXC$. Druhé řešení: Zapište kosinové věty pro trojúhelníky ABK a ACK s úhly $120°$, resp. $60°$ u vrcholu K; získané rovnosti pak odečtěte a upravte.]
2. Pro obsah S libovolného čtyřúhelníku se stranami a, b, c, d platí jednak $\frac{1}{2}S \leqq ab + cd$, jednak $\frac{1}{2}S \leqq ac + bd$. Dokažte a zjistěte, kdy nastane rovnost. [První odhad plyne z rovnosti $\frac{1}{2}S = ab \sin\beta + cd \sin\delta$, druhý plyne snadno z prvního, uvědomíme-li si, že „prohozením“ dvou sousedních stran se obsah čtyřúhelníku nezmění.]

3. Nechť K je libovolný vnitřní bod strany AB daného trojúhelníku ABC. Přímka CK protíná kružnici opsanou trojúhelníku ABC v bodě L ($L \neq C$). Označme k_1 kružnici opsanou trojúhelníku AKL a k_2 kružnici opsanou trojúhelníku BKL.

a) Dokažte, že přímka AC je tečna kružnice k_1, právě když přímka BC je tečna kružnice k_2.

b) Předpokládejme, že přímka AC je sečna kružnice k_1. Nechť P ($P \neq A$) je průsečík přímky AC s kružnicí k_1 a Q ($Q \neq B$) průsečík přímky BC s kružnicí k_2. Dokažte, že bod K leží na úsečce PQ.

4. Nechť K, L, M jsou po řadě průsečíky os vnitřních úhlů α, β, γ při vrcholech A, B, C daného trojúhelníku ABC s protějšími stranami BC, CA, AB. Dokažte, že platí nerovnost

$$\frac{|BC|}{|AK|}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{|CA|}{|BL|}\cos\frac{\beta}{2} + \frac{|AB|}{|CM|}\cos\frac{\gamma}{2} \geqq 3.$$

Protože nás zajímá pouze parita přirozeného čísla p_n a výrazů, pomocí kterých ho počítáme, můžeme na základě uvedených rovností sestavit tabulku ze symbolů S a L, jimž odpovídají sudá resp. lichá čísla. Dostaneme

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$(aa)_n$		L	L	L	S	S	L	S	L	...
$(ba)_n$		L	L	S	S	L	S	L	L	...
$(ab)_n$		L	S	S	L	S	L	L	L	...
a_n	L	S	S	L	S	L	L	L	S	...
b_n	L	L	S	S	L	S	L	L	L	...
p_n	S	L	S	L	L	L	S	S	L	...

Tato tabulka je nutně periodická, protože existuje jen osm různých uspořádaných trojic písmen S a L, takže nejdéle po osmi sloupcích se vzhledem k dokázané rekurenci začnou hodnoty posloupností $((aa)_n)$, $((ba)_n)$, $((ab)_n)$ opakovat. Hodnoty posloupností (a_n), (b_n), (p_n) jsou z nich odvozeny, takže se začnou opakovat rovněž. Z tabulky vidíme, že její perioda je 7 (první dva shodné sloupce jsou pro $n = 2$ a $n = 9$). A protože v příslušném úseku tabulky je dvojice sousedních sudých čísel p_7, p_8 jediná, jsou obě čísla p_n a p_{n+1} sudá, právě když je číslo n dělitelné sedmi.

Poznámka 1. Z výše uvedených vztahů můžeme odvodit rekurentní rovnice pro čísla a_n a b_n. Pro všechna přirozená čísla $n \geqq 4$ platí

$$\begin{aligned} a_n &= (aa)_n + (ba)_n = (ba)_{n-1} + (ab)_{n-1} = (ab)_{n-2} + (ab)_{n-1} = b_{n-2} + b_{n-1}, \\ b_n &= (ab)_n = (aa)_{n-1} + (ba)_{n-1} = a_{n-1}. \end{aligned}$$

Tyto rovnice také můžeme odvodit následující úvahou. Vyhovující slovo končící písmenem A má koncovku BA nebo BAA, počet slov prvního typu je b_{n-1}, slov druhého typu je b_{n-2}. Vyhovující slovo končící písmenem B má nutně koncovku AB a těchto slov je a_{n-1}.

Poznámka 2. Ze vztahů uvedených v poznámce 1 se dá odvodit rekurentní rovnice přímo pro čísla p_n. Pro každé $n \geqq 4$ totiž platí

$$\begin{aligned} a_n &= b_{n-1} + b_{n-2} = a_{n-2} + a_{n-3}, \\ b_n &= a_{n-1} = b_{n-2} + b_{n-3}. \end{aligned}$$

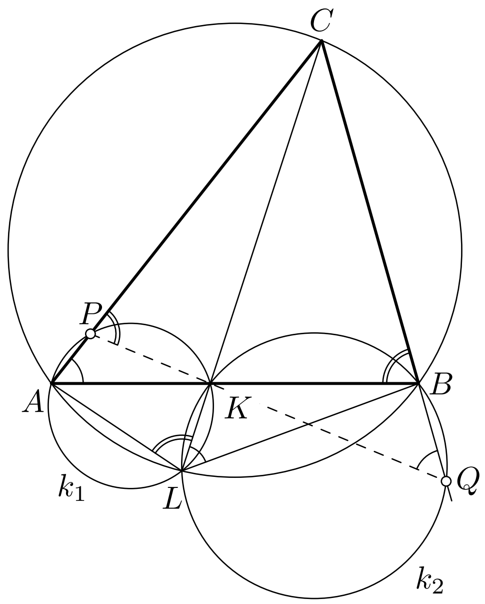
Vzhledem k tomu, že $p_n = a_n + b_n$, dostaneme sečtením těchto vztahů rovnici

$$p_n = p_{n-2} + p_{n-3},$$

kterou můžeme odvodit i takto: Každé vyhovující slovo délky n má právě jednu z koncovek $ABAA$, ABA, BAB, $BAAB$, přitom koncovky ABA a BAB má právě p_{n-2} slov, zatímco koncovky $ABAA$ a $BAAB$ má právě p_{n-3} slov.

Za úplné řešení je 6 bodů. Za jakýkoli úplný systém rovnic, který umožňuje rekurentní výpočet čísel p_n, udělte 4 body.

3. a) V tětivovém čtyřúhelníku $ALBC$ platí $\alpha = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BLC|$ a $\beta = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ALC|$ (obr. 1). Z rovnosti obvodového a příslušného úsekového úhlu pro tětivu AK v kružnici k_1 vyplývá, že přímka AC je tečnou ke kružnici k_1, právě když platí $|\sphericalangle CAK| = |\sphericalangle ALK|$, tj. právě když $\alpha = \beta$. Z analogických důvodů je přímka BC tečnou ke kružnici k_2, právě když $\beta = \alpha$. Přímka AC je proto tečnou ke kružnici k_1, právě když přímka BC je tečnou ke kružnici k_2, což jsme chtěli dokázat.



Obr. 1

b) Podle části a) víme, že platí $\alpha = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BLK|$ a $\beta = |\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ALK|$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že platí $\alpha < \beta$. Tečna v bodě A ke kružnici k_1 svírá s tětivou AK úsekový úhel $\beta > \alpha$, proto leží bod P na polopřímce AC, zatímco bod Q leží analogicky na polopřímce opačné k BC. Z tětivových čtyřúhelníků $ALKP$ a $BQLK$ plynou rovnosti $|\sphericalangle KPC| = \beta$ a $|\sphericalangle BQK| = \alpha$ (obr. 1). Trojúhelníky APK a QBK se proto shodují ve dvou úhlech (u vrcholů A, Q a P, B). Shodují se tedy i v úhlu při společném vrcholu K:

$$|\sphericalangle AKP| = |\sphericalangle BKQ| \ (= \beta - \alpha).$$

Odtud plyne, že body P, K, Q leží na téže přímce. Tím je tvrzení části b) dokázáno.

Poznámka. Dokázali jsme vlastně následující tvrzení: Je-li trojúhelník ABC rovnoramenný s rameny AC, BC, dotýkají se obě ramena odpovídajících kružnic k_1 a k_2 ve vrcholech A a B, a není-li rovnoramenný, protínají jeho strany AC a BC odpovídající kružnice k_1 a k_2 v dalších bodech P a Q ($P \neq A$, $Q \neq B$), přičemž jejich spojnice PQ prochází daným bodem K.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho za část a) nejvýše 2 body a za část b) nejvýše 4 body.

4. Užitím sinové věty v trojúhelnících BKA a CKA dostaneme

$$\frac{|BK|}{|AK|}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\beta} \qquad \text{a} \qquad \frac{|CK|}{|AK|}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\gamma}.$$

Sečtením obou předešlých rovností vyjde

$$\frac{|BC|}{|AK|}=\frac{|BK|}{|AK|}+\frac{|CK|}{|AK|}=\sin\frac{\alpha}{2}\left(\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\right).$$

Vynásobíme-li obě strany poslední rovnosti výrazem $2\cos\frac{\alpha}{2}$, obdržíme po úpravě

$$2\,\frac{|BC|}{|AK|}\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha\left(\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\right). \tag{1}$$

Cyklickou záměnou získáme další dvě analogické rovnosti

$$2\,\frac{|CA|}{|BL|}\cos\frac{\beta}{2}=\sin\beta\left(\frac{1}{\sin\gamma}+\frac{1}{\sin\alpha}\right), \tag{2}$$

$$2\,\frac{|AB|}{|CM|}\cos\frac{\gamma}{2}=\sin\gamma\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}\right). \tag{3}$$

Sečtením rovností (1), (2) a (3) dostaneme po dělení dvěma rovnost

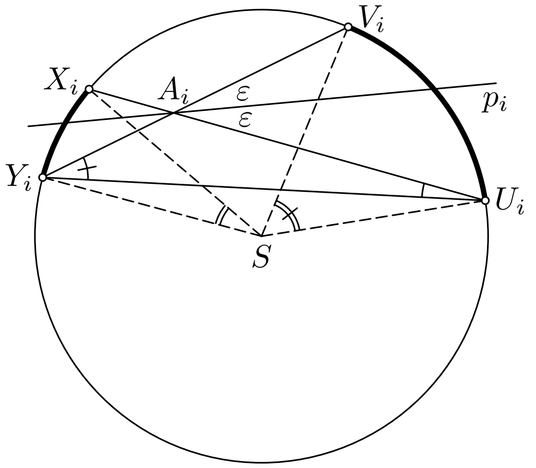
$$\frac{|BC|}{|AK|}\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{|CA|}{|BL|}\cos\frac{\beta}{2}+\frac{|AB|}{|CM|}\cos\frac{\gamma}{2}=$$
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}+\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}+\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\right).$$

Vzhledem k tomu, že $\sin\alpha$, $\sin\beta$, $\sin\gamma$ jsou kladná čísla, můžeme každý ze tří výrazů v závorkách na pravé straně poslední rovnosti odhadnout zdola číslem dvě (využíváme známou nerovnost $a/b+b/a\geqq 2$, která je pro libovolná kladná čísla a, b ekvivalentní se zřejmou nerovností $(a-b)^2\geqq 0$). Odtud plyne požadovaná nerovnost. Tím je důkaz hotov.

Za úplné řešení je 6 bodů. Pokud řešitel dospěje ke vhodnému vyjádření hodnoty výrazu na levé straně, ale nedokáže jeho dolní odhad, udělte nejvýše 3 body. Nerovnost $a/b+b/a\geqq 2$ lze považovat za natolik známou, že může být použita bez důkazu.

3. *V rovině je dána kružnice k a 121 jejích sečen $p_1, p_2, \dots, p_{121}$. Uvnitř této kružnice je na každé přímce p_i dán bod A_i. Dokažte, že na kružnici k existuje bod X takový, že úsečka A_iX svírá s přímkou p_i úhel menší než $21°$ pro nejméně 29 různých indexů i.* (J. Šimša)

Řešení. Pro libovolné i, $1 \leqq i \leqq 121$, označme M_i množinu všech bodů X kružnice k, pro něž úsečka A_iX svírá s odpovídající přímkou p_i úhel velikosti menší než $\varepsilon = 21°$. Množina M_i je zřejmě tvořena dvěma oblouky X_iY_i a U_iV_i (obr. 1). Oběma uvažovaným obloukům kružnice k odpovídá dvojice středových úhlů X_iSY_i a U_iSV_i, kde S je střed dané kružnice k. Ukážeme, že pro každé $i \in \{1, 2, \dots, 121\}$ platí $|\sphericalangle X_iSY_i| + |\sphericalangle U_iSV_i| = 4\varepsilon = 84°$.



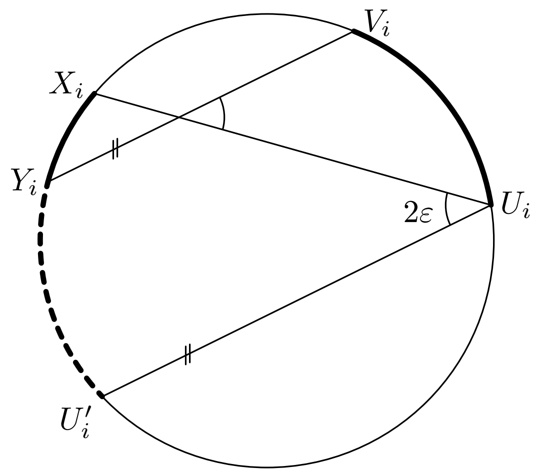
Obr. 1

V trojúhelníku $A_iY_iU_i$ je součet velikostí vnitřních úhlů při vrcholech Y_i a U_i roven velikosti vedlejšího úhlu při vrcholu A_i, tj. 2ε. Avšak součet obou uvažovaných vnitřních úhlů v trojúhelníku $A_iY_iU_i$ je roven součtu obvodových úhlů odpovídajících obloukům X_iY_i a U_iV_i. Ze vztahu mezi obvodovým a středovým úhlem dostáváme

$$|\sphericalangle X_iSY_i| + |\sphericalangle U_iSV_i| = 2 \cdot 2\varepsilon = 4\varepsilon = 84°.$$

Celkově tak 121 uvažovaným tětivám p_i a jejich bodům A_i odpovídá 121 dvojic oblouků X_iY_i a U_iV_i kružnice k s celkovou obloukovou délkou $121 \cdot 84° = 10\,164°$. Pokud každý bod X kružnice k náleží nejvýše 28 množinám M_i, musí být uvedený součet všech obloukových délek nejvýše roven $28 \cdot 360° = 10\,080°$, což neplatí. Proto existuje aspoň jeden bod kružnice k, který náleží současně aspoň 29 množinám M_i, což jsme měli dokázat.

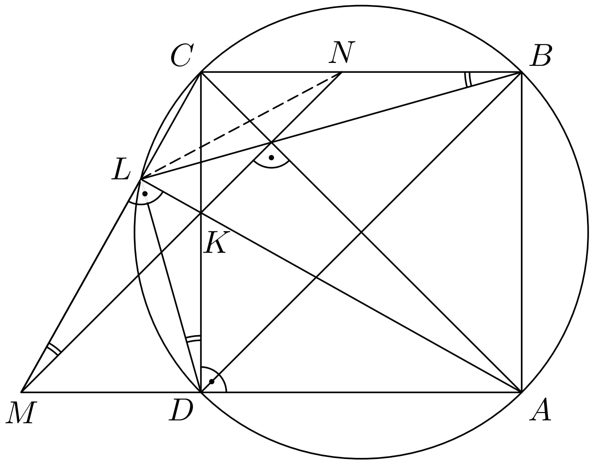
Poznámka. Že oběma obloukům X_iY_i a U_iV_i odpovídá dohromady středový úhel 4ε, nahlédneme snadno i z obr. 2, neboť oblouky $U_i'Y_i$ a U_iV_i jsou shodné.



Obr. 2

5. *Nechť L je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku CD kružnice opsané čtverci $ABCD$. Označme K průsečík přímek AL a CD, M průsečík přímek AD a CL a N průsečík přímek MK a BC. Dokažte, že body B, L, M, N leží na téže kružnici.* *(J. Švrček)*

Řešení. Úhlopříčka AC je průměrem kružnice opsané čtverci $ABCD$, takže podle Thaletovy věty je úhel ALC pravý (obr. 3). Bod K je tak průsečíkem výšek CD a AL



Obr. 3

v trojúhelníku ACM, takže i přímka MK je kolmá na AC a protíná stranu BC daného čtverce v jejím vnitřním bodě N, neboť $MK \parallel DB$.

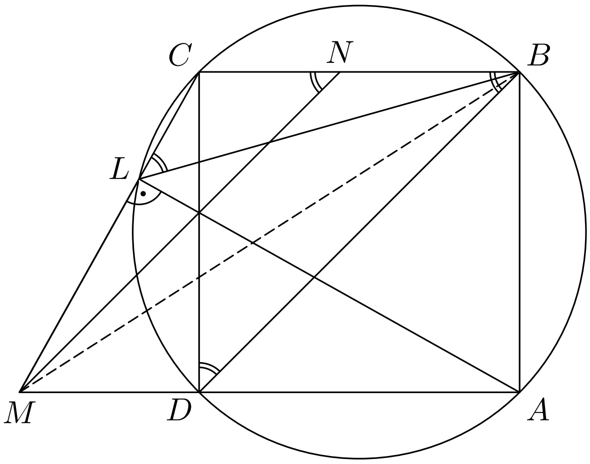
Nyní lze tvrzení úlohy dokázat několika způsoby.

1. Čtyřúhelníky $BCLD$ a $KLMD$ jsou tětivové, proto podle věty o obvodových úhlech postupně platí

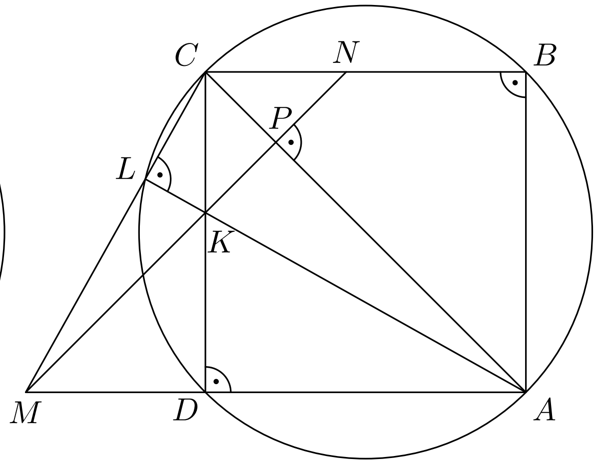
$$|\sphericalangle NBL| = |\sphericalangle CBL| = |\sphericalangle CDL| = |\sphericalangle KDL| = |\sphericalangle KML| = |\sphericalangle NML|.$$

Protože body B a M leží v téže polorovině vyťaté přímkou NL, leží body B, L, M, N na téže kružnici.

2. Protože $MN \parallel DB$, je $|\sphericalangle MNC| = 45°$, rovněž úhel BLC nad tětivou BC kružnice k má velikost $45°$ (obr. 4), je tedy $|\sphericalangle BLM| = |\sphericalangle BNM| = 135°$. Body L a N zřejmě leží v téže polorovině vyťaté přímkou MB, proto leží body B, L, M, N na téže kružnici.



Obr. 4



Obr. 5

3. Označme P patu výšky z vrcholu M na stranu AC a uvažujme čtyřúhelníky $ABNP$, $APKD$ a $DKLM$ (obr. 5). Podle Thaletovy věty jsou všechny tři čtyřúhelníky tětivové. Vrchol C daného čtverce $ABCD$ leží vně každé ze tří kružnic opsaných uvažovaným tětivovým čtyřúhelníkům, takže užitím věty o mocnosti bodu C ke kružnicím opsaným

po řadě čtyřúhelníkům $ABNP$, $APKD$, $DKLM$ obdržíme následující tři rovnosti

$$\begin{aligned} |CN| \cdot |CB| &= |CP| \cdot |CA|, \\ |CP| \cdot |CA| &= |CK| \cdot |CD|, \\ |CK| \cdot |CD| &= |CL| \cdot |CM|, \end{aligned}$$

z nichž bezprostředně vyplývá rovnost

$$|CN| \cdot |CB| = |CL| \cdot |CM|.$$

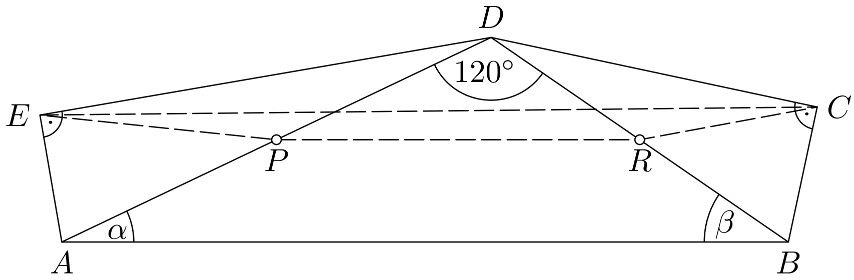
Odtud již plyne, že body B, L, M, N leží na téže kružnici.

2. Určete, jakou největší délku může mít úhlopříčka CE konvexního pětiúhelníku $ABCDE$, jehož strana AB má délku 6 cm, vnitřní úhly při vrcholech C a E jsou pravé a úhel ADB má velikost $120°$.

2. Nechť $ABCDE$ je libovolný konvexní pětiúhelník s uvažovanými vlastnostmi. Označme P, R po řadě středy stran AD, BD trojúhelníku ABD (obr. 1). Pak bude

$$|PR| = \frac{1}{2}|AB|, \qquad |CR| = \frac{1}{2}|BD|, \qquad |PE| = \frac{1}{2}|AD|, \tag{1}$$

protože PR je střední příčka trojúhelníku ABD a protože v pravoúhlém trojúhelníku je střed přepony zároveň středem jeho opsané kružnice (Thaletova věta).



Obr. 1

Z trojúhelníkové nerovnosti je zřejmé, že pro délku úhlopříčky CE platí

$$|CE| \leqq |CR| + |RP| + |PE| = s,$$

kde délka s lomené čáry $CRPE$ je podle (1) zároveň rovna polovině obvodu trojúhelníku ABD.

Dále zkoumejme, kdy bude mít trojúhelník ABD daných vlastností ($|AB| = 6\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle ADB| = 120°$) největší obvod. Označíme-li α a β (obr. 1) velikosti vnitřních úhlů při vrcholech A a B trojúhelníku ABD ($\alpha + \beta = 60°$), dostaneme ze sinové věty v trojúhelníku ABD

$$|BD| = |AB|\frac{\sin\alpha}{\sin 120°}, \quad |AD| = |AB|\frac{\sin\beta}{\sin 120°}.$$

Sečtením obou předchozích rovností vyjde

$$|AD| + |BD| = |AB|\,\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin 120°} = 2|AB|\,\frac{\sin 30°}{\sin 120°}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \leqq 2|AB|\frac{\sqrt{3}}{3},$$

přičemž rovnost v poslední nerovnosti nastává, právě když $\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = 1$, tj. pro $\alpha = \beta = 30°$. Trojúhelník ABD má tedy největší obvod, právě když je rovnoramenný a jeho úhly při základně AB mají velikost $30°$. Vzhledem k tomu, že $|AB| = 6\,\mathrm{cm}$, platí pro libovolný pětiúhelník $ABCDE$ požadovaných vlastností

$$|CE| \leqq s = \frac{1}{2}(|AB| + |AD| + |BD|) \leqq \frac{1}{2}|AB|\left(1 + 2\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \big(3 + 2\sqrt{3}\big)\,\mathrm{cm}.$$

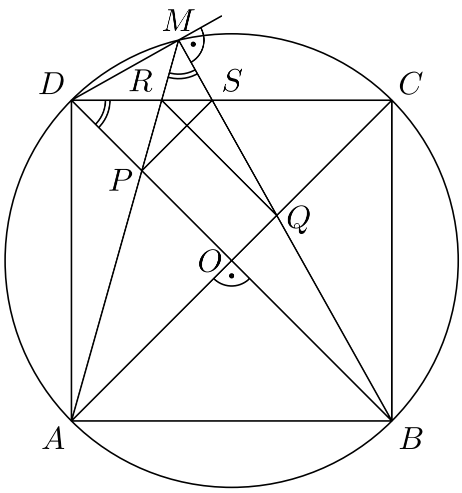
Přitom pro uvažovaný pětiúhelník $ABCDE$ v situaci, kdy trojúhelník ABD je rovnoramenný a vrcholy C, E leží na přímce RP, platí $|CE| = (3 + 2\sqrt{3})\,\mathrm{cm}$.

Největší délka úhlopříčky CE pětiúhelníku $ABCDE$ vyhovujícího podmínkám úlohy je tedy $(3 + 2\sqrt{3})\,\mathrm{cm}$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Pokud řešitel nedokáže, že trojúhelník ABD s největším obvodem je rovnoramenný (ale pouze tuto skutečnost uvede), udělte nejvýše 4 body, za náznak důkazu využívající vlastností elipsy 3 body. Pokud řešitel nepopíše dosažení horního odhadu pro délku úhlopříčky CE, strhněte 1 bod.

2. *Nechť M je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku CD kružnice opsané čtverci $ABCD$. Označme P, R průsečíky přímky AM po řadě s úsečkami BD, CD a podobně Q, S průsečíky přímky BM s úsečkami AC, DC. Dokažte, že přímky PS a QR jsou navzájem kolmé.*

Řešení. Označme O střed daného čtverce $ABDC$ (obr. 1). Protože bod M leží na zmíněném oblouku, má úhel AMB velikost rovnou polovině velikosti středového (pravého) úhlu AOB, tedy $45°$. Protože stejnou velikost má ve čtverci $ABCD$ úhel BDC,



Obr. 1

je pod úhlem $45°$ z bodů D, M vidět tutéž úsečku PS. Protože navíc oba body D, M leží ve stejné polorovině s hranicí PS, je $PSMD$ tětivový čtyřúhelník. Jeho vnitřní úhel DMS je pravý (bod M totiž leží na Thaletově kružnici nad průměrem BD), takže je pravý i vnitřní úhel DPS. Tak jsme dokázali, že $PS \perp BD$. Zcela obdobně se ukáže, že $QR \perp AC$. Z posledních dvou vztahů již plyne, že $PS \perp QR$ (neboť $AC \perp BD$).

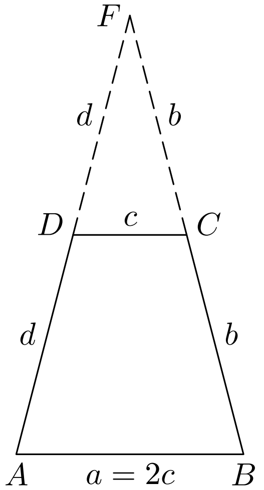
Návodné a doplňující úlohy:

1. Připomeňte si a dokažte věty o obvodových, středových a úsekových úhlech v kružnici.
2. Nechť L je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku CD kružnice opsané čtverci $ABCD$. Označme K průsečík přímek AL a CD, M průsečík přímek AD a CL a N průsečík přímek MK a BC. Dokažte, že body B, L, M, N leží na téže kružnici. [MO 53–A–III–5, viz internetové stránky MO.]
3. V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ platí rovnosti $|BC| = |CD| = |DA|$ a $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC| = 36°$. Na základně AB je dán bod K tak, že $|AK| = |AD|$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům AKD a KBC mají vnější dotyk. [MO 53–B–I–2, viz internetové stránky MO.]

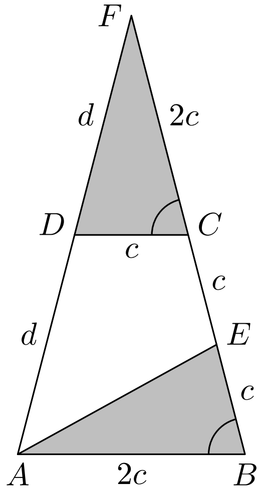
5. *V lichoběžníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$) platí $|AB| = 2|CD|$. Označme E střed ramene BC. Dokažte, že rovnost $|AB| = |BC|$ platí, právě když čtyřúhelník $AECD$ je tečnový.*

Řešení. Označme obvyklým způsobem a, b, c, d délky stran daného lichoběžníku. Podle zadání platí rovnost $a = 2c$, jež znamená, že základna CD je střední příčkou trojúhelníku ABF, kde F je průsečík ramen BC a AD prodloužených za vrchol C resp. D (obr. 2). Proto též platí $|CF| = b$ a $|DF| = d$.

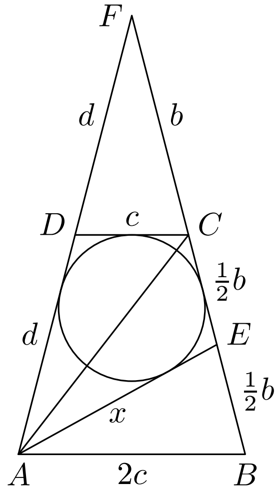
V první části řešení předpokládejme, že $|AB| = |BC|$ neboli $2c = b$ (obr. 3). Pak $|CF| = b = 2c$ a $|EB| = |EC| = \frac{1}{2}b = c$, takže trojúhelníky ABE a FCD (jež jsou na obr. 3 vybarveny) jsou shodné podle věty *sus* (jejich strany délek $2c$ a c svírají souhlasné úhly, vyťaté přímkou BC mezi rovnoběžkami AB a CD). Ze shodnosti třetích stran AE a FD pak plyne rovnost $|AE| = d$. Tak přicházíme k závěru, že strany čtyřúhelníku $AECD$ mají délky d, c, c, d; jde tudíž o tečnový čtyřúhelník (dokonce deltoid, případně kosočtverec).



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

V druhé části řešení předpokládejme, že čtyřúhelník $AECD$ je tečnový, takže podle známé věty pro délky jeho stran platí rovnost $|AE| + |CD| = |EC| + |AD|$, neboli $x + c = \frac{1}{2}b + d$, kde $x = |AE|$ (obr. 4). Odtud vyjádříme délku x, se kterou budeme dále pracovat, ve tvaru

$$x = \frac{b}{2} - c + d. \tag{1}$$

Všimněme si nyní, že úsečky CD, AC a AE dělí trojúhelník ABF na čtyři trojúhelníky téhož obsahu. (Podrobněji: z $|AD| = |DF|$, $|BC| = |CF|$ a $|BE| = |EC|$ plyne řetězec rovností $S_{ADC} = S_{CDF} = \frac{1}{2}S_{ACF} = \frac{1}{2}S_{ABC} = S_{ABE} = S_{ACE}$.) Proto pro obsahy čtyřúhelníku $AECD$ a trojúhelníku AEF platí úměra $S_{AECD} : S_{AEF} = 2 : 3$. Tyto dva mnohoúhelníky však mají společnou vepsanou kružnici, takže ve stejném poměru $2 : 3$ musí být i jejich obvody (připomeňme, že obsah mnohoúhelníku s obvodem o a vepsanou kružnicí o poloměru ϱ je roven $\frac{1}{2}o \cdot \varrho$). Protože tyto obvody mají vyjádření

$$o_{AECD} = x + \frac{b}{2} + c + d, \quad o_{AEF} = x + \frac{3b}{2} + 2d,$$

platí úměra $(x + \frac{1}{2}b + c + d) : (x + \frac{3}{2}b + 2d) = 2 : 3$, ze které snadno vyjádříme neznámou x jako

$$x = \frac{3b}{2} - 3c + d. \tag{2}$$

Porovnáním (1) a (2) dostaneme rovnost $b = 2c$, neboli $b = a$. Tím je rovnost $|AB| = |BC|$ dokázána.

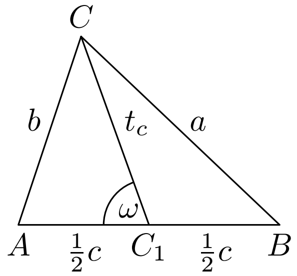
Jiné řešení. Připomeňme nejdříve vyjádření délek těžnic trojúhelníku pomocí délek jeho stran: v obecném trojúhelníku ABC při obvyklém označení platí vzorec

$$4t_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2. \tag{1}$$

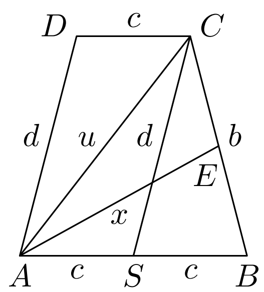
Odvození (1) je snadné: stačí sečíst rovnosti

$$b^2 = \left(\frac{1}{2}c\right)^2 + t_c^2 - ct_c \cos\omega, \quad a^2 = \left(\frac{1}{2}c\right)^2 + t_c^2 + ct_c \cos\omega,$$

které platí podle kosinové věty pro trojúhelníky ACC_1 a BCC_1, kde C_1 je střed strany AB a $\omega = |\sphericalangle AC_1C|$ (obr. 5).



Obr. 5



Obr. 6

V daném lichoběžníku $ABCD$ (v němž platí $a = 2c$) uvažujme kromě středu E ramene BC ještě střed S základny AB a označme $x = |AE|$ a $u = |AC|$ (obr. 6). Protože $|AS| = |SB| = \frac{1}{2}a = c$, je $ASCD$ rovnoběžník, tudíž $|CS| = d$. Nyní podle vzorců (1) vyjádříme délky těžnic AE a CS trojúhelníku ABC:

$$4x^2 = 2u^2 + 2(2c)^2 - b^2 \quad \text{a} \quad 4d^2 = 2u^2 + 2b^2 - (2c)^2.$$

Vzájemným odečtením těchto rovnic vyloučíme veličinu u a dostaneme

$$4(x^2 - d^2) = 3(4c^2 - b^2), \quad \text{neboli} \quad 4(x - d)(x + d) = 3(2c - b)(2c + b).$$

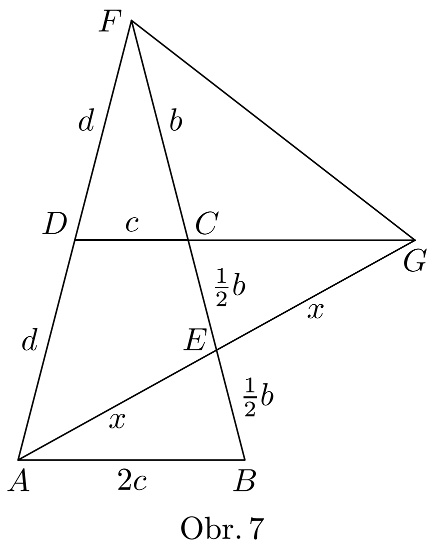
Odtud plyne, že znaménko rozdílu $x - d$ je vždy stejné jako znaménko rozdílu $2c - b$. Ukažme, že z tohoto poznatku plyne celé řešení naší úlohy. Použijeme k tomu známé kritérium pro tečnové čtyřúhelníky: čtyřúhelník $AECD$ je tečnový, právě když se rovnají oba součty délek jeho protilehlých stran, tj. právě když $x + c = d + \frac{1}{2}b$.

Je-li $b = 2c$, pak podle našeho poznatku $x = d$, a tedy $AECD$ je deltoid (případně kosočtverec). (Rovnost $x + c = d + \frac{1}{2}b$ tehdy platí dokonce „sčítanec po sčítanci“.)

Je-li $b > 2c$, pak podle našeho poznatku $x < d$, a tedy $x + c < d + \frac{1}{2}b$, takže čtyřúhelník $AECD$ není tečnový.

Je-li $b < 2c$, pak podle našeho poznatku $x > d$, a tedy $x + c > d + \frac{1}{2}b$, takže čtyřúhelník $AECD$ není tečnový.

Další řešení. V lichoběžníku $ABCD$, v němž platí $a = 2c$, uvažujme kromě středu E ramene BC a průsečíku F prodloužených ramen BC, AD ještě průsečík G přímek AE, CD (obr. 7). Snadno vysvětlíme, že úsečky EF a DG jsou těžnice trojúhel-



Obr. 7

níku AFG (a bod C jeho těžiště). Platí-li rovnost $b = 2c$, jsou tyto těžnice shodné, a proto je trojúhelník AFG rovnoramenný se základnou FG, tudíž $AECD$ je deltoid (nebo kosočtverec). Lze-li naopak čtyřúhelníku $AECD$ vepsat kružnici, je tato kružnice vepsána i oběma trojúhelníkům AEF a ADG, jež mají shodné obsahy (totiž rovné vždy polovině obsahu trojúhelníku AFG). Pak se ovšem musí rovnat i jejich obvody, což pro délku $x = |AE| = |EG|$ dává rovnici

$$x + \frac{3b}{2} + 2d = 2x + 3c + d,$$

ze které vychází vyjádření neznámé x ve tvaru (2) z prvního řešení. Stejně jako tam pak dojdeme k rovnosti $b = 2c$.

Nad obrázkem 7 lze uvažovat i takto: čtyřúhelník $AECD$ bude tečnový, právě když splynou kružnice vepsané trojúhelníkům AEF a ADG. Tyto trojúhelníky mají totožná ramena vnitřních úhlů při společném vrcholu A, takže jejich vepsané kružnice splynou, právě když budou mít shodné poloměry. To je však ekvivalentní s tím, že oba trojúhelníky mají stejný obvod (vždy totiž mají stejný obsah). Protože společná část hranic trojúhelníků AEF a ADG je tvořena lomenou čarou EAD, rovnají se jejich obvody, právě když platí rovnost $|DF| + |FE| = |DG| + |GE|$. Protože $DE \parallel FG$, je z úvahy o elipse s ohnisky D, E jasné, že odvozená rovnost nastane, právě když úsečky DE a FG mají společnou osu souměrnosti (a $AECD$ je pak deltoid, případně kosočtverec).

Návodné a doplňující úlohy:

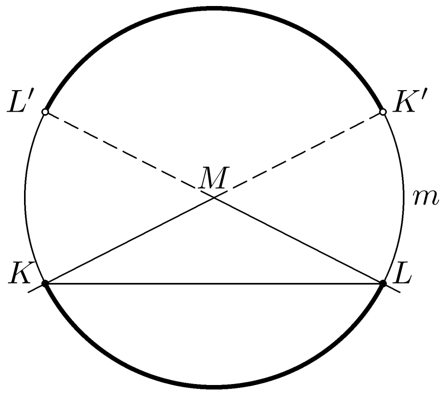
1. Připomeňte si a dokažte *kritérium pro tečnové čtyřúhelníky*: Konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je tečnový, právě když se rovnají oba součty délek jeho protilehlých stran, tj. právě když $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$.
2. Nechť D, E značí body dotyku strany AB a kružnice vepsané trojúhelníku ABC, resp. kružnice připsané jeho straně AB (tj. kružnice dotýkající se strany AB a polopřímek opačných k polopřímkám AC a BC). Dokažte, že body D, E mají vzdálenosti od vrcholů A, B dané vzorci

$$|AD| = |BE| = \frac{|AB| + |AC| - |BC|}{2}, \quad |BD| = |AE| = \frac{|AB| + |BC| - |AC|}{2}.$$

[Návod: Využijte několikrát toho, že pro body dotyku $T_{1,2}$ obou tečen sestrojených z libovolného vnějšího bodu X k dané kružnici platí $|XT_1| = |XT_2|$.]
3. Uvnitř stran AB, BC, CD a DA konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ jsou po řadě zvoleny body K, L, M a N. Označme S průsečík přímek KM a LN. Je-li možno vepsat kružnice čtyřúhelníkům $AKSN$, $BLSK$, $CMSL$ a $DNSM$, je možno vepsat kružnici i čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte. [MO 51–B–II–3, viz internetové stránky MO.]

3. V rovině je dán rovnoramenný trojúhelník KLM se základnou KL. Uvažujme libovolné dvě kružnice k a l, které mají vnější dotyk a které se dotýkají přímek KM a LM po řadě v bodech K a L. Určete množinu dotykových bodů T všech takových kružnic k a l.

3. Ukážeme, že hledanou množinu tvoří body K a L a dále vnitřní body oblouku KL kružnice $m(M, |MK|)$ a oblouku $K'L'$ středově souměrně sdruženého s obloukem KL podle středu M (obr. 1).

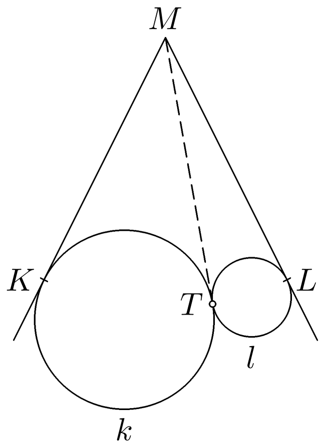


Obr. 1

Dokažme nejdříve, že přímka MT (obr. 2) je (vnitřní) společnou tečnou kružnic k a l. Připusťme, že přímka MT protne kružnici k v bodech T, T_1 a kružnici l v bodech T, T_2. Pro mocnosti bodu M (je to bod tečny, proto leží ve vnější oblasti každé z obou kružnic k a l) k oběma kružnicím platí

$$|MT| \cdot |MT_1| = |MK|^2 = |ML|^2 = |MT| \cdot |MT_2|,$$

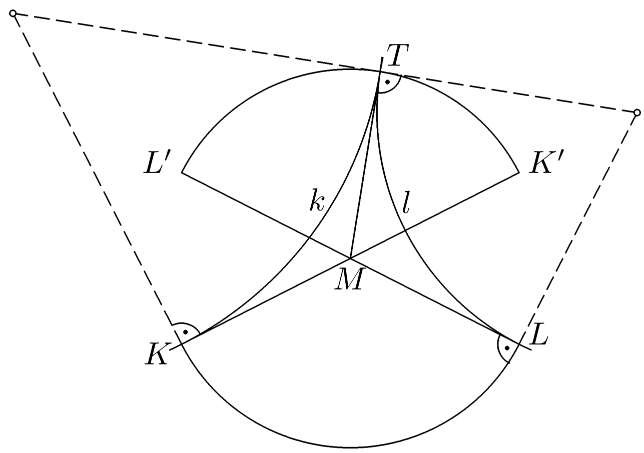
odkud $|MT_1| = |MT_2|$. Protože oba body T_1, T_2 leží na téže polopřímce MT, plyne odtud $T_1 = T_2$. Obě kružnice k a l však mají společný jediný bod, takže $T_1 = T_2 = T$. Proto je MT společná tečna obou kružnic a navíc $|MT| = |MK| = |ML|$, bod T tedy leží na kružnici $m(M, |MK|)$.



Obr. 2

Protože přímka MT obě kružnice odděluje, neleží body K a L uvnitř téže poloroviny určené přímkou MT, přímka MT protíná stranu KL trojúhelníku KLM, a proto bod T leží na jednom z kratších oblouků KL, $K'L'$ kružnice m.

Je-li naopak T libovolný vnitřní bod jednoho z těchto oblouků (obr. 3), leží sousední konvexní úhly KMT a LMT na opačných stranách společného ramene MT. Z rovností $|MK| = |MT|$ a $|ML| = |MT|$ pak plyne, že do zmíněných úhlů lze vepsat kružnice tak, aby se dotkly ramen příslušného úhlu v bodech K a T, resp. L a T. To jsou vyhovující kružnice k, l s dotykovým bodem T.



Obr. 3

Je-li $T = K$, vyhovuje libovolná kružnice k dotýkající se přímky MK v bodě K a ležící v polorovině MKL' a kružnice l dotýkající se ramen úhlu KML v bodech K a L (ta je určena jednoznačně). Analogicky sestrojíme vyhovující kružnice k a l pro bod $T = L$.

Bod K' ani bod L' do hledané množiny patřit nemohou, protože K' leží na tečně KM k libovolné z kružnic k a analogicky bod L' leží na tečně LM k libovolné z kružnic l.

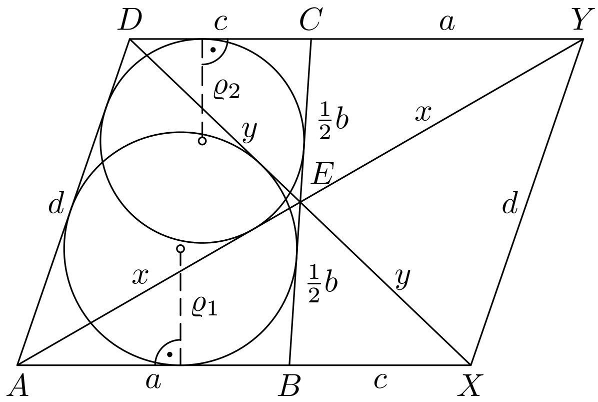
Za úplné řešení udělte 6 bodů. Pokud řešitel dokáže, že bod T leží na zmíněných obloucích, avšak neověří, že naopak každý jejich bod je bodem dotyku některé vyhovující dvojice kružnic, strhněte 2 body. Pokud řešitel přehlédne existenci bodů T na oblouku $K'L'$, strhněte rovněž 2 body. Pokud řešitel opomene aspoň jednu z možností $T = K$, $T = L$, strhněte 1 bod.

3. *V lichoběžníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$) označme E střed ramene BC. Jsou-li oba čtyřúhelníky $ABED$ a $AECD$ tečnové, splňují délky stran lichoběžníku $ABCD$ označené obvyklým způsobem rovnosti*

$$a + c = \frac{b}{3} + d \qquad \text{a} \qquad \frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{3}{b}.$$

Dokažte. *(R. Horenský)*

Řešení. Označme $x = |AE|$, $y = |DE|$ a doplňme lichoběžník $ABCD$ na rovnoběžník $AXYD$ tak, aby bod E byl průsečíkem jeho úhlopříček AY a DX (obr. 1). Zřejmě platí $|AX| = |DY| = a + c$, $|AY| = 2x$ a $|DX| = 2y$.



Obr. 1

Označme ϱ_1 (resp. ϱ_2) poloměr kružnice vepsané tečnovému čtyřúhelníku $ABED$ (resp. $AECD$), jež je zároveň vepsána i trojúhelníku AXD (resp. AYD). Pro délky stran těchto čtyřúhelníků podle známého kritéria platí rovnosti

$$a + y = \frac{b}{2} + d = c + x,$$

neboli

$$a + y = c + x, \tag{1}$$

takže oba čtyřúhelníky mají týž obvod. Trojúhelníky AXD a AYD mají zase týž obsah (rovný $\frac{1}{2}S_{AXYD}$, tedy rovný S_{ABCD}). Poměr $\varrho_1 : \varrho_2$ se proto rovná jak poměru obsahů $S_{ABED} : S_{AECD}$, tak poměru obvodů $o_{AYD} : o_{AXD}$ (ty jsme zapsali v opačném pořadí než příslušné poloměry). Oba tyto poměry nyní vyjádříme a pak porovnáme (v značí výšku lichoběžníku $ABCD$):

$$\frac{S_{ABED}}{S_{AECD}} = \frac{S_{ABCD} - S_{CDE}}{S_{ABCD} - S_{ABE}} = \frac{\frac{1}{2}(a+c)v - \frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{2}v}{\frac{1}{2}(a+c)v - \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}v} = \frac{2a + c}{a + 2c},$$

$$\frac{o_{AYD}}{o_{AXD}} = \frac{2x + (a+c) + d}{2y + (a+c) + d}.$$

Spolu s (1) tak pro neznámé x, y dostáváme soustavu lineárních rovnic

$$\frac{2a + c}{a + 2c} = \frac{2x + a + c + d}{2y + a + c + d} \qquad \text{a} \qquad x - y = a - c,$$

jež má za podmínky $a \neq c$ (zaručené tím, že $ABCD$ je *licho*běžník) jediné řešení

$$x = \frac{3a + c - d}{2} \qquad \text{a} \qquad y = \frac{a + 3c - d}{2}. \tag{2}$$

Dosazením (2) do rovnosti (1) dostaneme první dokazovaný vztah $3(a + c) = b + 3d$. S jeho pomocí lze (2) přepsat do tvaru

$$x = a + \frac{b}{6} \qquad \text{a} \qquad y = c + \frac{b}{6}.$$

S tímto vyjádřením délek x, y využijeme kosinové věty pro trojúhelníky ABE, CDE k výpočtu kosinu úhlu ABE resp. DCE:

$$\cos|\sphericalangle ABE| = \frac{a^2 + (\frac{1}{2}b)^2 - (a + \frac{1}{6}b)^2}{2a \cdot \frac{1}{2}b} = \frac{2b}{9a} - \frac{1}{3},$$
$$\cos|\sphericalangle DCE| = \frac{c^2 + (\frac{1}{2}b)^2 - (c + \frac{1}{6}b)^2}{2c \cdot \frac{1}{2}b} = \frac{2b}{9c} - \frac{1}{3}.$$

Protože se úhly ABE a DCE doplňují do $180°$, je součet jejich kosinů roven nule:

$$\left(\frac{2b}{9a} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2b}{9c} - \frac{1}{3}\right) = 0.$$

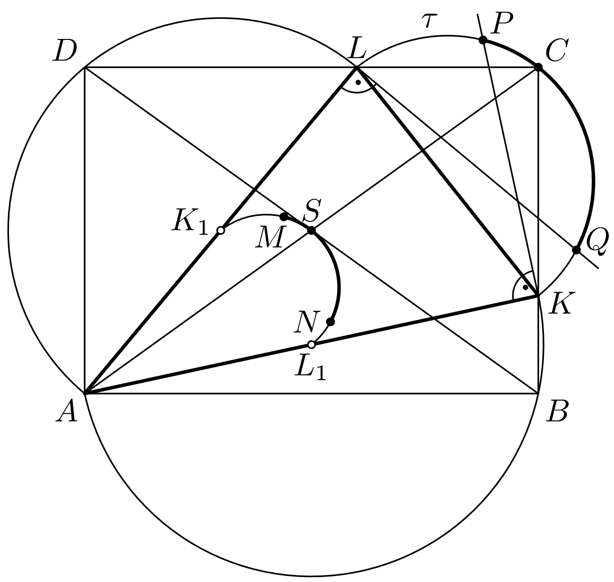
Odtud již snadnou úpravou dostaneme druhý dokazovaný vztah

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{3}{b}.$$

---

4. *V rovině je dán ostroúhlý trojúhelník AKL. Uvažujme libovolný pravoúhelník $ABCD$, který je trojúhelníku AKL opsán tak, že bod K leží na straně BC a bod L leží na straně CD. Určete množinu průsečíků S úhlopříček AC, BD všech takových pravoúhelníků $ABCD$.* *(J. Šimša)*

Řešení. Označme K_1 střed strany AL a L_1 střed strany AK. Ukážeme, že hledanou množinou bodů S je oblouk MN, který je částí polokružnice sestrojené nad průměrem K_1L_1 v polorovině opačné k polorovině K_1L_1A, přitom krajní body M, N zmíněného oblouku jsou určeny podmínkami $ML_1 \perp AK$ a $NK_1 \perp AL$ (obr. 2).

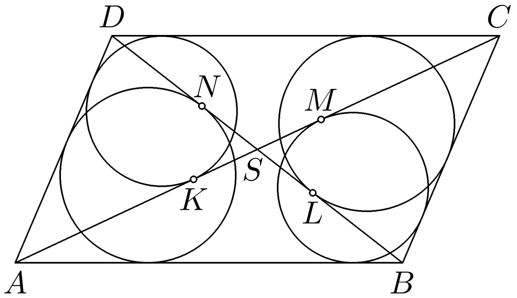


Obr. 2

Protože průsečík S úhlopříček AC, BD je středem úsečky AC, množinu všech bodů S dostaneme, když nejprve určíme množinu vrcholů C a tu pak zobrazíme ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem $\frac{1}{2}$. Protože je úhel KCL pravý (nemůže být ani $C = K$, ani $C = L$) a přímka KL body A a C odděluje, leží bod C na polokružnici τ sestrojené nad průměrem KL v polorovině opačné k polorovině KLA. Které body $C \in \tau$ jsou skutečně vrcholy vyhovujících pravoúhelníků $ABCD$? Zřejmě právě ty, pro něž polopřímky CK a CL protnou analogicky sestrojené polokružnice nad průměry AK resp. AL (v bodech, které budou vrcholy B resp. D). Jsou to body oblouku $PQ \subset \tau$, jehož krajní body P, Q jsou určeny podmínkami $PK \perp AK$ a $QL \perp AL$. Hledaná množina bodů S je proto obrazem oblouku PQ ve zmíněné stejnolehlosti, takže to je skutečně oblouk MN popsaný v úvodu řešení (body M, N jsou obrazy bodů P a Q, neboť bod L_1 je obrazem bodu K a bod K_1 je obrazem bodu L).

2. V rovnoběžníku $ABCD$ platí $|AB| > |BC|$. Označme K, L, M a N po řadě body dotyku kružnic vepsaných trojúhelníkům ACD, BCD, ABC a ABD s příslušnou úhlopříčkou AC, resp. BD. Dokažte, že $KLMN$ je obdélník.

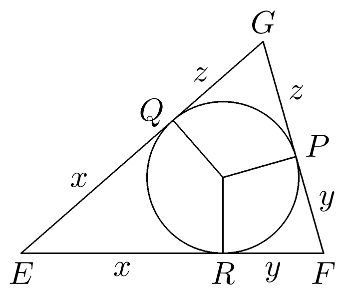
2. Rovnoběžník $ABCD$ je útvar středově souměrný podle průsečíku S úhlopříček AC, BD (obr. 1). Proto jsou podle středu S souměrně sdružené trojúhelníky ACD a CAB, tudíž i jejich kružnice vepsané a odpovídající si body dotyku K a M. Totéž platí i o dvojici



Obr. 1

bodů L a N. Docházíme tak k závěru, že $KLMN$ je rovnoběžník. (Možnosti $K = M = S$ nebo $L = N = S$ jsou vyloučeny podmínkou $|AB| > |BC|$, jež zaručuje, že zmíněné trojúhelníky nejsou rovnoramenné se základnou AC nebo BD, takže se vepsané kružnice nedotýkají těchto stran v jejich středu.)

Provedená úvaha o středové souměrnosti však nestačí k důkazu toho, že rovnoběžník $KLMN$ je obdélník, tj. že má shodné úhlopříčky KM a LN. K tomu budeme muset provést výpočet založený na známých vzorcích, které vyjadřují vzdálenosti vrcholů obecného trojúhelníku od bodů dotyku kružnice vepsané pomocí délek stran tohoto trojúhelníku (obr. 2):



Obr. 2

$$x = |ER| = |EQ| = \frac{|EF| + |EG| - |FG|}{2},$$
$$y = |FP| = |FR| = \frac{|FG| + |FE| - |EG|}{2},$$
$$z = |GP| = |GQ| = \frac{|GF| + |GE| - |EF|}{2}.$$

Připomeňme, že tyto vzorce plynou ze soustavy rovnic

$$x + y = |EF|, \quad y + z = |FG|, \quad x + z = |EG|.$$

Vraťme se k naší úloze a v daném čtyřúhelníku $ABCD$ označme ještě délky $a = |AB| = |CD|$, $b = |BC| = |AD|$, $e = |AC|$ a $f = |BD|$. Podle vzorců uvedených vedle obr. 2 platí rovnosti

$$|AK| = \frac{e + b - a}{2} = |CM| \qquad \text{a} \qquad |BL| = \frac{f + b - a}{2} = |DN|.$$

Z předpokladu úlohy $a > b$ proto plyne $|AK| < \frac{1}{2}e = |AS|$, takže bod K leží mezi body A a S a má od středu S vzdálenost

$$|KS| = |AS| - |AK| = \frac{e}{2} - \frac{e + b - a}{2} = \frac{a - b}{2}.$$

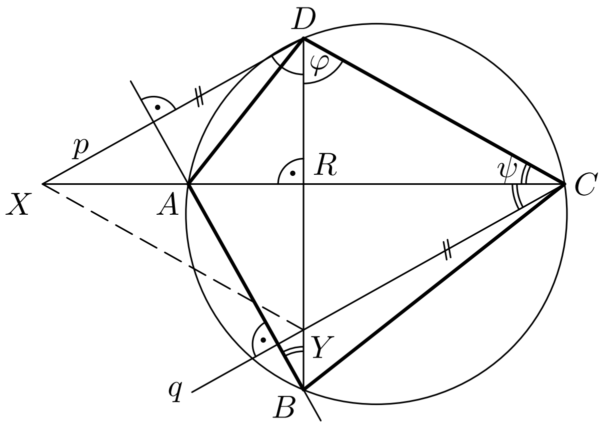
Obdobně vyjde, že body L, M, N leží po řadě na úsečkách BS, CS, DS a platí rovnosti $|LS| = |MS| = |NS| = \frac{1}{2}(a - b)$. To dohromady znamená, že čtyřúhelník $KLMN$ má shodné úhlopříčky, které se navzájem půlí; je to tedy obdélník. (Kdyby to byl čtverec, muselo by platit $KM \perp LN$, tedy $AC \perp BD$, což je ve sporu s tím, že $a \neq b$.)

Dodejme, že v předchozím odstavci jsme podali úplné řešení, které nevyžaduje úvahy o středové souměrnosti z úvodního odstavce.

Za úplné řešení udělte 6 bodů (absenci zdůvodnění, proč pravoúhelník $KLMN$ není čtverec, tolerujte). Dokáže-li řešitel pouze, že $KLMN$ je rovnoběžník, udělte 2 body. Chybí-li v jinak úplném řešení potřebné zdůvodnění, ve kterých „polovinách“ úhlopříček AC, BD body K, L, M, M leží, udělte 5 bodů.

2. *Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník s navzájem kolmými úhlopříčkami. Označme po řadě p, q kolmice z bodů D, C na přímku AB a dále X průsečík přímek AC a p a Y průsečík přímek BD a q. Dokažte, že $XYCD$ je kosočtverec nebo čtverec.*

Řešení. Označme R průsečík úhlopříček daného čtyřúhelníku a pro jednoduchost také φ, ψ velikosti úhlů CDR a DCR (obr. 1). Protože úhlopříčky jsou na sebe kolmé, je $\varphi + \psi = 90°$. Vzhledem k tomu, že oba vrcholy B, C leží ve stejné polorovině určené



Obr. 1

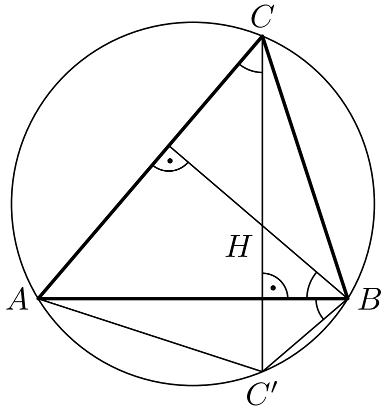
tětivou AD, plyne z rovnosti příslušných obvodových úhlů, že $|\sphericalangle ABD| = \psi$. A protože DX je kolmá na AB, je rovněž $|\sphericalangle XDB| = \varphi$. To znamená, že trojúhelník XCD je rovnoramenný se základnou XC. Úplně stejně ovšem zjistíme, že i trojúhelník YCD je rovnoramenný se základnou YD. Platí tedy $|XD| = |CD| = |CY|$, takže DX a CY jsou shodné a rovnoběžné úsečky. To znamená, že $XYCD$ je rovnoběžník, který jak víme, má tři strany shodné, tudíž je to kosočtverec nebo čtverec.

Jiné řešení. Využijeme ne zcela běžně známý poznatek, že bod souměrně sdružený s průsečíkem výšek daného trojúhelníku podle jeho libovolné strany leží na kružnici trojúhelníku opsané (viz návodnou úlohu).

Označme R průsečík úhlopříček daného čtyřúhelníku. Podle podmínek úlohy je X průsečík výšek trojúhelníku ABD a Y průsečík výšek trojúhelníku ABC. Podle předchozího tvrzení je bod C obrazem bodu X v osové souměrnosti podle přímky BD, takže R je střed úsečky XC. Analogicky je R střed úsečky YD. Protože úsečky XC a YD jsou na sebe kolmé, je $XYCD$ kosočtverec nebo čtverec.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Bod souměrně sdružený s průsečíkem výšek daného trojúhelníku podle jeho libovolné strany leží na kružnici trojúhelníku opsané. Dokažte. [Úhly ACC' a ABC' jsou shodné obvodové úhly nad společnou tětivou AC (obr. 2) a mají velikost $90° - \alpha$, což je i velikost úhlu HBA. Pokud $\alpha \geqq 90°$, zaměňte role vrcholů A a B.]



Obr. 2

2. Nechť obě úsečky spojující středy protilehlých stran konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ mají stejnou délku. Dokažte, že úhlopříčky AC a BD jsou navzájem kolmé a že platí rovnost
$$|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |DA|^2.$$
[47–B–S–2]
3. Nechť $ABCD$ je lichoběžník ($AB \parallel CD$), jehož úhlopříčky jsou navzájem kolmé. Dokažte nerovnost $|AB| + |CD| < |BC| + |DA|$. [46–B–II–3]

5. *Jsou dány úsečky délek a, b, c, d. Dokažte, že konvexní čtyřúhelníky $ABCD$ se stranami délek a, b, c, d (při obvyklém značení) existují, a přitom úhlopříčky každého z nich svírají jeden a týž úhel, právě když platí rovnost $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.*

Řešení. V libovolném konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ označme S průsečík úhlopříček a kromě délek stran uvažujme ještě veličiny $e = |AC|$, $f = |BD|$, $e_1 = |AS|$, $e_2 = |CS|$, $f_1 = |BS|$, $f_2 = |DS|$ a $\varphi = |\sphericalangle ASB|$. Podle kosinové věty platí rovnosti

$$\begin{aligned} a^2 &= e_1^2 + f_1^2 - 2e_1 f_1 \cos\varphi, \\ b^2 &= e_2^2 + f_1^2 + 2e_2 f_1 \cos\varphi, \\ c^2 &= e_2^2 + f_2^2 - 2e_2 f_2 \cos\varphi, \\ d^2 &= e_1^2 + f_2^2 + 2e_1 f_2 \cos\varphi. \end{aligned}$$

Sečteme-li první rovnost s třetí a od výsledku odečteme součet druhé a čtvrté, dostaneme

$$(a^2 + c^2) - (b^2 + d^2) = -2(e_1 f_1 + e_2 f_2 + e_2 f_1 + e_1 f_2) \cos\varphi,$$

neboli

$$(a^2 + c^2) - (b^2 + d^2) = -2ef \cos\varphi. \tag{1}$$

Odtud plyne takový závěr: platí-li rovnost $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$, pak v každém uvažovaném čtyřúhelníku je $\cos\varphi = 0$, tedy úhel φ je vždy pravý a délky stran mají vyjádření

$$a^2 = e_1^2 + f_1^2,\ b^2 = e_2^2 + f_1^2,\ c^2 = e_2^2 + f_2^2,\ d^2 = e_1^2 + f_2^2. \tag{2}$$

Abychom uzavřeli první část řešení, zdůvodníme ještě, že takové čtyřúhelníky (pro jakékoliv délky a, b, c, d splňující vztah $a^2+c^2 = b^2+d^2$) existují. Jistě můžeme předpokládat, že platí $d = \min\{a, b, c, d\}$; délku e_1 pak zvolíme v intervalu $(0, d)$ libovolně a podle (2) určíme

$$\begin{gathered} f_1 = \sqrt{a^2 - e_1^2}, \quad f_2 = \sqrt{d^2 - e_1^2}, \\ e_2 = \sqrt{c^2 - d^2 + e_1^2} \left(= \sqrt{b^2 - a^2 + e_1^2} \right) \end{gathered}$$

(vzhledem k učiněnému předpokladu je $c^2 - d^2 \geqq 0$). Tím je existence vyhovujících čtyřúhelníků (s navzájem kolmými úhlopříčkami) prokázána.

V druhé části řešení budeme naopak předpokládat, že aspoň jeden konvexní čtyřúhelník $A_0B_0C_0D_0$ se stranami daných délek a, b, c, d existuje; z úvahy o drátěném modelu čtyřúhelníku je jasné, že vyhovujících konvexních čtyřúhelníků $ABCD$ (tvarově blízkých $A_0B_0C_0D_0$) je pak nekonečně mnoho; jejich vnitřní úhly α, γ u vrcholů A, C jsou vázány podmínkou

$$a^2 + d^2 - 2ad\cos\alpha = b^2 - c^2 - 2bc\cos\gamma \tag{3}$$

(porovnání délky společné strany BD trojúhelníků ABD a BCD). Připusťme, že úhlopříčky všech těchto čtyřhelníků svírají týž úhel φ a že *levá strana rovnosti* (1) *je nenulová* (podle jejího znaménka je úhel φ buď ostrý, nebo tupý, takže se nemůže stát, že pro část vyhovujících čtyřúhelníků má velikost φ_0, a pro ostatní $\pi - \varphi_0$). Pak z rovnosti (1) můžeme vypočítat součin ef, který je tudíž pro všechny vyhovující čtyřúhelníky stejný; ze vzorce pro jejich obsah $S = \frac{1}{2}ef\sin\varphi$ nakonec plyne, že i hodnota S je jedna a táž. Protože obsah S můžeme vyjádřit i vzorcem $S = \frac{1}{2}ad\sin\alpha + \frac{1}{2}bc\sin\gamma$, docházíme k závěru: existují takové konstanty R_1 a R_2, že všechny vyhovující čtyřúhelníky splňují vztahy

$$ad\cos\alpha - bc\cos\gamma = R_1, \quad ad\sin\alpha + bc\sin\gamma = R_2$$

(první vztah je důsledkem (3), ve druhém $R_2 = 2S > 0$). Z nich dále vyplývá

$$\begin{aligned}(bc)^2 &= (bc\cos\gamma)^2 + (bc\sin\gamma)^2 = (ad\cos\alpha - R_1)^2 + (R_2 - ad\sin\alpha)^2 = \\ &= (ad)^2 + R_1^2 + R_2^2 - 2ad(R_1\cos\alpha + R_2\sin\alpha).\end{aligned}$$

Protože $ad \neq 0$, lze z poslední rovnosti vypočítat hodnotu výrazu

$$V = R_1\cos\alpha + R_2\sin\alpha,$$

která je tudíž pro všechny vyhovující čtyřúhelníky $ABCD$ stejná. To je možné jedině tehdy, když $R_1 = R_2 = 0$, a to je spor s tím, že $R_2 > 0$. Důkaz druhé části tvrzení je hotov.

Dodejme, že závěr o hodnotách výrazu V plyne ze známého vyjádření

$$V = \frac{1}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}\sin(\alpha + \omega),$$

kde úhel ω je určen vztahy

$$\sin\omega = \frac{R_1}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}} \quad \text{a} \quad \cos\omega = \frac{R_2}{\sqrt{R_1^2 + R_2^2}}.$$

Výraz $\sin(\alpha + \omega)$ není konstantní, když se úhel α mění v okolí úhlu α_0 (jenž odpovídá výchozímu čtyřúhelníku $A_0B_0C_0D_0$ z úvodu druhé části řešení).

Návodná úloha:
Ukažte, že $R_1\cos\alpha + R_2\sin\alpha = R\sin(\alpha + \omega)$ pro vhodná R a ω.

3. Je dán trojúhelník ABC a uvnitř něho bod P. Označme X průsečík přímky AP se stranou BC a Y průsečík přímky BP se stranou AC. Dokažte, že čtyřúhelník $ABXY$ je tětivový, právě když druhý průsečík (různý od bodu C) kružnic opsaných trojúhelníkům ACX a BCY leží na přímce CP.

3. Dané čtyři body A, B, X, Y leží na kružnici (obr.), právě když

$$|PA| \cdot |PX| = |PB| \cdot |PY|.$$

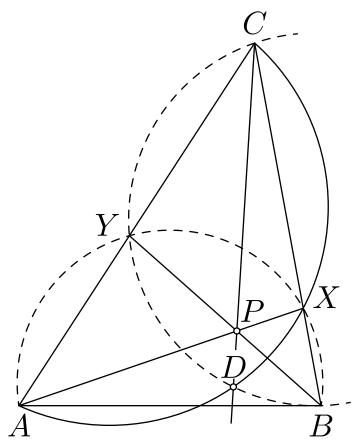
Kružnice opsaná trojúhelníku ACX protne polopřímku opačnou k polopřímce PC v bodě, který označíme D. Pro tento bod platí

$$|PA| \cdot |PX| = |PC| \cdot |PD|.$$

Rovnost z první věty řešení tedy nastane, právě když platí

$$|PB| \cdot |PY| = |PC| \cdot |PD|.$$

Tato rovnost je splněna, právě když bod D leží na kružnici opsané trojúhelníku BCY, tedy právě když je bod $D \neq C$ druhým průsečíkem kružnic opsaných trojúhelníkům ACX a BCY. Důkaz je hotov.



Poznámky. Úlohu je možné ihned vyřešit na základě poznatku o tom, jak vypadá množina všech bodů, které mají stejnou mocnost ke dvěma daným kružnicím. Je to vždy přímka (zvaná chordála), jež je kolmá ke středné obou kružnic a prochází jejich společnými body (pokud existují). Rovnost z první věty řešení proto vyjadřuje právě to, že bod P leží na chordále kružnic opsaných trojúhelníkům ACX a BCY.

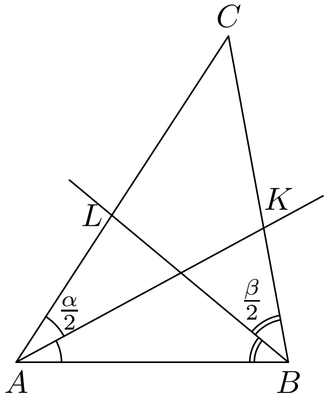
Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za důkaz pouze jedné z obou implikací udělte tři body.

3. *V trojúhelníku ABC, který není rovnostranný, označme K průsečík osy vnitřního úhlu BAC se stranou BC a L průsečík osy vnitřního úhlu ABC se stranou AC. Dále označme S střed kružnice vepsané, O střed kružnice opsané a V průsečík výšek trojúhelníku ABC. Dokažte, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:*

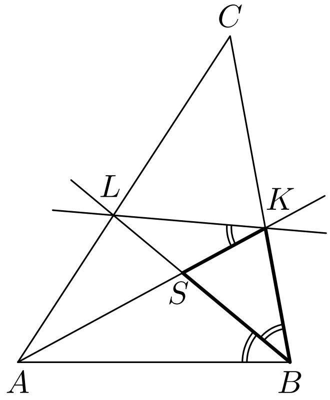
a) Přímka KL se dotýká kružnic opsaných trojúhelníkům ALS, BVS a BKS.

b) Body A, B, K, L a O leží na jedné kružnici. *(T. Jurík)*

Řešení. Označme úhly v trojúhelníku ABC obvyklým způsobem. Z vlastností bodů K a L je zřejmé (obr. 1), že body A, B, K, L leží na kružnici, právě když $|\sphericalangle KAL| = |\sphericalangle KBL|$, tj. právě když $\alpha = \beta$.



Obr. 1



Obr. 2

Přímka KL se dotýká kružnice opsané trojúhelníku BKS (nutně v bodě K), právě když se rovnají úsekový a obvodový úhel příslušné tětivě KS (obr. 2): $|\sphericalangle LKA| = |\sphericalangle LBK| = \frac{1}{2}\beta = |\sphericalangle LBA|$. Poslední rovnost je ovšem ekvivalentní tomu, že body A, B, K, L leží na kružnici, což jak už víme, je právě když $\alpha = \beta$. (Jak je zřejmé ze symetrie, je to zároveň ekvivalentní tomu, že se přímka KL dotýká kružnice opsané trojúhelníku ALS.)

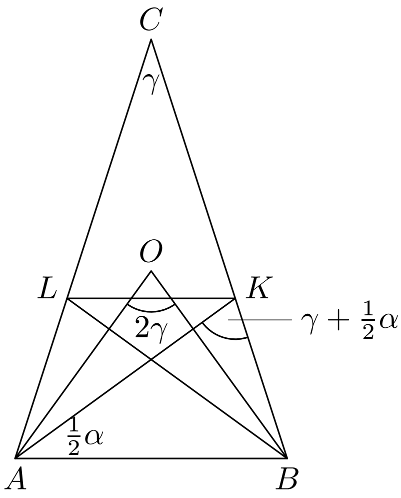
Z uvedených výsledků plyne, že svá další zkoumání můžeme omezit na rovnoramenné trojúhelníky ABC se základnou AB. Podívejme se nejprve, kdy kružnice opsaná čtyřúhelníku $ABKL$ obsahuje bod O. Středový úhel AOB v kružnici opsané trojúhelníku ABC má velikost 2γ, zatímco velikost úhlu AKB je $180° - \frac{1}{2}\alpha - \beta = \gamma + \frac{1}{2}\alpha$ (obr. 3). Bod O přitom nemůže ležet na straně AB (když je úhel γ pravý) ani v polorovině opačné k ABC (když je úhel γ tupý), protože v tom případě vyjde

$$|\sphericalangle AOB| + |\sphericalangle AKB| = (360° - 2\gamma) + (\gamma + \tfrac{1}{2}\alpha) = 180° + \tfrac{3}{2}\alpha + \beta > 180°.$$

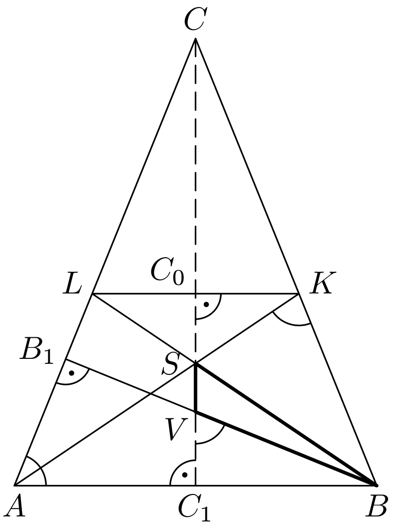
Body A, B, K, O tedy leží na jedné kružnici, právě když

$$2\gamma = \gamma + \tfrac{1}{2}\alpha \quad \text{neboli} \quad \alpha = \beta = 2\gamma = 72°.$$

Zbývá zodpovědět otázku, kdy se kružnice opsaná trojúhelníku BVS dotýká přímky KL. V polorovině KLB existují dvě kružnice, které obsahují body B a S a dotýkají se přímky KL (Apolloniova úloha, pro bod dotyku T z mocnosti bodu L k takové kružnici platí $|LT|^2 = |LS| \cdot |LB|$). Jednu takovou kružnici už známe, je to kružnice opsaná trojúhelníku BKS, jež se přímky KL dotýká v bodě K. Druhá kružnice se tedy dotýká přímky KL v bodě K' souměrně sdruženém s K podle středu L. Má-li kružnice l opsaná trojúhelníku BVS ležet v polorovině KLB, musí v ní ležet i její bod V, který je pak nutně vnitřním bodem úsečky C_0C_1, jež je částí osy úsečky AB (obr. 4). Úhel SBV je tedy ostrý (jeho velikost je nejvýše $\frac{1}{2}\beta$), proto střed kružnice l leží v polorovině C_0C_1B a leží tam i jeho kolmý průmět (případný bod dotyku) na přímku KL. Kružnice l se tudíž dotýká přímky KL jedině v případě, když je to kružnice opsaná trojúhelníku BKS, tedy když body B, K, S, V leží na jedné kružnici. To nastane, právě když $|\sphericalangle C_1VB| = |\sphericalangle SKB|$ (to platí bez ohledu na to, zda bod V leží



Obr. 3



Obr. 4

mezi body C_1, S, nebo mezi body C_0, S; obr. 4). Z pravoúhlých trojúhelníků ABB_1 a BVC_1 plyne $|\sphericalangle C_1VB| = \alpha$, takže rovnost $|\sphericalangle C_1VB| = |\sphericalangle SKB|$ platí, právě když

$$\alpha = \gamma + \tfrac{1}{2}\alpha \quad \text{neboli} \quad \alpha = \beta = 2\gamma = 72^\circ.$$

Dokázali jsme, že obě podmínky a) a b) jsou ekvivalentní tomu, že trojúhelník ABC je rovnoramenný s úhly $\alpha = \beta = 72^\circ$ a $\gamma = 36^\circ$.

---

4. *V rovině je dána úsečka AB. Sestrojte množinu těžišť všech ostroúhlých trojúhelníků ABC, pro něž platí: Vrcholy A a B, průsečík výšek V a střed S kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na jedné kružnici.* (J. Švrček)

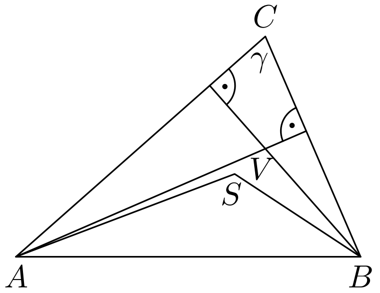
Řešení. Protože trojúhelník ABC je ostroúhlý, leží body V a S uvnitř něho. Označíme-li velikosti úhlů v daném trojúhelníku obvyklým způsobem, platí (obr. 5)

$$|\sphericalangle AVB| = 180^\circ - \gamma \qquad \text{a} \qquad |\sphericalangle ASB| = 90^\circ + \frac{\gamma}{2}.$$

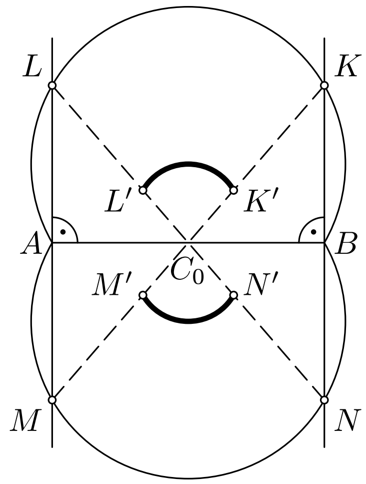
Body A, B, V a S tedy leží na jedné kružnici, právě když $|\sphericalangle AVB| = |\sphericalangle ASB|$, což je podle uvedených vzorců ekvivalentní s rovností $\gamma = 60^\circ$. Vrchol C tak nutně leží na některém ze dvou kružnicových oblouků, z nichž je vidět úsečku AB pod úhlem 60°. Protože je trojúhelník ABC ostroúhlý, musí navíc vrchol C ležet uvnitř pásu vymezeného kolmicemi k přímce AB v bodech A a B. Vrchol C je tedy vnitřním bodem takto vymezených kružnicových oblouků KL a MN (obr. 6).

Označme dále C_0 střed úsečky AB. Protože těžiště T každého z uvažovaných trojúhelníků ABC je obrazem bodu C ve stejnolehlosti se středem C_0 a koeficientem $\frac{1}{3}$, je bod T vnitřním bodem jednoho z oblouků $K'L'$ nebo $M'N'$, jež jsou obrazy oblouků KL a MN v uvažované stejnolehlosti.

Protože zmíněná stejnolehlost je vzájemně jednoznačné zobrazení, je zřejmé, že každý vnitřní bod oblouků $K'L'$ nebo $M'N'$ má požadovanou vlastnost, tj. je těžištěm ostroúhlého trojúhelníku ABC s úhlem 60° při vrcholu C, jehož odpovídající body V a S leží na jedné kružnici s vrcholy A a B.



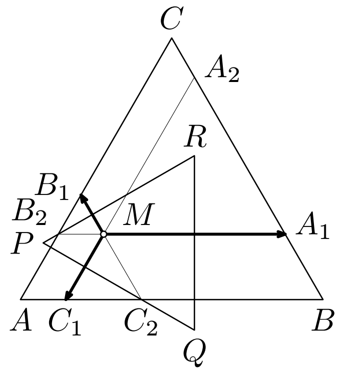
Obr. 5



Obr. 6

2. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC o obsahu S a jeho vnitřní bod M. Označme po řadě A_1, B_1, C_1 ty body stran BC, CA a AB, pro něž platí $MA_1 \parallel AB$, $MB_1 \parallel BC$ a $MC_1 \parallel CA$. Průsečíky os úseček MA_1, MB_1 a MC_1 tvoří vrcholy trojúhelníku o obsahu T. Dokažte, že platí $S = 3T$.

2. Označme P, Q, R vrcholy vzniklého trojúhelníku. Protože každá z os úseček MA_1, MB_1 a MC_1 je kolmá na odpovídající stranu trojúhelníku ABC, svírají každé dvě ze stran trojúhelníku PQR úhel 60 stupňů, takže se jedná o rovnostranný trojúhelník (obr.).



Ukážeme nyní, že součet délek úseček MA_1, MB_1 a MC_1 je (nezávisle na poloze bodu M) roven délce a strany výchozího trojúhelníku ABC. Označme proto po řadě B_2, C_2 a A_2 průsečíky přímek MA_1, MB_1 a MC_1 se stranami CA, AB a BC. Protože trojúhelníky MA_1A_2, MB_1B_2 a MC_1C_2 jsou rovnostranné, je

$$|MA_1| + |MB_1| + |MC_1| = |A_1A_2| + |A_2C| + |A_1B| = |BC| = a.$$

Pro libovolný (vnitřní) bod rovnostranného trojúhelníku platí, že součet jeho vzdáleností od všech stran trojúhelníku je roven příslušné výšce. To je snadno vidět např. z vyjádření obsahu takového trojúhelníku jako součtu obsahů tří trojúhelníků tvořených daným (vnitřním) bodem a dvojicí vrcholů. Protože bod M má od stran (rovnostranného) trojúhelníku PQR vzdálenosti $\frac{1}{2}|MA_1|$, $\frac{1}{2}|MB_1|$ a $\frac{1}{2}|MC_1|$, má výška t tohoto trojúhelníku velikost $t = \frac{1}{2}(|MA_1| + |MB_1| + |MC_1|) = \frac{1}{2}a$. Protože pro výšku v rovnostranného trojúhelníku ABC platí $v = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, je $S = \frac{1}{2}av = \frac{1}{3}v^2\sqrt{3}$. Podobně pro obsah T trojúhelníku PQR s výškou t dostáváme

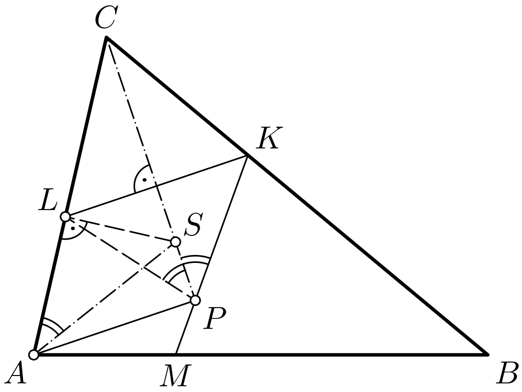
$$T = \frac{\sqrt{3}}{3}\,t^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\Big(\frac{a}{2}\Big)^2 = \frac{\sqrt{3}}{3}\Big(\frac{v}{\sqrt{3}}\Big)^2 = \frac{\sqrt{3}}{9}v^2 = \frac{1}{3}S,$$

neboli $S = 3T$, což jsme chtěli dokázat.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Zjištění (včetně nějakého podpůrného argumentu), že trojúhelník PQR je rovnostranný, oceňte 3 body.

2. *Kružnice vepsaná danému trojúhelníku ABC se dotýká stran BC, CA, AB po řadě v bodech K, L, M. Označme P průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu C s přímkou MK. Dokažte, že přímky AP a LK jsou rovnoběžné.*

Řešení. Označme k kružnici vepsanou trojúhelníku ABC a S její střed. Velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC označme obvyklým způsobem α, β, γ. Protože body K, L jsou souměrně sdruženy podle osy vnitřního úhlu při vrcholu C, jsou přímky KL a CP na sebe kolmé a platí $|\sphericalangle LPC| = |\sphericalangle KPC|$ (obr. 1).



Obr. 1

Vyjádříme-li velikosti vnitřních úhlů při základnách KM a LK v rovnoramenných trojúhelnících KMB a LKC, dostaneme $|\sphericalangle MKB| = 90° - \frac{1}{2}\beta$, $|\sphericalangle LKC| = 90° - \frac{1}{2}\gamma$. Z přímosti úhlu BKC tak plyne $|\sphericalangle MKL| = 90° - \frac{1}{2}\alpha$. Analogicky vyjde $|\sphericalangle KLM| = 90° - \frac{1}{2}\beta$, $|\sphericalangle LMK| = 90° - \frac{1}{2}\gamma$.

Protože $|\sphericalangle KPC| + \frac{1}{2}\gamma = |\sphericalangle BKP| = 90° - \frac{1}{2}\beta$, dostaneme pro velikost souměrně sdružených úhlů LPC a KPC rovnost

$$|\sphericalangle LPC| = |\sphericalangle KPC| = 90° - \frac{\beta+\gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Kružnice k vepsaná trojúhelníku ABC je současně kružnicí opsanou trojúhelníku KLM, který je, jak jsme zjistili výpočtem jeho úhlů, ostroúhlý. Její střed S je proto vnitřním bodem tohoto trojúhelníku, a tedy i vnitřním bodem úsečky CP. Protože

$$|\sphericalangle LPC| = |\sphericalangle LPS| = |\sphericalangle LAS| = \frac{\alpha}{2},$$

je $APSL$ tětivový čtyřúhelník. Vzhledem k tomu, že úhel ALS je pravý, je i úhel APS pravý (přímky AP a CP jsou na sebe kolmé), a proto jsou přímky KL a AP rovnoběžné. Tím je důkaz hotov.

Poznámka. Protože kružnice k je opsaná trojúhelníku KLM, můžeme jeho vnitřní úhly snadno vyjádřit z příslušných středových úhlů: $|\sphericalangle KSL| = 180° - \gamma$, takže $|\sphericalangle KML| = 90° - \frac{1}{2}\gamma$ atd.

Návodné a doplňující úlohy:

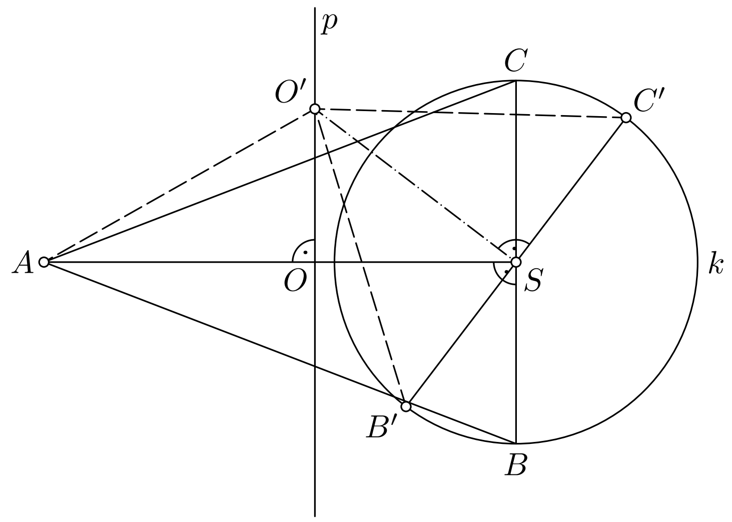
1. V rovině je dán čtverec $ABCD$. Uvnitř jeho stran BC, CD jsou po řadě zvoleny body P, Q takové, že $|\sphericalangle PAQ| = 45°$. Označme dále R, S průsečíky jeho úhlopříčky BD po řadě s přímkami AP, AQ. Dokažte, že body P, Q, R, S leží na téže kružnici. [Ukažte, že úhly PSQ a PRQ jsou pravé.]
2. V rovině je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB a pravým úhlem při vrcholu A. Označme k_1 kružnici sestrojenou nad průměrem AD a k_2 kružnici procházející vrcholy B, C a dotýkající se přímky AB. Mají-li kružnice k_1, k_2 vnější dotyk v bodě P, je přímka BC tečnou kružnice opsané trojúhelníku CDP. Dokažte. [52–B–II–4]
3. Nechť L je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku CD kružnice opsané čtverci $ABCD$. Označme K průsečík přímek AL a CD, M průsečík přímek AD a CL a dále N průsečík přímek MK a BC. Dokažte, že body B, L, M, N leží na téže kružnici. [53–A–III–5]

5. *V rovině je dána kružnice k se středem S a bod $A \neq S$. Určete množinu středů kružnic opsaných všem trojúhelníkům ABC, jejichž strana BC je průměrem kružnice k.*

Řešení. Poloměr dané kružnice k označme r. Leží-li bod A na kružnici k, je bod S středem kružnice opsané každého z uvažovaných trojúhelníků ABC a hledanou množinou je jednobodová množina $\{S\}$. Dále rozlišíme dva případy:

a) Nechť $|AS| > r$. Uvažujme nejprve rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou BC, který vyhovuje podmínkám úlohy. Střed O kružnice jemu opsané je vnitřním bodem úsečky AS a přitom platí $|AO| = |BO| = |CO|$.

Nyní ukážeme, že hledanou množinou O středů kružnic opsaných všem trojúhelníkům ABC, které vyhovují podmínkám úlohy, je přímka p, která je kolmá k AS a prochází bodem O (obr. 2).



Obr. 2

Uvažujme libovolný trojúhelník $AB'C'$, kde $B'C'$ je průměr kružnice k, a označme O' průsečík osy jeho strany $B'C'$ s přímkou p, takže $|O'B'| = |O'C'|$ (bod O' leží na ose $B'C'$). Podle Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku $C'O'S$ platí

$$|O'B'| = |O'C'| = \sqrt{|O'S|^2 + r^2} = \sqrt{|OO'|^2 + |OS|^2 + r^2}.$$

Pro velikost úsečky $O'A$ přitom máme

$$|O'A| = \sqrt{|AO|^2 + |OO'|^2} = \sqrt{|BO|^2 + |OO'|^2} = \sqrt{|OS|^2 + r^2 + |OO'|^2}.$$

Odtud $|O'A| = |O'B'| = |O'C'|$, tudíž bod O' je středem kružnice opsané trojúhelníku $AB'C'$ a podle konstrukce leží na přímce p.

Naopak, pro libovolný bod O' přímky p lze sestrojit průměr $B'C'$ kružnice k, který je kolmý k přímce $O'S$. Z předchozích úvah vyplývá, že $|O'A| = |O'B'| = |O'C'|$, takže jsme našli trojúhelník $AB'C'$ požadovaných vlastností, jehož kružnice opsaná má střed O'.

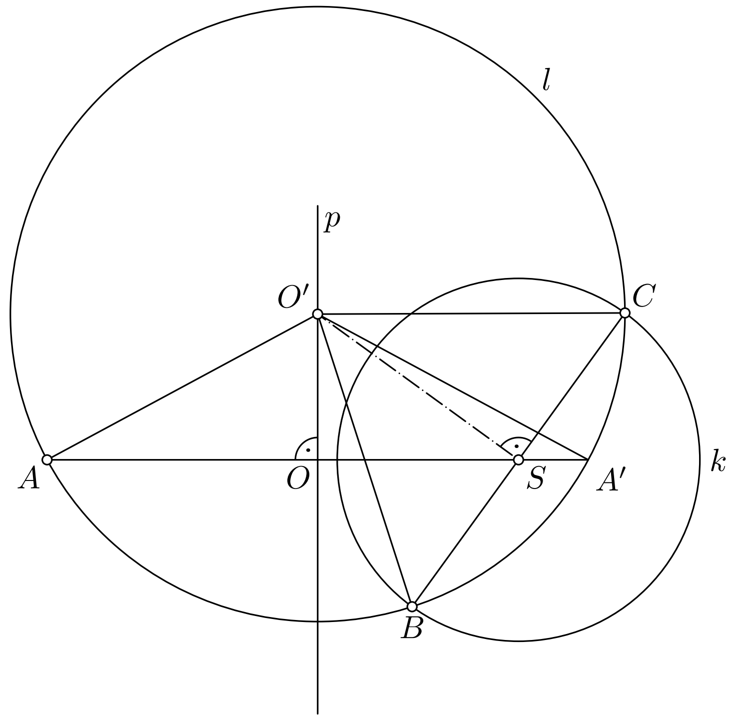
b) Nechť $|AS| < r$. V tomto případě lze postupovat analogicky. Střed O je zde vnitřním bodem polopřímky opačné k polopřímce SA. Dojdeme přitom ke stejnému výsledku jako v případě a).

Závěr. Není-li A bodem kružnice k, je hledanou množinou O přímka p, která je kolmá k AS a současně prochází středem O kružnice opsané rovnoramennému trojúhelníku ABC se základnou BC, která je průměrem kružnice k kolmým na AS. Je-li A je bodem kružnice k, je $\mathsf{O} = \{S\}$.

Jiné řešení. Pro daný bod A, který neleží na kružnici k, uvažujme trojúhelník ABC daných vlastností. Označme l kružnici opsanou trojúhelníku ABC (obr. 3). Protože bod S je středem společné tětivy BC kružnic k a l, protne kružnice l polopřímku opačnou k polopřímce SA ve vnitřním bodě, který označíme A'. Pro mocnost $m_l(S)$ bodu S ke kružnici l přitom platí

$$m_l(S) = -|BS| \cdot |CS| = -r^2 = -|AS| \cdot |A'S|, \tag{1}$$

kde r je poloměr kružnice k. Odtud plyne, že vzdálenost $|A'S|$, a tedy i poloha bodu A' na polopřímce opačné k SA jsou jednoznačně určeny polohou bodu A. Pro všechny trojúhelníky ABC vyhovující podmínkám úlohy je tedy AA' pevná úsečka. Kružnice opsané všem uvažovaným trojúhelníkům ABC proto mají společnou tětivu AA', takže jejich středy leží na ose p úsečky AA'. V případě, kdy ABC je rovnoramenný trojúhelník se základnou BC, je úsečka AA' průměrem kružnice l a její střed O je současně středem úsečky AA'. Přímka p prochází tímto bodem O kolmo k přímce AS.



Obr. 3

Naopak, ke každému bodu O' přímky p najdeme trojúhelník ABC požadovaných vlastností, který má střed opsané kružnice v bodě O'. Stačí sestrojit průměr BC kružnice k, který je kolmý k přímce $O'S$. Pro pevně uvažované body A, A' a S jsme tak sestrojili body B, C, pro něž platí vztah (1). To znamená, že body A, B, C a A' leží na téže kružnici l. Vzhledem k tomu, že bod O' je průsečíkem os tětiv AA' a BC této kružnice, které nejsou rovnoběžné, je bod O' středem kružnice l, tedy středem kružnice opsané trojúhelníku ABC.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. V rovině je dán čtverec $ABCD$. Uvažujme čtverec $KLMN$, jehož úhlopříčka je shodná se stranou čtverce $ABCD$ a jeho vrcholy K a M leží na stranách čtverce $ABCD$. Určete množinu vrcholů L všech takových čtverců $KLMN$. [19–B–I–5]

2. V rovině je dána přímka q a bod A, který na ní neleží. Určete v této rovině množinu středů S všech čtverců $ABCD$ takových, že bod B leží na přímce q. [47–B–I–2]
3. V rovině je dána úsečka AB. Sestrojte množinu těžišť všech ostroúhlých trojúhelníků ABC, pro něž platí: Vrcholy A a B, průsečík výšek V a střed S kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na jedné kružnici. [55–A–III–4]

1. Zjistěte, jaký je nejmenší možný obsah trojúhelníku ABC, jehož výšky vyhovují nerovnostem $v_a \geqq 3\,\mathrm{cm}$, $v_b \geqq 4\,\mathrm{cm}$, $v_c \geqq 5\,\mathrm{cm}$.

3. Nechť M je libovolný vnitřní bod přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC. Označme S, S_1, S_2 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům ABC, AMC, BMC.

a) Dokažte, že body M, C, S_1, S_2 a S leží na téže kružnici.

b) Pro kterou polohu bodu M má tato kružnice nejmenší poloměr?

1. Označme a, b, c velikosti stran trojúhelníku ABC. Pro jeho výšku v_b platí nerovnost

$$c \geqq v_b,$$

neboť v_b je délka nejkratší úsečky spojující vrchol B s bodem přímky AC. Pro obsah S trojúhelníku ABC tak platí:

$$S = \frac{cv_c}{2} \geqq \frac{v_b v_c}{2} \geqq 10\,\mathrm{cm}^2.$$

Pokud existuje trojúhelník ABC vyhovující podmínkám úlohy, jehož obsah je právě $10\,\mathrm{cm}^2$, potom v obou nerovnostech $S = \frac{1}{2}cv_c \geqq \frac{1}{2}v_b v_c \geqq 10\,\mathrm{cm}^2$ nastává rovnost. Vychází tedy $c = v_b = 4\,\mathrm{cm}$ a současně $v_c = 5\,\mathrm{cm}$. Z první rovnosti plyne, že takový trojúhelník musí být pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu A. Pro délku jeho odvěsny AC pak platí $b = v_c = 5\,\mathrm{cm}$ a délka a jeho přepony BC je rovna $\sqrt{41}\,\mathrm{cm}$. Ze vzorce $S = \frac{1}{2}av_a$ pro jeho výšku v_a plyne

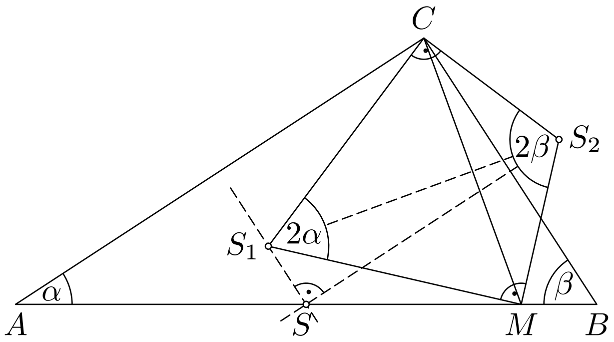
$$v_a = \frac{2S}{a} = \frac{20}{\sqrt{41}}\,\mathrm{cm} > 3\,\mathrm{cm}.$$

Pravoúhlý trojúhelník ABC s odvěsnami $b = 5\,\mathrm{cm}$ a $c = 4\,\mathrm{cm}$ tedy vyhovuje podmínkám úlohy.

Nejmenší možný obsah trojúhelníku ABC, jehož výšky vyhovují podmínkám úlohy, je $10\,\mathrm{cm}^2$.

Poznámka. Stejně dobrý odhad dostaneme i z nerovnosti $bv_b \geqq v_c v_b$, zatímco z ostatních kombinací plynou odhady slabší.

3. a) Označme po řadě α a β velikosti vnitřních úhlů při vrcholech A a B uvažovaného pravoúhlého trojúhelníku ABC. Ze vztahu mezi obvodovým a středovým úhlem pro společnou tětivu CM kružnic k_1 a k_2 opsaných po řadě trojúhelníkům AMC a BMC plyne (obr. 1)



Obr. 1

$$|\sphericalangle MS_1C| + |\sphericalangle MS_2C| = 2\alpha + 2\beta = 180^\circ.$$

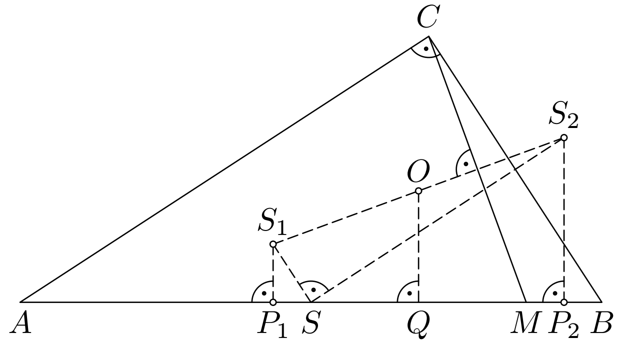
Čtyřúhelník CS_1MS_2 je tudíž tětivový. Protože body M a C jsou souměrně sdružené podle osy úsečky CM, na níž současně leží středná S_1S_2 kružnic k_1 a k_2, platí dále

$$|\sphericalangle S_1MS_2| = |\sphericalangle S_1CS_2| = 90^\circ.$$

Kružnice opsaná čtyřúhelníku CS_1MS_2 je tedy Thaletovou kružnicí sestrojenou nad průměrem S_1S_2. Body S a S_1 však současně leží na ose odvěsny AC, podobně body S a S_2 leží na ose odvěsny BC uvažovaného trojúhelníku. Je tedy $|\sphericalangle S_1SS_2| = 90°$, a bod S leží proto rovněž na Thaletově kružnici opsané čtyřúhelníku CS_1MS_2. (Je-li $M = S$, platí toto tvrzení triviálně.) Tím je dokázána část a) úlohy.

b) Pro poloměr r kružnice (s tětivou CS) nalezené v části a) zřejmě platí $2r \geqq |CS|$ s rovností, právě když je CS její průměr. Protože kružnice s průměrem CS prochází středy obou odvěsen AC, BC, rovnost $2r = |CS|$ nastane, právě když bod S_1 je střed AC a S_2 je střed BC, což zřejmě odpovídá volbě bodu M jako paty výšky z vrcholu C na přeponu AB.

Jiné řešení. a) Označme P_1 a P_2 po řadě středy úseček AM a BM (obr. 2). Protože ve stejnolehlosti se středem M a koeficientem $\frac{1}{2}$ se úsečka AB zobrazí na úsečku P_1P_2,

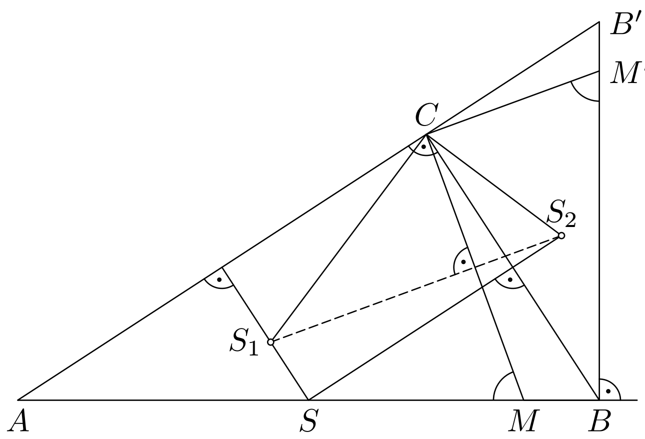


Obr. 2

zobrazí se střed S úsečky AB na střed Q úsečky P_1P_2 a zároveň jakožto obraz bodu S ve zmíněné stejnolehlosti je bod Q středem úsečky MS. Body P_1, P_2 jsou kolmé průměty bodů S_1, S_2 na přeponu AB, takže bod Q je kolmým průmětem středu O kružnice sestrojené nad průměrem S_1S_2. Podle Thaletovy věty na této kružnici zřejmě leží bod S, protože přímky S_1S a S_2S jakožto osy navzájem kolmých odvěsen AC a BC svírají pravý úhel. Ze souměrnosti uvedené kružnice podle přímky OQ pak plyne, že na ní leží i bod M, a tedy i bod C (ze souměrnosti podle přímky S_1S_2). Tím je část a) dokázána.

b) Pro úsečku S_1S_2 a její kolmý průmět P_1P_2 platí $|S_1S_2| \geqq |P_1P_2| = \frac{1}{2}|AB|$. Kružnice opsaná čtyřúhelníku CS_1MS_2 má proto nejmenší průměr $\frac{1}{2}|AB|$, právě když $S_1S_2 \parallel AB$, což vzhledem ke kolmosti úsečky CM a její osy S_1S_2 nastane, právě když M je patou výšky z vrcholu C v trojúhelníku ABC. (Poloměr r této kružnice má pak velikost $r = \frac{1}{4}|AB|$.)

Jiné řešení. a) Uvažujme podobné zobrazení složené z otočení kolem středu C o orientovaný (pravý) úhel ACB a ze stejnolehlosti se středem C a koeficientem rovným poměru $|BC| : |AC|$. Toto zobrazení převede body A, B a M po řadě do bodů B, B' a M', přičemž BC je výška na přeponu AB' pravoúhlého trojúhelníku ABB' a bod M' leží na jeho odvěsně BB' (obr. 3). Podle shodných úhlů AMC a $BM'C$ (nebo též podle pravých úhlů MCM' a MBM') vidíme, že kružnice opsaná trojúhelníku BMC je opsaná i trojúhelníku $BM'C$, takže její střed S_2 je obrazem bodu S_1 v uvažovaném podobném zobrazení (to převádí trojúhelník AMC právě na trojúhelník $BM'C$). To znamená, že úhel S_1CS_2 je pravý, takže je pravý i úhel S_1MS_2 (neboť přímka S_1S_2 je osou úsečky CM). Konečně pravý je i úhel S_1SS_2 (neboť jeho ramena leží na osách navzájem kolmých odvěsen AC a BC), takže všechny tři body C, M, S leží na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem S_1S_2.

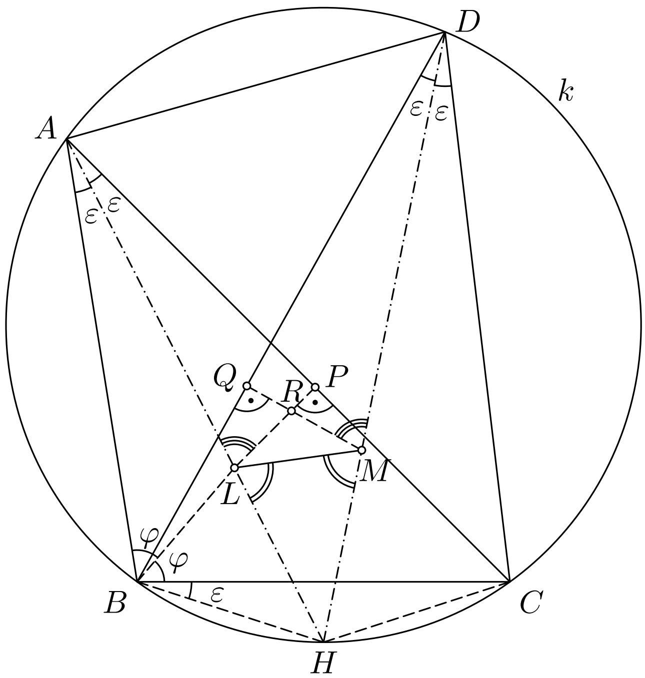


Obr. 3

Tím je dokázána část a) úlohy. Část b) vyřešíme stejně jako v prvním řešení.

2. *V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme L, M středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům BCA, BCD. Dále označme R průsečík kolmic vedených z bodů L a M po řadě na přímky AC a BD. Dokažte, že trojúhelník LMR je rovnoramenný.*
(P. Leischner)

Řešení. Průsečík os vnitřních úhlů při vrcholech A, D v trojúhelnících BCA, BCD označme H (obr. 3). Jak známo, je bod H středem příslušného oblouku BC kružnice k



Obr. 3

opsané čtyřúhelníku $ABCD$ (oblouku, který neobsahuje vrcholy A a D). Označme $\varepsilon = |\sphericalangle BAH| = |\sphericalangle CAH| = |\sphericalangle BDH| = |\sphericalangle CDH| = |\sphericalangle CBH|$ a $\varphi = |\sphericalangle ABL| = |\sphericalangle CBL|$. Pak platí

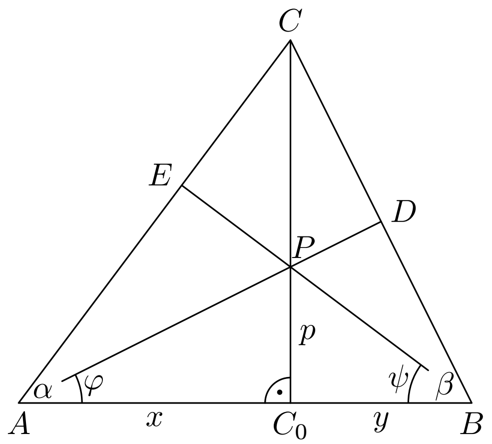
$$|\sphericalangle BLH| = |\sphericalangle BAL| + |\sphericalangle ABL| = \varepsilon + \varphi = |\sphericalangle LBH|.$$

Trojúhelník HLB je tudíž rovnoramenný se základnou LB, takže $|HB| = |HL|$. Analogicky je i $|HC| = |HM|$. A protože $|HB| = |HC|$, je rovněž $|HL| = |HM|$, takže trojúhelník HML je rovnoramenný a platí $|\sphericalangle HLM| = |\sphericalangle HML|$.

Označme ještě P kolmý průmět bodu L na přímku AC a Q kolmý průmět bodu M na přímku BD (uvažovaný bod R je tak průsečíkem přímek LP a MQ). Protože pravoúhlé trojúhelníky APL a DQM se shodují v úhlech při vrcholech A a D, jsou shodné i úhly PLA a QMD při vrcholech L a M. Odtud a z rovnosti $|\sphericalangle HLM| = |\sphericalangle HML|$ tak vyplývá rovnost $|\sphericalangle PLM| = |\sphericalangle QML|$. To znamená, že trojúhelník LMR je rovnoramenný, jak jsme měli dokázat.

5. *Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC takový, že $|AC| \neq |BC|$. Uvnitř jeho stran BC a AC uvažujme body D a E, pro něž je $ABDE$ tětivový čtyřúhelník. Průsečík jeho úhlopříček AD a BE označme P. Jsou-li přímky CP a AB navzájem kolmé, pak P je průsečíkem výšek trojúhelníku ABC. Dokažte.* *(J. Mazák)*

Řešení. Označme $\varphi = |\sphericalangle BAD|$ a $\psi = |\sphericalangle ABE|$ (obr. 4). Z rovnosti obvodových úhlů $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle ADB|$ v tětivovém čtyřúhelníku $ABDE$ tak při obvyklém značení úhlů



Obr. 4

v trojúhelníku ABC plyne
$$\alpha + \psi = \beta + \varphi. \tag{1}$$

Označme C_0 patu výšky z vrcholu C, v_c velikost výšky CC_0 a x, y, p velikosti příslušných úseků AC_0, BC_0, PC_0 (obr. 4), takže
$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi &= \frac{p}{x}, \qquad & \operatorname{tg}\psi &= \frac{p}{y}, \\ \operatorname{tg}\alpha &= \frac{v_c}{x}, \qquad & \operatorname{tg}\beta &= \frac{v_c}{y}. \end{aligned} \tag{2}$$

Pokud bod P není průsečík výšek (tj. úhel $\alpha + \psi$ není pravý), můžeme podle (1) psát
$$\operatorname{tg}(\alpha + \psi) = \operatorname{tg}(\beta + \varphi),$$

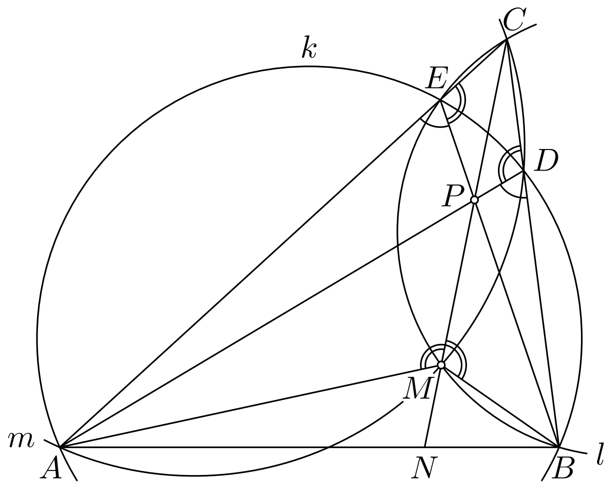
což podle známého vzorce pro tangens součtu po dosazení z (2) dává (využíváme rovnost $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\varphi$, která z (2) navíc plyne)
$$\frac{v_c}{x} + \frac{p}{y} = \frac{v_c}{y} + \frac{p}{x}$$

neboli
$$(p - v_c)(x - y) = 0.$$

Protože vzhledem k daným předpokladům je $p < v_c$ a $x \neq y$, nemůže poslední rovnost platit. Je tedy $\alpha + \psi = 90^\circ$ a bod P je průsečíkem výšek, což jsme chtěli dokázat.

Jiné řešení. Označme k kružnici opsanou tětivovému čtyřúhelníku $ABDE$ a uvažme ještě kružnice l a m opsané trojúhelníkům BEC a ADC (obr. 5). Protože tětiva BE kružnice l protíná tětivu AD kružnice m v bodě P, mají kružnice l, m kromě bodu C

ještě další průsečík, který označíme M. Z uvedené konstrukce vyplývá, že bod P leží uvnitř každé ze tří uvažovaných kružnic a má k nim stejnou mocnost (je to jejich *potenční* bod), proto bod P leží uvnitř úsečky CM.



Obr. 5

Z rovnosti obvodových úhlů nad tětivou BC kružnice l plyne $|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle BEC| = 180° - |\sphericalangle AEB|$ a analogicky $|\sphericalangle AMC| = |\sphericalangle ADC| = 180° - |\sphericalangle ADB|$, což vzhledem k rovnosti obvodových úhlů $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle ADB|$ nad tětivou AB kružnice k znamená, že

$$|\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle AMC|.$$

Označme N patu výšky z vrcholu C trojúhelníku ABC. Pokud $M \neq N$, znamená poslední rovnost, že pravoúhlé trojúhelníky BNM a ANM jsou shodné, což ovšem odporuje předpokladu $|AC| \neq |BC|$. Je proto $M = N$, $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle AMC| = 90°$ a bod P je tak průsečíkem výšek trojúhelníku ABC, což jsme chtěli dokázat.

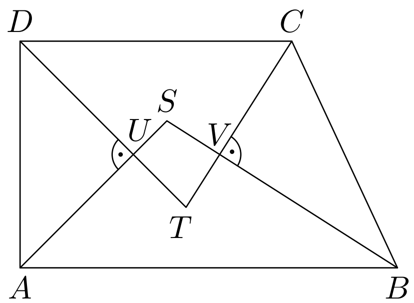
3. Je dán lichoběžník $ABCD$ s pravým úhlem při vrcholu A a základnou AB, v němž platí $|AB| > |CD| \geqq |DA|$. Označme S průsečík os jeho vnitřních úhlů při vrcholech A, B a T průsečík os vnitřních úhlů při vrcholech C, D. Podobně označme U, V průsečíky os vnitřních úhlů při vrcholech A, D, resp. B, C.

a) Ukažte, že přímky UV a AB jsou rovnoběžné.

b) Dokažte, že průsečík E polopřímky DT s přímkou AB a body S, T, B leží na téže kružnici.

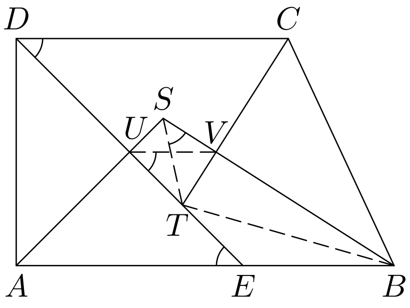
3. Bod U jako průsečík os vnitřních úhlů při vrcholech A a D daného lichoběžníku má stejnou vzdálenost od stran AB, AD a zároveň i od stran AD, DC. To znamená, že má stejnou vzdálenost od obou základen AB, CD lichoběžníku $ABCD$. Podobně i bod V, který je průsečíkem os úhlů při vrcholech B a C, má od obou základen stejnou vzdálenost. Jsou tedy přímky UV a AB rovnoběžné. Tím je vyřešena část a).

Protože součet vnitřních úhlů jak při vrcholech A a D, tak při vrcholech B a C je $180°$, je součet úhlů přilehlých straně AD trojúhelníku ADU roven $90°$ stejně jako součet úhlů přilehlých straně BC trojúhelníku BCV. To znamená, že oba uvedené trojúhelníky jsou pravoúhlé (s pravým úhlem při vrcholu U, resp. V, obr. 1). Čtyřúhelník $UTVS$ je tedy tětivový (z předpokladu úlohy $|AB| > |CD| \geqq |DA|$ plyne, že polopřímky AU a CV se neprotínají, body S a T proto leží v opačných polorovinách určených přímkou UV a body U, T, V, S leží na kružnici v uvedeném pořadí).

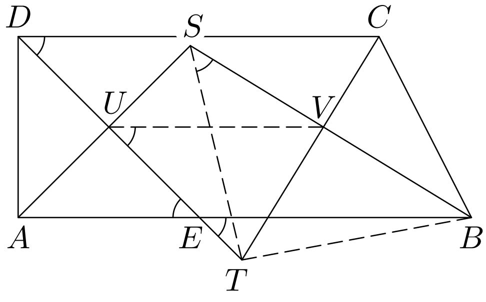


Obr. 1

Jak už víme, jsou přímky UV, AB a CD rovnoběžné, je tedy $|\sphericalangle VUT = |\sphericalangle CDT| =$ $= 45°$. Z rovnosti obvodových úhlů nad stranou TV tětivového čtyřúhelníku $UTVS$ tak plyne $|\sphericalangle VST| = |\sphericalangle VUT| = 45°$. To je zároveň i velikost obvodového úhlu TSB příslušného tětivě TB kružnice opsané trojúhelníku STB (obr. 2). Zbývá ukázat, že na téže kružnici leží i bod E. To je zřejmé, pokud $E = T$. V opačném případě stačí zjistit, že velikost úhlu TEB je $180^\circ - 45^\circ$ nebo 45° podle toho, zda přímka BT body S, E odděluje či nikoli, což okamžitě plyne z toho, že přímka DT svírá se základnou AB úhel 45° (obr. 2 a 3). Tím je vyřešena část b).



Obr. 2

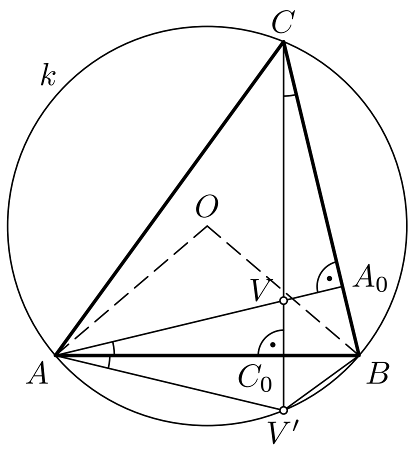


Obr. 3

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za důkaz rovnoběžnosti $UV \parallel AB$, dále 1 bod za objev pravých úhlů AUD a BVC a 1 bod za důsledek, že čtyřúhelník $UTVS$ je tětivový. Nelze čekat, že žáci použijí charakterizaci cykličnosti čtyř bodů pomocí orientovaných úhlů přímek, jejich řešení by tedy mělo pamatovat přinejmenším na dvě možné vzájemné polohy bodů E a T (opominutí triviálního případu $E = T$ ztrátou bodu netrestejte). Pokud bude důkaz proveden jen pro jednu z možných poloh, strhněte 1 bod.

2. *V rovině je dána úsečka AV a ostrý úhel velikosti α. Určete množinu středů kružnic opsaných všem těm trojúhelníkům ABC s vnitřním úhlem α při vrcholu A, jejichž výšky se protínají v bodě V.*

Řešení. Nejprve dokažme jedno obecně užitečné tvrzení o průsečíku V výšek libovolného ostroúhlého trojúhelníku ABC. Označme V' průsečík přímky obsahující výšku CC_0 s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC (obr. 1). Pravoúhlé trojúhelníky C_0VA



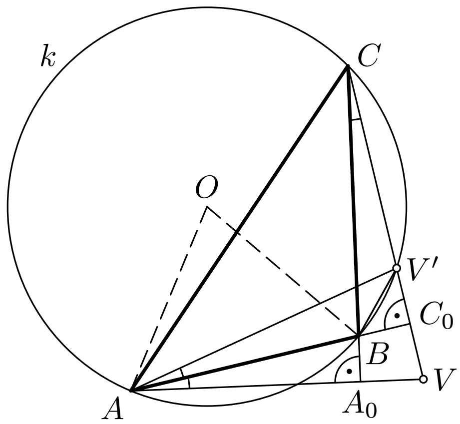
Obr. 1

a A_0VC jsou podobné (shodují se ještě v úhlu při vrcholu V), proto $|\sphericalangle BAA_0| = |\sphericalangle BCC_0|$. Úhly BCC_0 a $V'AB$ jsou shodné obvodové úhly nad obloukem $V'B$, takže *body V a V' jsou souměrně sdruženy podle přímky AB.*

Označíme-li úhly v trojúhelníku ABC obvyklým způsobem, bude $|\sphericalangle ACV'| = |\sphericalangle ACC_0| = 90° - \alpha$, takže pro délku úsečky AV díky uvedené souměrnosti dostaneme

$$|AV| = |AV'| = 2r\sin(90° - \alpha) = 2r\cos\alpha, \tag{1}$$

kde r je velikost poloměru kružnice k opsané trojúhelníku ABC (a zároveň i trojúhelníku $AV'C$). Stejný vzorec (1) platí pro trojúhelník ABC s ostrým vnitřním úhlem α při vrcholu A i v případě, kdy jeden z ostatních dvou vnitřních úhlů (např. u vrcholu B) je pravý nebo tupý (obr. 2). Celou úvahu můžeme zopakovat slovo od slova.



Obr. 2

Nyní se už pustíme do řešení soutěžní úlohy se zadanými body A, V a danou velikostí ostrého úhlu α. Vzorec (1) nás přivádí k závěru, že kružnice opsané všem uvažovaným trojúhelníkům ABC budou mít týž poloměr

$$r = \frac{|AV|}{2\cos\alpha}, \tag{2}$$

tudíž jejich středy O budou mít od daného bodu A pevnou, právě určenou vzdálenost r. Je ovšem zapotřebí určit, jakou část kružnice $l(A, r)$ středy O vyplní; jistě to bude množina souměrná podle přímky AV, neboť souměrnost s osou AV převádí vyhovující trojúhelník na vyhovující trojúhelník. S tímto cílem vyjádříme velikost úhlu VAO pomocí vnitřních úhlů $\beta = |\sphericalangle ABC|$ a $\gamma = |\sphericalangle ACB|$. Budeme přitom předpokládat, že platí $\beta \geqq \gamma$ (v opačném případě lze od samého počátku označení vrcholů B, C navzájem vyměnit).

Předpokládejme nejprve, že $\beta < 90°$, takže trojúhelník ABC je ostroúhlý a můžeme opět pracovat s obr. 1. Z rovnoramenného trojúhelníku ABO s vnitřním úhlem 2γ při hlavním vrcholu O vidíme, že $|\sphericalangle BAO| = 90° - \gamma$, z pravoúhlého trojúhelníku BAA_0 zase plyne $|\sphericalangle BAV| = 90° - \beta$. Vzhledem k tomu, že oba body O, V leží v polorovině ABC, dostáváme pro úhel VAO vyjádření

$$|\sphericalangle VAO| = |\sphericalangle BAO| - |\sphericalangle BAV| = (90° - \gamma) - (90° - \beta) = \beta - \gamma$$

(připomeňme, že $\beta \geqq \gamma$).

V případě $\beta \geqq 90°$ podle obr. 2 podobně zjistíme, že $|\sphericalangle BAO| = 90° - \gamma$ a $|\sphericalangle BAV| = \beta - 90°$, tudíž

$$|\sphericalangle VAO| = |\sphericalangle BAO| + |\sphericalangle BAV| = (90° - \gamma) + (\beta - 90°) = \beta - \gamma.$$

Vidíme, že $|\sphericalangle VAO| = \beta - \gamma$ bez ohledu na to, zda je trojúhelník ABC ostroúhlý, pravoúhlý nebo tupoúhlý.

Nyní už snadno dokončíme řešení úlohy: z odvozené velikosti úhlu VAO plyne odhad

$$|\sphericalangle VAO| = \beta - \gamma < \beta + \gamma = 180° - \alpha,$$

takže bod O leží uvnitř oblouku kružnice $l(A, r)$ určeného nerovností

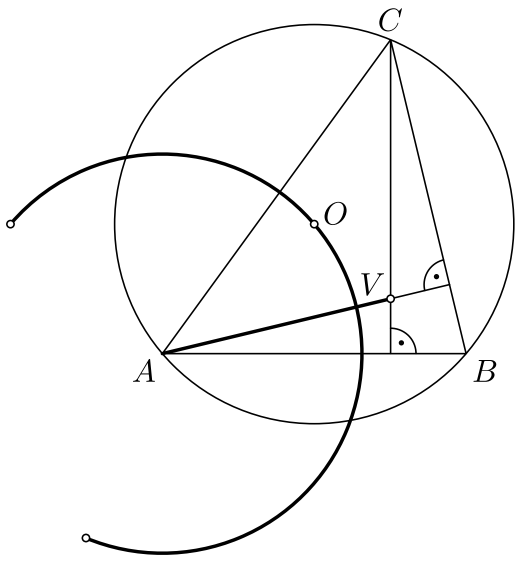
$$|\sphericalangle VAO| < 180° - \alpha.$$

Zvolíme-li naopak úhel ε, $0° \leqq \varepsilon < 180° - \alpha$, snadno vypočteme, jakou velikost musí mít vnitřní úhly β a γ, aby platilo $|\sphericalangle VAO| = \varepsilon$:

$$\beta = \frac{180° - \alpha + \varepsilon}{2}, \quad \gamma = \frac{180° - \alpha - \varepsilon}{2}.$$

Vepíšeme-li tedy do jakékoliv kružnice o poloměru r ze vzorce (2) pomocný trojúhelník $A'B'C'$ s daným úhlem α při vrcholu A' a vypočtenými úhly β, γ při vrcholech B', resp. C', pro jeho ortocentrum V' a střed O' opsané kružnice budou splněny rovnosti $|A'V'| = |AV|$ a $|\sphericalangle V'A'O'| = \varepsilon$. Ve shodném zobrazení, které převede úsečku $A'V'$ na úsečku AV, pak trojúhelník $A'B'C'$ přejde ve vyhovující trojúhelník ABC, jehož střed O opsané kružnice bude ležet na kružnici l a vyhovovat rovnosti $|\sphericalangle V'A'O'| = \varepsilon$.

Závěr. Hledanou množinou středů O opsaných kružnic je oblouk kružnice o středu A a poloměru $r = \frac{1}{2}|AV|/\cos\alpha$ určený nerovností $|\sphericalangle VAO| < 180° - \alpha$ (krajní body tohoto oblouku tedy do výsledné množiny nepatří, obr. 3).



Obr. 3

Tím je úloha v případě $n = 2$ vyřešena. Tato zkušenost nás jistě přivede k odhadu výsledku pro obecné $n \geqq 2$:

Jsou-li $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2n}$ prvky dané množiny M, pak největší sumární obsah má jediná n-tice obdélníků s rozměry $a_1 \times a_2, a_3 \times a_4, \ldots, a_{2n-1} \times a_{2n}$; nejmenší sumární obsah má jediná n-tice obdélníků s rozměry $a_1 \times a_{2n}, a_2 \times a_{2n-1}, \ldots, a_n \times a_{n+1}$.

K důkazu prvního závěru předpokládejme, že vyhovující n-tice obdélníků je sestavena tak, že čísla a_1, a_2 nejsou rozměry téhož obdélníku. Pak v takové n-tici jsou obdélníky $a_1 \times a_i$ a $a_2 \times a_j$, kde $i, j > 2$. Zaměňme je obdélníky $a_1 \times a_2$ a $a_i \times a_j$. Dostaneme (jinou) vyhovující n-tici obdélníků, která bude mít oproti původní n-tici větší sumární obsah, neboť platí

$$a_1 a_2 + a_i a_j > a_1 a_i + a_2 a_j,$$

a to opět díky pravidlu (2) pro čísla $a_1 < a_j$ a $a_2 < a_i$. Z této úvahy plyne: největší sumární obsah může mít jen taková n-tice uvažovaných obdélníků, mezi nimiž je obdélník $a_1 \times a_2$. Tento obdélník můžeme tedy dát stranou a uvažovat úlohu o nejmenším obsahu pro redukovanou množinu M' o $2n-2$ prvcích $a_3 < a_4 < \ldots < a_{2n}$. Opakováním předchozího postupu vytvoříme obdélník $a_3 \times a_4$ a provedeme další redukci množiny atd. (formálně můžeme využít matematickou indukci). Hypotéza o soustavě obdélníků s největším sumárním obsahem je tak dokázána.

Zcela obdobně dokážeme závěr o soustavě s nejmenším sumárním obsahem. Nejsou-li a_1, a_{2n} rozměry téhož obdélníku, jsou mezi uvažovanými obdélníky $a_1 \times a_i$ a $a_j \times a_{2n}$ (kde $1 < i, j < 2n$), které zaměníme obdélníky $a_1 \times a_{2n}$ a $a_i \times a_j$, čímž se sumární obsah obdélníků zmenší, neboť platí

$$a_1 a_i + a_j a_{2n} > a_1 a_{2n} + a_i a_j.$$

podle pravidla (2) pro čísla $a_1 < a_j$ a $a_i < a_{2n}$. Nejmenší sumární obsah proto může mít jen taková vyhovující n-tice obdélníků, mezi nimiž je obdélník $a_1 \times a_{2n}$. Tento obdélník dáme stranou a uvažujeme úlohu o nejmenším obsahu pro redukovanou množinu M' o $2n-2$ prvcích $a_2 < a_3 < \ldots < a_{2n-1}$. Vše ostatní je už zbytečné opakovat.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte pravidlo (2) z řešení soutěžní úlohy. [Důkaz viz tamtéž.]

D1. Pravidlo (2) zmíněné v úloze N1 využijte k důkazu tzv. *permutačních nerovností*: Jsou-li $a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$ a $b_1 \leqq b_2 \leqq \ldots \leqq b_n$ dvě n-tice reálných čísel a $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, resp. $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ jejich libovolné permutace, pak pro součet $S = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$ platí $S_{\min} \leqq S \leqq S_{\max}$, kde $S_{\min} = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_n$ a $S_{\max} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$. [Návod: Jako v řešení soutěžní úlohy ukažte, že součet S lze zvětšit, jsou-li mezi jeho sčítanci x_ky_k členy a_1b_i a a_jb_1, přičemž $a_j > a_1$ a $b_i > b_1$. Podobně lze součet S zmenšit v případě sčítanců a_1b_i a a_jb_n, pokud $a_j > a_1$ a $b_n > b_i$. Takových zvětšení (zmenšení) lze opakovaně provést jen konečně mnoho.]

D2. Permutační nerovnost z úlohy D1 využijte k důkazu nerovností

$$a^3b + b^3c + c^3a \leqq a^4 + b^4 + c^4 \quad \text{a} \quad \frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geqq a^2 + b^2 + c^2$$

pro libovolná kladná čísla a, b, c. [Je-li $p \leqq q \leqq r$ neklesající pořadí čísel a, b, c, je $p^3 \leqq q^3 \leqq r^3$ a $p^{-1} \geqq q^{-1} \geqq r^{-1}$.]

D3. Zachovejme předpoklady a označení z úlohy D2. Ukažte, že sečtením n vhodných permutačních nerovností lze odvodit tzv. *Čebyševovy nerovnosti*

$$n \cdot S_{\min} \leqq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n) \leqq n \cdot S_{\max}.$$

S jejich pomocí pak dokažte, že pro libovolná kladná a, b, c platí

$$(a^2+b^2+c^2)(a^3+b^3+c^3) \leqq 3(a^5+b^5+c^5) \leqq (a^7+b^7+c^7)(a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}).$$

D4. Čísla od 1 do 2 000 byla rozdělena do 1 000 (disjunktních) dvojic (a_i, b_i) tak, že pro každé $i = 1, 2, \ldots, 1\,000$ je rozdíl $|a_i - b_i|$ je roven jednomu z čísel 1 nebo 6. Určete, jakou číslicí končí desítkový zápis čísla

$$S = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_{1000} - b_{1000}|.$$

[Nulou. Platí $S = 1\,000 + 5p$, kde p je počet dvojic (a_i, b_i) s vlastností $|a_i - b_i| = 6$. Počet těch dvojic, v nichž jsou obě čísla lichá, se musí rovnat počtu těch dvojic, kde jsou obě sudá. Proto je číslo p sudé.]

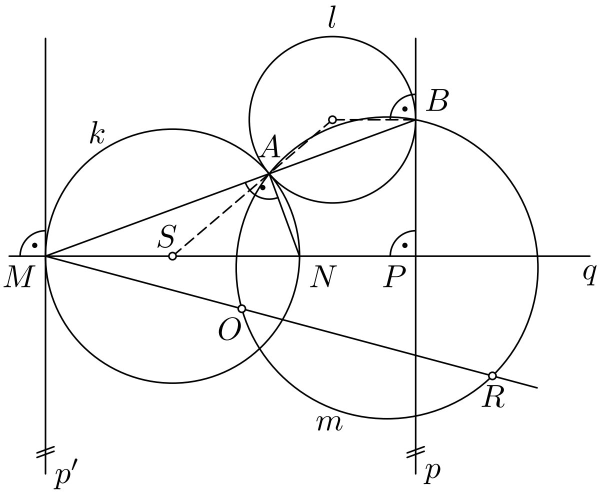
D5. Pro dané přirozené $n \geqq 2$ rozdělme množinu $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ libovolným způsobem na dvě (disjunktní) n-prvkové množiny A a B. Prvky A označme v rostoucím pořadí jako $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$, prvky B v klesajícím pořadí jako $b_1 > b_2 > \ldots > b_n$. Najděte všechny možné hodnoty součtu

$$S = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_n - b_n|.$$

[Všechny součty mají tutéž hodnotu $(n+1)+(n+2)+\ldots+2n-(1+2+\ldots+n) = n^2$. Návod: Pro každé i je menší z čísel a_i, b_i menší než $n-i$ čísel z jedné množiny a i čísel z druhé množiny, což dohromady znamená, že je menší než některých n čísel z celé množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$, musí proto ležet v množině $\{1, 2, \ldots, n\}$. Podobně větší z čísel a_i, b_i musí ležet v množině $\{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$.]

5. *Je dána kružnice k, bod O, který na ní neleží, a přímka p, která ji neprotíná. Uvažujme libovolnou kružnici l, která má vnější dotyk s kružnicí k a dotýká se i přímky p. Příslušné body dotyku označme A a B. Pokud body O, A, B neleží v přímce, sestrojíme kružnici m opsanou trojúhelníku OAB. Dokažte, že všechny takové kružnice m procházejí společným bodem různým od bodu O, anebo se dotýkají téže přímky.*

Řešení. Jedna z vyhovujících kružnic l je znázorněna na obr. 4. Bod A vnějšího dotyku kružnic k, l je jejich (vnitřním) středem stejnolehlosti, v níž tečně p kružnice l odpovídá s ní rovnoběžná tečna p' kružnice k. Její bod dotyku M s kružnicí k leží na ose q kružnice k, která je kolmá na přímku p. Přitom ze dvou průsečíků M, N přímky q s kružnicí k je bod M ten vzdálenější od přímky p, neboť úsečka spojující stejnolehlé body dotyku M a B protíná kružnici k v bodě A (středu příslušné stejnolehlosti).



Obr. 4

Bod M tedy na volbě kružnice l nezávisí. Body $A \in k$ a $B \in p$ pochopitelně ano, ukažme však, že jejich vzájemná poloha na polopřímce s počátkem M je vázána podmínkou

$$|MA| \cdot |MB| = |MN| \cdot |MP|, \tag{1}$$

kde P je průsečík kolmic p a q. To jednoduše plyne z podobnosti

$$|MA| : |MN| = |MP| : |MB|$$

pravoúhlých trojúhelníků AMN, PMB. Vztah (1) lze rovněž zdůvodnit pomocí mocnosti bodu M ke kružnici sestrojené nad průměrem NB (jež prochází body P, A podle Thaletovy věty).

Teprve nyní vstoupí do našich úvah daný bod O. Na obr. 4 je kružnice l vybrána tak, že odpovídající přímka AB bodem O neprochází, takže existuje kružnice m opsaná trojúhelníku OAB. Podle zadání platí $O \notin k$, a tedy $O \neq M$, takže je určena polopřímka MO, která kromě bodu O bude mít s kružnicí m společný ještě jeden bod, který označíme R (v případě, kdy MO je tečna kružnice m, položíme $R = O$).[1] Dvojím

[1] Zdůrazněme, že vzhledem ke vzájemné poloze bodů M, A, B leží bod M ve vnější oblasti *každé* kružnice procházející body A, B, tedy i kružnice m. Polopřímka MO tedy má s kružnicí m, není-li její tečnou, společné skutečně dva různé body.

vyjádřením mocnosti bodu M ke kružnici m pak dostaneme

$$|MA| \cdot |MB| = |MO| \cdot |MR|,$$

odkud porovnáním s (1) zjistíme, že úsečka MR má délku

$$|MR| = \frac{|MN| \cdot |MP|}{|MO|},$$

která zřejmě nezávisí na volbě kružnice l. Protože bod R navíc leží na pevné polopřímce MO, je v případě $|MR| \neq |MO|$ bod R společným bodem všech kružnic m ($R \neq O$), v případě $|MR| = |MO|$ je přímka MO jejich společná tečna. Tím je řešení úlohy u konce.

Návodné a doplňující úlohy:

Zopakujte si nejdříve učebnicové poznatky o stejnolehlosti dvou kružnic (zvlášť vyčleňte případ, kdy se kružnice dotýkají) a jejich rovnoběžných (speciálně společných) tečen. Připomeňte si rovněž vlastnost všech sečen dané kružnice jdoucích daných bodem, vyjádřenou mocností bodu ke kružnici.

N1. V rovině je dána kružnice k, přímka p a bod $B \in p$. Sestrojte kružnici l, která se dotýká jak kružnice k, tak přímky p, a to v bodě B. [Jedna ze známých tzv. *Pappových úloh.*]

D1. V rovině jsou dány kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ tak, že $S_2 \in k_1$ a $r_1 > r_2$. Společné tečny obou kružnic se dotýkají kružnice k_1 v bodech P a Q. Dokažte, že přímka PQ se dotýká kružnice k_2. [52–A–S–2]

D2. Jsou dány kružnice k a l s různými poloměry, které se vně dotýkají v bodě T. Průsečíkem M jejich společných vnějších tečen veďme sečnu s obou kružnic. Označme X ten z obou průsečíků kružnice k se sečnou s, který je vzdálenější od bodu M. Podobně označme Y ten z obou průsečíků kružnice l se sečnou s, který je vzdálenější od bodu M. Nechť P je takový bod, že $XTYP$ je rovnoběžník. Určete množinu bodů P odpovídajících všem takovým sečnám s. [49–B–I–2]

D3. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB. Na jeho výšce CD je zvolen bod P tak, že kružnice vepsané trojúhelníku ABP a čtyřúhelníku $PECF$ jsou shodné; přitom bod E je průsečík přímky AP se stranou BC a F průsečík přímky BP se stranou AC. Dokažte, že i kružnice vepsané trojúhelníkům ADP a BCP jsou shodné. [49–A–III–2]

2. V rovině jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 o různých poloměrech, které mají vnější dotyk v bodě T. Uvažujme libovolné dva body $A \in k_1$ a $B \in k_2$, oba různé od bodu T a vybrané tak, že úhel ATB je pravý.

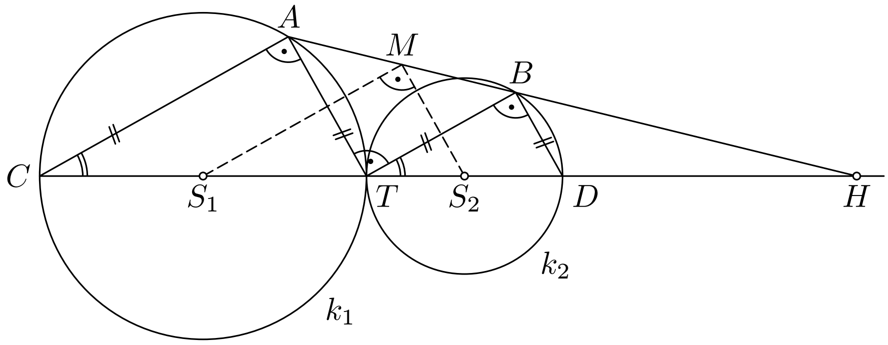
a) Dokažte, že všechny uvažované přímky AB procházejí týmž bodem.

b) Najděte množinu středů všech takových úseček AB.

4. Nechť M je libovolný vnitřní bod polokružnice k se středem S a průměrem AB. Označme k_A kružnici vepsanou kruhové výseči ASM a k_B kružnici vepsanou kruhové výseči BSM. Dokažte, že kružnice k_A a k_B leží v opačných polorovinách vyťatých některou přímkou kolmou k úsečce AB.

(Kružnice vepsaná kruhové výseči se dotýká obou ramen i hraničního oblouku.)

2. a) Na obr. 1 jsou zakresleny průměry CT, DT daných kružnic $k_1(S_1, r_1)$, resp. $k_2(S_2, r_2)$ a jedna dvojice vyhovujících bodů A, B. Protože středná S_1S_2 a na ni kolmá



Obr. 1

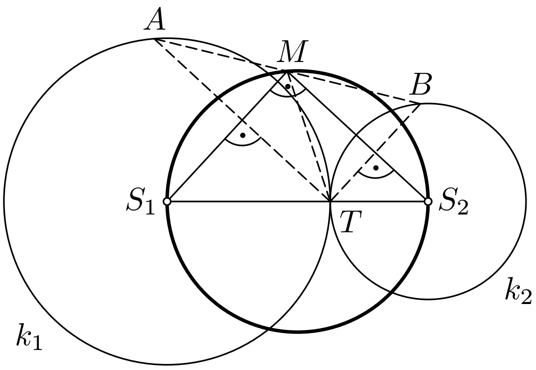
společná tečna obou kružnic v bodě T rozdělují rovinu na čtyři kvadranty, je zřejmé, že oba body A, B, které s bodem T tvoří pravý úhel (a musejí proto ležet v sousedních kvadrantech), leží v téže polorovině určené přímkou S_1S_2.

Z Thaletovy věty plyne, že $CA \perp AT \perp TB \perp BD$, takže $AC \parallel BT$ a $AT \parallel BD$. Proto podle věty uu platí $\Delta ACT \sim \Delta BTD$, odkud $|AC| : |BT| = |CT| : |TD| = r_1 : r_2$. Je-li např. $r_1 > r_2$, pak přímka AB protne polopřímku CT v takovém bodě H, že platí $|CH| : |TH| = r_1 : r_2$ (z podobných trojúhelníků ACH a BTH). Díky této úměře je bod H společný všem uvažovaným přímkám AB. Stejnou úvahu provedeme i v případě $r_1 < r_2$ (možnost $r_1 = r_2$ je zadáním úlohy vyloučena). Tím je tvrzení a) dokázáno.

Dodejme, že po zjištěních $AC \parallel BT$ a $AT \parallel BD$ jsme se mohli rovnou odvolat na školské poznatky o stejnolehlosti dvou kružnic. V případě $r_1 \neq r_2$ totiž vždy existuje vnější střed H stejnolehlosti kružnic k_1, k_2, v níž tětivy AC, AT kružnice k_1 musí přejít v rovnoběžné tětivy BT, resp. BD kružnice k_2, neboť krajní body C, T prvních dvou tětiv přejdou v krajní body T, resp. D druhých dvou tětiv. Proto bod A přejde do bodu B, takže přímka AB prochází vnějším středem H.

b) Označme M střed úsečky AB (obr. 1) a využijme znovu vztahy $CA \perp AT \perp$ $\perp TB \perp BD$. Úsečky S_1M a S_2M jsou střední příčky lichoběžníků $CTBA$, resp. $DTAB$, takže platí $S_1M \parallel TB \perp AT \parallel S_2M$, tedy úhel S_1MS_2 je pravý. Bod M proto leží na Thaletově kružnici nad průměrem S_1S_2 a je různý od bodů S_1 a S_2 (úsečka AB střednou S_1S_2 neprotne).

Obráceně, je-li M libovolný bod nalezené Thaletovy kružnice různý od S_1, S_2 a sestrojíme-li tětivu TA kružnice k_1 kolmou k úsečce S_1M a tětivu TB kružnice k_2 kolmou k úsečce S_2M (obr. 2), bude úhel ATB stejně jako úhel S_1MS_2 pravý a přímky S_1M, S_2M budou osami úseček TA, resp. TB. Budou tudíž platit rovnosti $|MA| = |MT| = |MB|$, takže bod M bude středem kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku TAB, bude tedy středem jeho přepony AB.

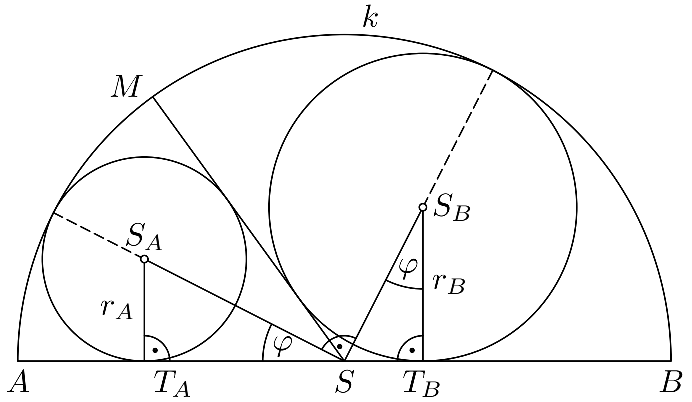


Obr. 2

Hledanou množinou středů úseček AB je kružnice nad průměrem S_1S_2 s vyloučenými body S_1, S_2.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, 3 body za každou z obou částí a) a b). V části a) udělte 1 bod za odvození vztahů $AC \parallel BT$ a $AT \parallel BD$, 2 body za nalezení společného bodu H všech přímek AB (řešitelé se mohou odvolat na poznatky o stejnolehlosti kružnic). V části b) udělte 2 body za odvození poznatku, že střed M leží na objevené Thaletově kružnici a 1 bod za vysvětlení, že každý bod této kružnice (s výjimkou bodů S_1, S_2) je středem některé vyhovující úsečky AB.

4. Podle obr. 5 zaveďme označení $k_A(S_A, r_A)$, $k_B(S_B, r_B)$, $T_A \in AB \cap k_A$, $T_B \in AB \cap \cap k_B$, $\varphi = \frac{1}{2}|\sphericalangle ASM|$. Protože polopřímky SS_A, SS_B jsou osami vedlejších úhlů ASM a BSM, je úhel S_ASS_B pravý a platí $\varphi = |\sphericalangle ASS_A| = |\sphericalangle SS_BT_B|$.



Obr. 5

Přímka s požadovanou vlastností existuje, právě když kolmé průměty kružnic k_A, k_B na přímku AB mají nejvýše jeden společný bod. Těmito průměty jsou úsečky se středy T_A, T_B a jejich délky jsou $2r_A$ a $2r_B$, takže podmínka z předchozí věty je ekvivalentní nerovnosti

$$|T_AT_B| \geqq r_A + r_B. \tag{1}$$

Označme ještě r poloměr polokružnice k. Pak $|SS_A| = r - r_A$, $|SS_B| = r - r_B$ a z pravoúhlých trojúhelníků S_AST_A, S_BST_B plynou vyjádření

$$\begin{aligned} r_A &= (r - r_A)\sin\varphi, \quad & |T_AS| &= (r - r_A)\cos\varphi, \\ r_B &= (r - r_B)\cos\varphi, \quad & |T_BS| &= (r - r_B)\sin\varphi, \end{aligned}$$

z nichž snadným výpočtem dostaneme

$$\begin{aligned} r_A &= \frac{r\sin\varphi}{1+\sin\varphi}, \quad & |T_AS| &= \frac{r\cos\varphi}{1+\sin\varphi}, \\ r_B &= \frac{r\cos\varphi}{1+\cos\varphi}, \quad & |T_BS| &= \frac{r\sin\varphi}{1+\cos\varphi}. \end{aligned}$$

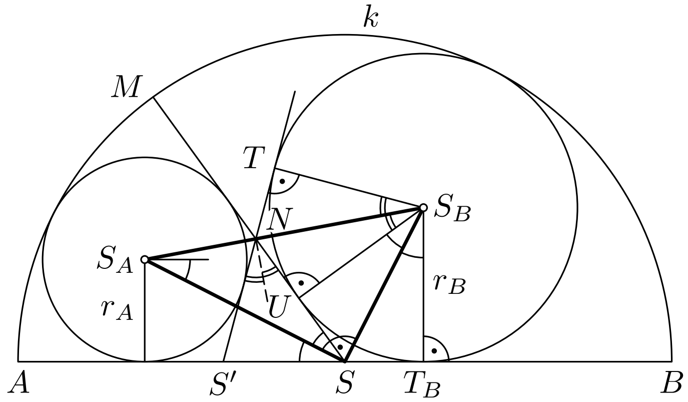
Protože $|T_AT_B| = |T_AS| + |T_BS|$, můžeme čtyři poslední vztahy dosadit do zkoumané nerovnosti (1) a tu dále ekvivalentně upravovat:

$$\begin{aligned} \frac{r\cos\varphi}{1+\sin\varphi}+\frac{r\sin\varphi}{1+\cos\varphi} &\geqq \frac{r\sin\varphi}{1+\sin\varphi}+\frac{r\cos\varphi}{1+\cos\varphi},\\ \cos\varphi(1+\cos\varphi)+\sin\varphi(1+\sin\varphi) &\geqq \sin\varphi(1+\cos\varphi)+\cos\varphi(1+\sin\varphi),\\ 1 &\geqq 2\sin\varphi\cos\varphi,\\ \sin 2\varphi &\leqq 1. \end{aligned}$$

Poslední nerovnost zřejmě platí, takže platí i nerovnost (1) a úloha je vyřešena.

Jiné řešení. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že pro poloměry obou kružnic platí $r_A < r_B$ (pro shodné kružnice k_A, k_B je tvrzení úlohy triviální), což je ekvivalentní nerovnosti $|SS_A| > |SS_B|$. Protože polopřímky SS_A, SS_B jsou osami vedlejších úhlů ASM a BSM, je úhel S_ASS_B pravý (obr. 6). V pravoúhlém trojúhelníku S_ASS_B pro úhel proti delší odvěsně S_AS tudíž platí $|\sphericalangle S_AS_BS| > 45°$ a naopak $|\sphericalangle S_BS_AS| < 45°$. To navíc znamená, že i úhel S_ASA, který je menší než úhel S_BS_AS (neboť $r_A < r_B$), je menší než $45°$, neboli úhel ASM je ostrý.

Označme N průsečík středné S_AS_B obou kružnic s tečnou SM a sestrojme druhou vnitřní společnou tečnu $S'N$ (obr. 6), kde S' je bod, v němž zmíněná tečna protne úsečku AS (obě tečny jsou souměrně sdruženy podle středné S_AS_B). Její dotykový bod s kružnicí k_B označme T a bod dotyku téže kružnice s první tečnou SM označme U.



Obr. 6

Zaměřme se teď na trojúhelník $S'SN$, který má u vrcholu S úhel shodný s úhlem ASM, jenž je, jak jsme již zdůvodnili, ostrý. Ukážeme nyní, že také úhel u vrcholu S' je ostrý. Ze zřejmé shodnosti dvojic úhlů $S'NS$, TS_BU a $S'SN$, T_BS_BU (jejich ramena jsou navzájem kolmá) pro součet úhlů u vrcholu S a N zkoumaného trojúhelníku $S'SN$ totiž plyne

$$|\sphericalangle S'NS| + |\sphericalangle S'SN| = |\sphericalangle TS_BU| + |\sphericalangle T_BS_BU| = 2|\sphericalangle S_AS_BS| > 90°.$$

To znamená, že přímka obsahující výšku z vrcholu N v trojúhelníku $S'SN$ má požadovanou vlastnost: odděluje obě kružnice k_A, k_B a je kolmá na AB.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Sestavení nerovnosti (1) oceňte 2 body. Podobně oceňte myšlenku, že kolmice z bodu N na AB má požadovanou vlastnost.

První rovnost vyjadřuje (kladnou) mocnost bodu S_2 ke kružnici k_1. Druhá rovnost plyne z Eukleidovy věty o odvěsně S_2B pravoúhlého trojúhelníku S_2BA, protože střed P úsečky BC je nejen patou výšky z vrcholu A, ale také středem kosočtverce CS_2BV, tudíž

$$r_2^2 = |S_2B|^2 = |S_2P| \cdot |S_2A| = \tfrac{1}{2}|S_2V| \cdot |S_2A|.$$

5. *Karel v jistý okamžik na svých přesně jdoucích hodinkách zjistil, že konec velké ručičky, konec malé ručičky a vhodný bod na kružnici ciferníku tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku. Než tento jev nastal podruhé, uplynula doba t. Najděte největší možné t pro dané hodinky v závislosti na poměru k délek obou ručiček ($k > 1$), když poloměr kružnice ciferníku je shodný s délkou velké ručičky.*

(Jaromír Šimša)

Řešení. Ukážeme, že hledané největší t je rovno $4/11$ hod nezávisle na poměru k délek ručiček.

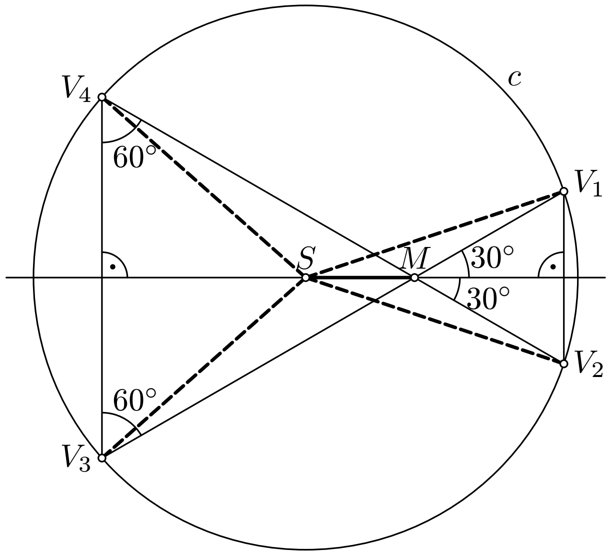
Označme c kružnici ciferníku, S její střed a M konec malé ručičky (obr. 2). Vysvětlíme nejprve, proč při pevné poloze bodu M existují právě dva rovnostranné trojúhelníky MXY s vrcholy X, Y na kružnici c. Protože přímka SM musí být osou tětivy XY, a tedy i osou úhlu XMY, svírají obě přímky MX, MY s přímkou SM úhel $30°$. Proto je trojúhelník MXY totožný s jedním z rovnostranných trojúhelníků MV_1V_2, MV_3V_4 sestrojených na obr. 2.

Body V_i rozdělují kružnici c na čtyři oblouky. Obloukům V_2V_3 a V_4V_1 příslušejí obvodové úhly $V_2V_4V_3$, $V_1V_3V_4$ velikosti $60°$. Proto podle věty o obvodovém a středovém úhlu platí první dvě z rovností

$$|\sphericalangle V_2SV_3| = |\sphericalangle V_4SV_1| = 120° \quad \text{a} \quad |\sphericalangle V_1SV_2| + |\sphericalangle V_3SV_4| = 120°,$$

třetí rovnost je jejich důsledkem (dopočítáním podle plného úhlu u vrcholu S). Plyne z ní, že oba středové úhly V_1SV_2, V_3SV_4 jsou menší než $120°$.

Můžeme si představit, že malá ručička hodinek je nehybná a velká ručička se kolem středu S otáčí úhlovou rychlostí $(360-30)° = 330°$ za hodinu. Jak jsme zjistili, zkoumaný



Obr. 2

jev nastane, právě když konec V velké ručičky splyne s jedním ze čtyř bodů V_i. Mezi dvěma po sobě jdoucími jevy se proto velká ručička otočí o úhel, který má ve dvou případech velikost 120° a ve zbylých dvou případech velikosti $|\sphericalangle V_1SV_2|$ a $|\sphericalangle V_3SV_4|$, které jsou menší než 120° (a závisí na poměru k). Nejdelší doba t je tedy na poměru k nezávislá a je rovna 120/330 hod.

---

6. *Určete největší reálné číslo p a nejmenší reálné číslo q, pro něž nerovnosti*

$$p < \frac{a+t_b}{b+t_a} < q$$

platí v libovolném trojúhelníku ABC se stranami a, b a těžnicemi t_a, t_b.

(Pavel Novotný)

Řešení. Ukážeme, že hledaná čísla jsou $p = 1/4$ a $q = 4$. Stačí pouze zdůvodnit, že $q = 4$ (pak totiž $p = 1/4$, neboť záměna stran a, b mění hodnotu zkoumaného zlomku na převrácené číslo).

Podle trojúhelníkových nerovností platí

$$\tfrac{1}{2}a < b + t_a \quad \text{a} \quad \tfrac{1}{3}t_b < \tfrac{2}{3}t_a + \tfrac{1}{2}b.$$

První nerovnost vynásobíme dvěma, druhou třemi a pak je sečteme:

$$a + t_b < (2b + 2t_a) + \left(2t_a + \tfrac{3}{2}b\right) = \tfrac{7}{2}b + 4t_a < 4(b + t_a).$$

Požadovanou vlastnost má tedy každé číslo $q \geqq 4$; ukážeme ještě, že ji nemá žádné číslo $q < 4$. K tomu uvážíme rovnoramenný trojúhelník ABC, ve kterém $a = c = 1$ a $b \in (0, 2)$ (takový trojúhelník existuje pro libovolné b z uvedeného intervalu). Z obecných vzorců

$$t_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}, \quad t_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}$$

dostaneme $t_a = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 2b^2}$ a $t_b = \frac{1}{2}\sqrt{4 - b^2}$, odkud

$$\frac{a + t_b}{b + t_a} = \frac{2 + \sqrt{4 - b^2}}{2b + \sqrt{1 + 2b^2}}.$$

Poslední zlomek může být pro malé kladné b libovolně blízký číslu 4. Vysvětlíme to takto: zvolíme-li $\varepsilon > 0$, pak pro všechna dostatečně malá kladná b současně platí

$$\sqrt{4-b^2} > 2-\varepsilon, \quad 2b < \varepsilon \quad \text{a} \quad \sqrt{1+2b^2} < 1+\varepsilon,$$

takže

$$\frac{a+t_b}{b+t_a} > \frac{4-\varepsilon}{1+2\varepsilon},$$

a je snadné vybrat $\varepsilon > 0$ tak, aby byl poslední zlomek větší než jakékoliv předem zvolené q menší než 4. Stačí, aby platilo

$$\varepsilon < \frac{4-q}{1+2q}.$$

2. Podstavy hranolu tvoří dva shodné konvexní n-úhelníky. Počet v vrcholů tohoto tělesa, počet s jeho stěnových úhlopříček a počet t jeho tělesových úhlopříček tvoří v jistém pořadí první tři členy aritmetické posloupnosti. Pro která n to platí?
(Poznámka: Stěnami hranolu rozumíme boční stěny i podstavy. Tělesová úhlopříčka je úsečka, jež spojuje dva vrcholy hranolu, které neleží v téže stěně.)

3. V rovině je dán úhel XSY a kružnice k o středu S. Uvažujme libovolný trojúhelník ABC s vepsanou kružnicí k, jehož vrcholy A a B leží po řadě na polopřímkách SX a SY. Určete množinu vrcholů C všech takových trojúhelníků ABC.

2. Každý n-boký hranol má právě n vrcholů v každé ze svých podstav, takže platí $v = 2n$. Z každého vrcholu vychází $n-3$ úhlopříček ležících v podstavě a dvě úhlopříčky ležící v bočních stěnách, celkem je to $n-1$ stěnových úhlopříček. Z $2n$ vrcholů tedy vychází $2n(n-1)$ stěnových úhlopříček, každá z nich je však započítána dvakrát, proto $s = n(n-1)$. Podobně určíme počet t tělesových úhlopříček: z každého vrcholu jich vychází $n-3$ (do všech vrcholů druhé podstavy s výjimkou těch tří vrcholů, se kterými je daný vrchol spojen hranou nebo úhlopříčkou v boční stěně), proto $t = 2n(n-3) : 2 = n(n-3)$.

Hledáme ta celá $n \geqq 3$, pro něž čísla

$$v = 2n, \quad s = n(n-1) \quad \text{a} \quad t = n(n-3)$$

tvoří ve vhodném pořadí trojici x, y, z s vlastností $y - x = z - y$ neboli $y = \frac{1}{2}(x + z)$. Snadným dosazením zjistíme, že pro $n = 3$ jde o nevyhovující trojici čísel 6, 6, 0, zatímco pro $n = 4$ vychází vyhovující trojice 8, 12, 4 (platí $8 = \frac{1}{2}(4 + 12)$). Pro libovolné $n \geqq 5$ máme $n - 1 > n - 3 \geqq 2$, odkud po násobení číslem n dostaneme $s > t \geqq v$, takže požadovaná rovnost s aritmetickým průměrem musí být tvaru $t = \frac{1}{2}(v + s)$. Po dosazení dostáváme rovnici

$$n(n-3) = \frac{2n + n(n-1)}{2}$$

s jediným přípustným kořenem $n = 7$ (kořen $n = 0$ nemá reálný smysl).

Závěr: Vyhovují jedině $n = 4$ a $n = 7$.

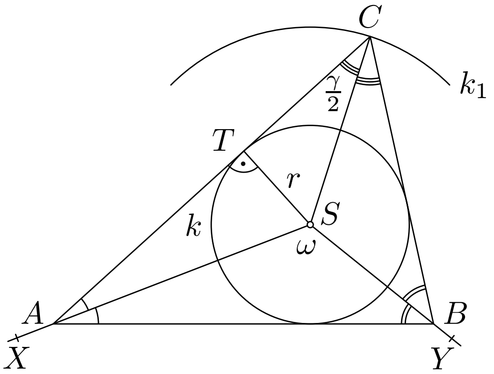
Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za vyjádření počtu s a 2 body za vyjádření počtu t (v závislosti na proměnné n), další body podle úplnosti diskuse, v jakém pořadí mohou čísla v, s, t tvořit aritmetickou posloupnost. Pokud řešitel opomene řešení $n = 4$ (např. prohlásí za zřejmé nerovnosti $s > t > v$), udělte nejvýše 5 bodů.

3. Označme r poloměr dané kružnice k a ω velikost daného (konvexního) úhlu XSY. V libovolném vyhovujícím trojúhelníku ABC označme obvyklým způsobem vnitřní úhly. V trojúhelníku ABS platí (obr. 1)

$$\omega = |\sphericalangle ASB| = 180^\circ - |\sphericalangle SAB| - |\sphericalangle SBA| = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2},$$

odkud plyne, že hledaná množina je prázdná, pokud $\omega \leqq 90^\circ$ nebo $\omega = 180^\circ$, a že všechny vyhovující trojúhelníky ABC mají vnitřní úhel γ, pro jehož velikost platí

$$\gamma = 2\omega - 180^\circ.$$



Obr. 1

Z pravoúhlého trojúhelníku CST, kde T je bod dotyku kružnice k se stranou AC (obr. 1), vyjádříme délku přepony SC vztahem

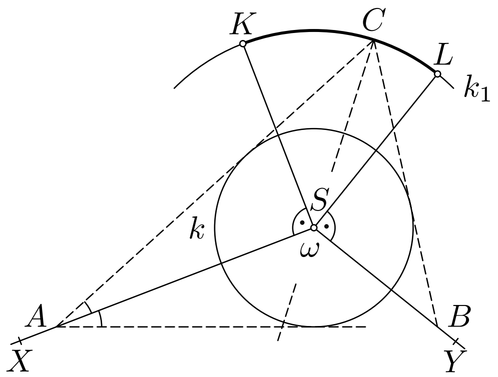
$$|SC| = \frac{|ST|}{\sin \frac{1}{2}\gamma} = \frac{r}{\sin(\omega - 90^\circ)}.$$

Bod C proto leží na kružnici k_1 o středu S a poloměru $r_1 = r/\sin(\omega - 90^\circ)$.

Stejně jako úhel ASB jsou i úhly ASC a BSC (neboli úhly XSC a YSC) tupé, neboť

$$|\sphericalangle ASC| = 90^\circ + \frac{\beta}{2} \quad \text{a} \quad |\sphericalangle BSC| = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}. \tag{1}$$

Dohromady tak dostáváme, že bod C je vnitřním bodem oblouku KL kružnice k_1, který leží vně daného úhlu XSY a jehož krajní body K, L jsou určeny pravými úhly XSK a YSL (obr. 2).



Obr. 2

Vybereme-li naopak libovolný vnitřní bod C oblouku KL, polopřímky SX, SY a SC rozdělí rovinu na tři tupé úhly, přičemž polopřímka CS oddělí body X a Y. Z rovnosti $|SC| = r_1$ plyne, že tečna z bodu C ke kružnici k sestrojená v polorovině CSX svírá s polopřímkou CS ostrý úhel $\omega - 90^\circ$, takže protne polopřímku SX v bodě, který označíme A. Analogicky tečna z bodu C ke kružnici k sestrojená v polorovině CSY protne polopřímku SY v bodě, který označíme B.

Zvolme nyní hodnoty α, β, γ tak, aby $\omega - 90^\circ = \frac{1}{2}\gamma$, $|\sphericalangle CSK| = \frac{1}{2}\beta$, $|\sphericalangle CSL| = \frac{1}{2}\alpha$, potom z plného úhlu u vrcholu S vyplývá

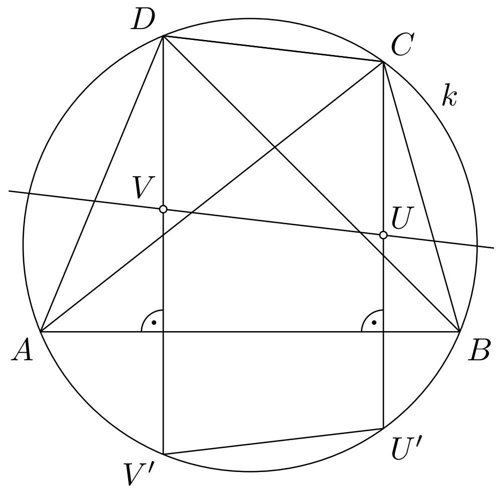
$$\frac{\alpha + \beta}{2} = 180^\circ - \omega = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} \quad \text{neboli } \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Jak snadno spočteme, tečna z nalezeného bodu A ke kružnici k souměrně sdružená s tečnou AC podle přímky SX protíná polopřímku CS pod úhlem $\frac{1}{2}\gamma + \alpha$, a podobně vyjde, že analogická tečna z nalezeného bodu B protne tutéž polopřímku pod úhlem $\frac{1}{2}\gamma + \beta$. Součet obou uvedených úhlů je však 180°, proto jsou obě tečny ke kružnici k rovnoběžné, a tedy totožné (oba příslušné body dotyku musejí totiž ležet uvnitř konvexního úhlu XSY). Nalezený trojúhelník ABC má proto požadované vlastnosti.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za určení úhlu γ udělte 1 bod, další 2 body za určení poloměru $r_1 = |SC|$ kružnice k_1 a 2 body za vymezení jejího oblouku KL. Chybí-li závěrečné zdůvodnění, že každý vnitřní bod C oblouku KL je vrcholem vyhovujícího trojúhelníku ABC, může řešitel získat nejvýše 5 bodů.

2. *Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Dokažte, že spojnice průsečíku výšek trojúhelníku ABC s průsečíkem výšek trojúhelníku ABD je rovnoběžná s přímkou CD.*

Řešení. Označme k kružnici opsanou čtyřúhelníku $ABCD$. Průsečíky výšek trojúhelníků ABC a ABD označme postupně U a V (obr. 2).



Obr. 2

Několik známých vlastností průsečíku výšek souvisejících s opsanou kružnicí je zachyceno v návodných a doplňujících úlohách. V dané situaci sa nám bude hodit, že obraz U' bodu U v osové souměrnosti podle strany AB leží na kružnici k, která je trojúhelníku ABC opsána. (To platí i pro tupoúhlý trojúhelník ABC.) Podobně leží na kružnici k i obraz V' bodu V v téže osové souměrnosti.

Předpokládejme, že trojúhelníky ABC a ABD jsou ostroúhlé. Body U a V tedy leží v polorovině ABC. Obě kolmice CU' a DV' na stranu AB jsou rovnoběžné, takže čtyřúhelník $CU'V'D$ je tětivový lichoběžník, který je nutně rovnoramenný.[1] Odtud a z vlastností osové souměrnosti dostáváme rovnosti

$$|\sphericalangle CDV'| = |\sphericalangle U'V'D| = |\sphericalangle UVV'|.$$

Protože body C a U leží v téže polorovině vzhledem k přímce $V'D$, jsou přímky CD a UV rovnoběžné, což jsme měli dokázat. (V poslední úvaze jsme využili, že body D, V, V' leží na přímce v tomto pořadí.)

V případě, kdy je aspoň jeden z trojúhelníků ABC a ABD tupoúhlý, je argumentace velmi podobná. Body C, D, V', U' vždy vytvoří rovnoramenný lichoběžník, i když ne nutně v uvedeném pořadí.

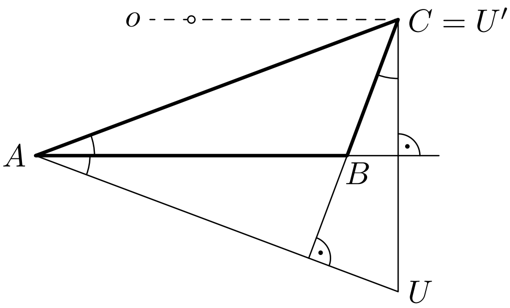
Jiné řešení. Pokud je AB průměrem kružnice k opsané danému tětivovému čtyřúhelníku $ABCD$, jsou zřejmě oba trojúhelníky ABC a ABD pravoúhlé, takže platí $U = C$, $V = D$ a není co dokazovat.

V opačném případě uvažme osu o kružnice k rovnoběžnou se stranou AB, $o \neq AB$. Jak už víme, obrazy U' a V' bodů U a V v osové souměrnosti podle strany AB leží na kružnici k opsané oběma trojúhelníkům ABC a ABD. Obě tětivy CU' i DV' jsou kolmé na osu o, takže body C a D jsou obrazy bodů U' a V' v osové souměrnosti podle

[1] Viz úlohu N1.

osy o. To znamená, že úsečka CD je obrazem úsečky UV ve složení obou uvedených osových souměrností. Složením dvou osových souměrností s rovnoběžnými osami je ovšem posunutí, takže $CD \parallel UV$. Tím je tedy tvrzení úlohy dokázáno.

Jsou to opravdu tětivy? Pokud je příslušný trojúhelník ABC či ABD ostroúhlý, není o tom pochyb. Podobně i v případě tupého úhlu při vrcholu C (a tedy i D); v obou případech jsou body C, U' i D, V' odděleny přímkou AB. Zbývá možnost, kdy je tupý úhel při jednom z vrcholů A nebo B (s ohledem na symetrii rozebereme pouze druhou možnost, obr. 3). Je-li $C = U'$, je trojúhelník UCA souměrný podle přímky AB, takže $|\sphericalangle BCU| = |\sphericalangle UAB| = |\sphericalangle CAB|$. Z rovnosti obvodového (CAB) a úsekového (BCU) úhlu tětivy BC nyní plyne, že výška CU je tečnou opsané kružnice, bod $C = U'$ tak leží na ose o (je samodružným bodem zmíněné osové souměrnosti) a postup popsaný v předchozím odstavci je naprosto korektní.



Obr. 3

Jiné řešení. Uvažujme tětivu AB dané kružnice k. Pro libovolný bod C na jednom z oblouků AB kružnice k označme U průsečík výšek příslušného trojúhelníku ABC. Ukážeme, že délka úsečky CU nezávisí na poloze bodu C na zvoleném oblouku AB.

Pokud je AB průměr dané kružnice, je $C = U$ a uvedené tvrzení zřejmě platí. V opačném případě je $U \neq C$. Označme K patu výšky z vrcholu A na stranu BC a L patu výšky z vrcholu C na stranu AB. Výšky AK a CL zřejmě svírají stejný úhel jako přímky BC a AB, k nimž jsou kolmé. To znamená, že úhly CUK a ABC mají stejný sinus. Z pravoúhlých trojúhelníků UKC a AKC tak máme (při označení velikostí stran a úhlů obvyklým způsobem)

$$|CU| = \frac{|CK|}{\sin|\sphericalangle CUK|} = \frac{b|\cos\gamma|}{\sin\beta} = \frac{c|\cos\gamma|}{\sin\gamma},$$

přičemž poslední rovnost plyne ze sinové věty pro trojúhelník ABC. Délka úsečky CU tedy závisí jen na délce úsečky AB a na velikosti příslušného obvodového úhlu ACB. Protože úsečka AB i oblouk kružnice jsou dány, délka úsečky CU se nemění.

Vrcholy C a D daného čtyřúhelníku leží na témže oblouku AB opsané kružnice. Podle předchozí úvahy jsou tedy úsečky CU a DV stejně dlouhé. Coby výšky na tutéž stranu jsou navíc rovnoběžné, a to souhlasně (podle toho, zda je úhel γ ostrý nebo tupý, má vektor $\boldsymbol{CU}$ stejný směr jako $\boldsymbol{CL}$ či opačný). Čtyřúhelník $CDVU$ je tedy rovnoběžník, což znamená, že přímky CD a VU jsou rovnoběžné.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že každý lichoběžník, kterému lze opsat kružnici, je rovnoramenný. [Rameno LM libovolného lichoběžníku $KLMN$ je vidět z vrcholu K pod stejným úhlem jako rameno KN z vrcholu M. Je-li lichoběžník $KLMN$ tětivový, předchozí věta znamená, že tětivy LM a KN opsané kružnice musí být shodné; jsou to však právě obě ramena.]

N2. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník s průsečíkem výšek V a opsanou kružnicí k. Dokažte, že obraz V' bodu V v osové souměrnosti podle přímky AB leží na kružnici k. Mají stejnou vlastnost i tupoúhlé trojúhelníky? [Stačí vyjádřit velikost úhlu AVB z trojúhelníku AVB, v němž zbylé dva úhly dopočítáme z vhodných pravoúhlých trojúhelníků. Tento úhel má velikost $180° - |\sphericalangle ACB|$, odkud plyne, že čtyřúhelník $ACBV'$ je tětivový. Obraz průsečíku výšek v osové souměrnosti podle strany leží na opsané kružnici i v případě, že trojúhelník je tupoúhlý. Tvrzení dokážeme podobně výpočtem velikostí vhodných úhlů.]

N3. Označme V průsečík výšek ostroúhlého trojúhelníku ABC. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům ABV, BCV, CAV jsou shodné, a porovnejte jejich poloměr s poloměrem kružnice opsané trojúhelníku ABC. [Všechny tři kružnice jsou obrazem kružnice opsané trojúhelníku ABC v osové souměrnosti podle příslušné strany. Je to přímý důsledek předcházející návodné úlohy.]

N4. Je dán trojúhelník ABC s průsečíkem výšek V. Vyjádřete velikost úsečky CV pomocí délek stran a velikostí úhlů trojúhelníku ABC. Snažte se, aby vaše vyjádření bylo co nejjednodušší. [Viz poslední uvedené řešení soutěžní úlohy. Možných postupů i vyjádření je více.]

D1. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník s průsečíkem výšek V a opsanou kružnicí k. Dokažte, že obraz bodu V ve středové souměrnosti podle středu úsečky AB leží na kružnici k a je jejím nejvzdálenějším bodem od vrcholu C. Mají stejnou vlastnost i tupoúhlé trojúhelníky? [Uvažte, že body A, B, V se zmíněným obrazem tvoří vrcholy rovnoběžníku, o velikosti jeho vnitřního úhlu AVB již víte z úlohy N2.]

D2. V rovině jsou dány tři navzájem různé shodné kružnice se společným bodem V. Druhé průsečíky dvojic těchto kružnic (různé od bodu V) označme A, B, C. Dokažte, že bod V je průsečíkem výšek trojúhelníku ABC. [Využijte toho, že každé z tětiv AV, BV, CV odpovídají ve dvou z daných kružnic stejné obvodové úhly, k důkazu poznatku, že jak úhly AVB a ACB, tak úhly AVC a ABC i úhly BVC a BCA se doplňují do přímého úhlu (rozlište případy různých poloh bodu V vůči trojúhelníku ABC). Při zadaném trojúhelníku ABC má tuto vlastnost jediný bod V – průsečík jeho výšek.]

D3. Je dán trojúhelník ABC. Dokažte, že osa úhlu ACB a osa strany AB se protínají na kružnici opsané trojúhelníku ABC. [Střed M oblouku AB leží na ose úhlu ACB, neboť z rovnosti $|AM| = |BM|$ plyne, že obě tětivy AM a BM jsou z bodu C vidět pod stejným úhlem.]

D4. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme L, M středy kružnic vepsaných postupně trojúhelníkům BCA, BCD. Dále označme R průsečík kolmic vedených z bodů L a M postupně na přímky AC a BD. Dokažte, že trojúhelník LMR je rovnoramenný. [56–A–III–2]

D5. Na kružnici o poloměru r leží pět různých bodů A, B, C, D, E v tomto pořadí, pričemž platí $|AC| = |BD| = |CE| = r$. Dokažte, že trojúhelník, jehož vrcholy jsou ortocentra trojúhelníků ACD, BCD a BCE, je pravoúhlý. [C-P-S trojstřetnutí 2006/1]

D6. Dokažte, že všechny středy stran a paty výšek v libovolném trojúhelníku leží na jedné kružnici. (Tato kružnice je známa jako *Feuerbachova kružnice* nebo *kružnice devíti bodů* — kromě zmíněných šesti bodů na ní totiž ještě leží středy úseček spojujících průsečík výšek s jednotlivými vrcholy trojúhelníku.) [Uvažte obraz kružnice opsané ve stejnolehlosti se středem v průsečíku výšek a koeficientem 1/2 a využijte výsledku úloh N2 a D1, viz str. 28–29 brožury O podobnosti v geometrii, ŠMM 7.]

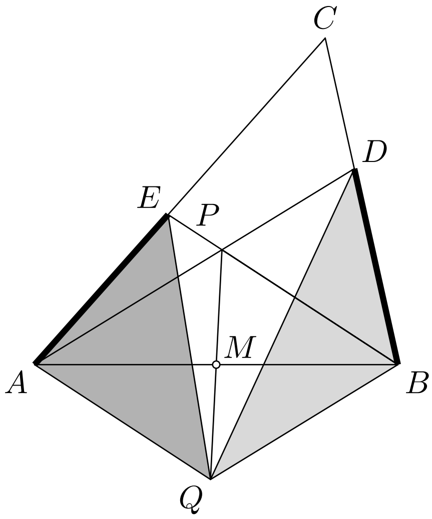
D7. Je dán trojúhelník ABC a bod P v jeho rovině. Označme D, E, F paty kolmic z bodu P na přímky AB, BC, CA. Dokažte, že pokud bod P leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC, leží body D, E, F v přímce. (Tato přímka sa nazývá *Simsonovou přímkou* bodu P.) Má stejnou vlastnost i nějaký bod P ležící mimo kružnici opsanou trojúhelníku ABC? [Viz Švrček – Vanžura: Geometrie trojúhelníka, str. 53.]

D8. Nechť P je bod na kružnici opsané trojúhelníku ABC. Označme V průsečík výšek trojúhelníku ABC. Dokažte, že průsečík Simsonovy přímky bodu P s úsečkou PV je středem úsečky PV a leží na Feuerbachově kružnici trojúhelníku ABC. (Řešení této náročné úlohy je možno najít na stránce `http://mathforum.org/library/drmath/view/61688.html`.)

D9. Nechť PQ je libovolný průměr kružnice opsané trojúhelníku ABC. Dokažte, že Simsonovy přímky bodů P a Q jsou na sebe kolmé a protínají se na Feuerbachově kružnici trojúhelníku ABC. (Druhá část této úlohy je vskutku náročná.)

6. *Je dán trojúhelník ABC. Uvnitř stran AC, BC jsou dány body E, D tak, že $|AE| = |BD|$. Označme M střed strany AB a P průsečík přímek AD a BE. Dokažte, že obraz bodu P v středové souměrnosti se středem M leží na ose úhlu ACB.*

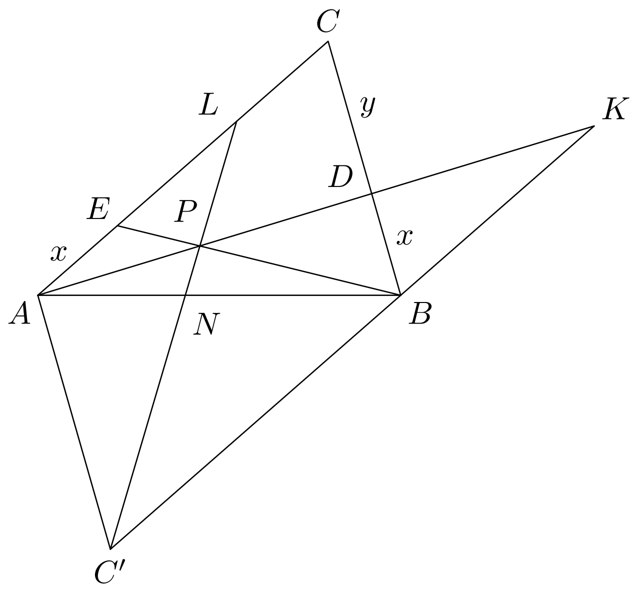
Řešení. Označme Q obraz bodu P ve středové souměrnosti se středem M. Bod Q bude ležet na ose úhlu ACB, právě když bude mít stejnou vzdálenost od obou přímek AC a BC. Vzhledem k tomu, že úsečky AE a BD mají stejnou délku, vidíme, že bod Q bude stejně vzdálen od přímek AC a BC, právě když trojúhelníky AEQ a BDQ budou mít stejný obsah (obr. 4). Rovnost jejich obsahů teď dokážeme.



Obr. 4

Z konstrukce bodu Q plyne, že $AQBP$ je rovnoběžník, tj. přímka QB je rovnoběžná s přímkou AD, proto mají trojúhelníky QBD a QBA stejný obsah (mají shodné výšky na společnou základnu QB). Podobně z rovnoběžnosti přímek QA a BE plyne rovnost obsahů trojúhelníků QAE a QAB. Tím je rovnost obsahů trojúhelníků AEQ a BDQ dokázána, a tudíž je dokázáno i tvrzení úlohy.

Jiné řešení. Označme C' obraz bodu C a Q obraz bodu P ve středové souměrnosti podle středu M. Dále označme K průsečík přímek $C'B$ a AD. Průsečíky přímky $C'P$ s přímkami AB a AC označme N a L (obr. 5).



Obr. 5

Máme dokázat, že bod Q leží na ose úhlu ACB, což je díky vlastnostem středové souměrnosti ekvivalentní tomu, že bod P leží na ose úhlu $AC'B$ (vnitřního úhlu v trojúhelníku $AC'B$). Je známo (viz druhou návodnou úlohu), že toto nastane, právě když bod N rozdělí úsečku AB v poměru délek úseček AC' a BC'. Pokusíme se tedy určit poměr $|AN| : |BN|$.

Označme $|BD| = |AE| = x$, $|CD| = y$ a $|AC| = b$. Trojúhelníky ADC a KDB jsou podobné, proto

$$\frac{|BK|}{|AC|} = \frac{|BD|}{|CD|} = \frac{x}{y}, \quad \text{takže} \quad \frac{|BK|}{|BC'|} = \frac{x}{y}.$$

Ze stejnolehlosti se středem v bodě P tak plyne

$$\frac{|AE|}{|EL|} = \frac{|BK|}{|BC'|} = \frac{x}{y}, \quad \text{takže} \quad |EL| = y \quad \text{a} \quad |AL| = x + y = |BC| = |AC'|.$$

Konečně z podobnosti trojúhelníků ANL a BNC' dostáváme

$$\frac{|AN|}{|BN|} = \frac{|AL|}{|BC'|} = \frac{|AC'|}{|BC'|}.$$

To, jak jsme před výpočtem poměru $|AN| : |BN|$ zmínili, znamená, že přímka $C'N = C'P$ je osou úhlu $AC'B$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že osa vnitřního úhlu v trojúhelníku dělí protilehlou stranu v poměru délek přilehlých stran. [Označme K průsečík osy úhlu ACB se stranou AB, použijeme sinovou větu v trojúhelnících CKA a CKB a využijeme toho, že úhly AKC a BKC jsou doplňkové a úhly ACK a BCK mají stejnou velikost. Jiná možnost: poměr $|AK| : |BK|$ je stejný jako poměr obsahů trojúhelníků AKC a BKC, neboť tyto dva trojúhelníky mají shodné výšky z vrcholu K.]

N2. Je dán trojúhelník ABC. Najděte množinu bodů X takových, že trojúhelník ABX má stejný obsah jako trojúhelník ABC. [Dvojice přímek rovnoběžných s přímkou AB ve vzdálenosti vrcholu C od strany AB.]

N3. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD. Dokažte, že průsečík úhlopříček AC a BD, průsečík přímek AD a BC a středy základen daného lichoběžníku leží v přímce. [Uvažujme stejnolehlost, která zobrazí úsečku AB na úsečku CD. Takové stejnolehlosti jsou dvě a jejich středy jsou ty dva průsečíky ze zadání úlohy. Protože stejnolehlost zachovává poměry, každá z uvažovaných stejnolehlostí zobrazí střed úsečky AB na střed úsečky CD a její střed tak leží na spojnici středů základen.]

N4. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Středy jeho stran označme postupně K, L, M, N.
   a) Dokažte, že $KLMN$ je rovnoběžník.
   b) Určete poměr obsahů čtyřúhelníků $KLMN$ a $ABCD$.

D1. Dokažte, že těžnice v trojúhelníku se protínají v jednom bodě a rozdělí trojúhelník na šest částí se stejným obsahem.

D2. Dokažte, že pokud x, y, z jsou délky těžnic trojúhelníku ABC, existuje trojúhelník s délkami stran rovnými x, y, z. Jaký obsah má tento trojúhelník, je-li obsah trojúhelníku ABC roven S? [Využijte středovou souměrnost např. podle středu strany BC. Obsah je $3/4S$.]

D3. Je dán trojúhelník ABC. Uvnitř jeho stran BC, CA, AB uvažujme postupně body K, L, M takové, že úsečky AK, BL, CM se protínají v bodě U. Mají-li trojúhelníky AMU a KCU obsah P a trojúhelníky MBU a CLU obsah Q, potom $P = Q$. Dokažte. [49–A–S–2]

D4. Je dán trojúhelník ABC a body K, L, M ležící postupně uvnitř stran BC, CA, AB tak, že přímky AK, BL, CM mají společný bod X.
   a) Dokažte, že poměr $|AM| : |BM|$ je stejný jako poměr obsahů trojúhelníků ACX a BCX.
   b) Dokažte, že
   $$\frac{|AM|}{|BM|} \cdot \frac{|BK|}{|CK|} \cdot \frac{|CL|}{|AL|} = 1.$$
   (Toto tvrzení je částí *Cevovy věty*. Porovnejte tuto větu s *Menelaovou větou*. Všimněte si, že často je výhodné ve výpočtech i důkazech převést poměr vzdáleností na poměr obsahů. Použijte tento přístup v druhé návodné úloze.) [Viz Švrček – Vanžura: Geometrie trojúhelníka, str. 28–32.]

D5. Jsou-li K, L, M po řadě vnitřní body stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC takové, že kružnice vepsané dvojicím trojúhelníků ABK a CAK, BCL a ABL, CAM a BCM mají vnější dotyk, pak se přímky AK, BL, CM protínají v jednom bodě. Dokažte. [49–A–I–2]

D6. Určete všechny konvexní čtyřúhelníky $ABCD$ s následující vlastností: Uvnitř čtyřúhelníku $ABCD$ existuje bod E takový, že každá přímka, která prochází tímto bodem a protíná strany AB a CD ve vnitřních bodech, dělí čtyřúhelník $ABCD$ na dvě části se stejným obsahem. Svou odpověď zdůvodněte. [49–A–II–4]

2. Na odvěsnách délek a, b pravoúhlého trojúhelníku leží po řadě středy dvou kružnic k_a, k_b. Obě kružnice se dotýkají přepony a procházejí vrcholem proti přeponě. Poloměry uvedených kružnic označme ϱ_a, ϱ_b. Určete největší kladné reálné číslo p takové, že nerovnost

$$\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} \geqq p\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

platí pro všechny pravoúhlé trojúhelníky.

3. Určete velikosti vnitřních úhlů α, β, γ trojúhelníku, pro něž platí

$$2 \sin\beta \sin(\alpha + \beta) - \cos\alpha = 1,$$
$$2 \sin\gamma \sin(\beta + \gamma) - \cos\beta = 0.$$

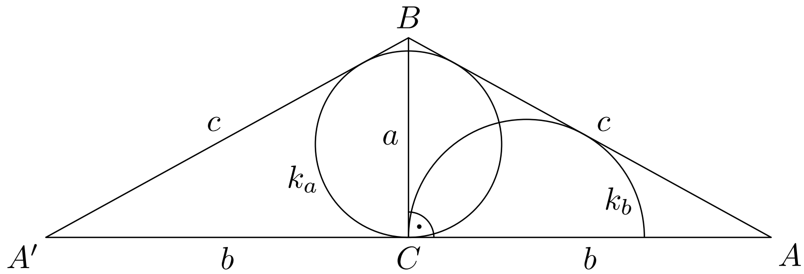
4. Uvnitř strany BC ostroúhlého trojúhelníku ABC zvolme bod D a na úsečce AD bod P tak, aby neležel na těžnici z vrcholu C. Přímka této těžnice protne kružnici opsanou trojúhelníku CPD v bodě, který označíme K ($K \neq C$). Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku AKP prochází kromě bodu A dalším pevným bodem, který na výběru bodů D a P nezávisí.

2. Označme vrcholy daného trojúhelníku A, B, C tak, aby vrcholy A, B ležely postupně proti odvěsnám délek a, b.

Nejdříve vypočítáme velikosti poloměrů obou kružnic k_a a k_b. Označme A' obraz bodu A v osové souměrnosti podle přímky BC. Kružnice k_a je vepsána trojúhelníku $A'AB$ (obr. 1). Rovnoramenný trojúhelník ABA' má obvod $o = 2(b + c)$ a obsah $S = ab$, pro poloměr ϱ_a kružnice k_a tak podle známého vztahu vychází

$$\varrho_a = \frac{2S}{o} = \frac{ab}{b+c}.$$

Podobně vypočítáme i poloměr kružnice k_b: vyjde $\varrho_b = ab/(a + c)$.



Obr. 1

Pro číslo p a pro libovolný pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami a, b a přeponou c má platit

$$p \leqq \frac{\dfrac{1}{\varrho_a} + \dfrac{1}{\varrho_b}}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}} = \frac{\dfrac{b+c}{ab} + \dfrac{a+c}{ab}}{\dfrac{a+b}{ab}} = \frac{a+b+2c}{a+b} = 1 + \frac{2c}{a+b} = 1 + \frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}.$$

Protože v případě $a = b$ má poslední výraz hodnotu $1 + \sqrt{2}$, musí každé vyhovující číslo p splňovat nerovnost $p \leqq 1+\sqrt{2}$. Ukážeme-li nyní, že pro libovolné dvě kladné hodnoty a, b platí

$$\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{a+b} \geqq \sqrt{2}, \tag{1}$$

bude výše odvozená nerovnost znamenat, že $p = 1 + \sqrt{2}$ je hledané reálné číslo (a úloha tak bude vyřešena).

Nerovnost (1) pro libovolná kladná a, b snadno převedeme ekvivalentními úpravami na nerovnost, která zřejmě platí:

$$\begin{aligned}2\sqrt{a^2+b^2} &\geqq \sqrt{2}(a+b),\\ 4(a^2+b^2) &\geqq 2(a+b)^2,\\ 4a^2+4b^2 &\geqq 2a^2+4ab+2b^2,\\ 2(a-b)^2 &\geqq 0.\end{aligned}$$

Místo takové prověrky bylo možné využít Cauchyovu nerovnost $2(a^2+b^2) \geqq (a+b)^2$ nebo nerovnost mezi kvadratickým a aritmetickým průměrem

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geqq \frac{a+b}{2}.$$

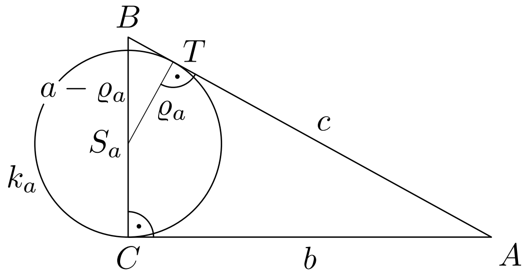
Obě tyto klasické nerovnosti jsou zřejmě pouze obměněnými zápisy nerovnosti (1).

Odpověď. Hledané číslo p má hodnotu $1+\sqrt{2}$.

Poznámka. Velikost poloměrů ϱ_a a ϱ_b je možné vypočítat i jinak: Dvojím vyjádřením sinu úhlu ABC z pravoúhlých trojúhelníků S_aBT a ABC (obr. 2) dostaneme

$$\frac{\varrho_a}{a-\varrho_a} = \frac{b}{c},$$

odkud plyne $\varrho_a = ab/(b+c)$. Analogicky vypočítáme i ϱ_b.



Obr. 2

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za výpočet velikostí poloměrů ϱ_a a ϱ_b, 1 bod za nalezení hodnoty $p=1+\sqrt{2}$ a 3 body za důkaz nerovnosti ze zadání pro $p=1+\sqrt{2}$, přitom řádně pojmenované klasické nerovnosti není nutné dokazovat.

3. Z rovnosti $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ a ze známých goniometrických vzorců dostáváme

$$\begin{aligned}&\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma,\\ &\cos\alpha = -\cos(\beta+\gamma) = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma.\end{aligned}$$

Dosaďme tato vyjádření hodnot $\sin(\alpha+\beta)$ a $\cos\alpha$ do první rovnice ze zadání a výsledek upravme:

$$\begin{aligned}2\sin\beta\sin\gamma - (-\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma) &= 1,\\ \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma &= 1,\\ \cos(\beta-\gamma) &= 1.\end{aligned}$$

Poslední rovnost nastane, právě když $\beta = \gamma$, neboť rozdíl dvou vnitřních úhlů trojúhelníku leží v intervalu $(-\pi, \pi)$, v němž má funkce kosinus hodnotu 1 jedině v bodě nula. Tak jsme ukázali, že první zadaná rovnice je pro vnitřní úhly trojúhelníku splněna, právě když $\beta = \gamma$.

Nyní snadno vyřešíme i druhou ze zadaných rovnic, když do ní za γ dosadíme β:

$$\begin{aligned} 2\sin\beta\sin 2\beta - \cos\beta &= 0,\\ 4\sin^2\beta\cos\beta - \cos\beta &= 0,\\ (4\sin^2\beta - 1)\cos\beta &= 0. \end{aligned}$$

Je tedy buď $\cos\beta = 0$, nebo $\sin\beta = \pm\frac{1}{2}$. Rovnost $\beta = \gamma$ však pro úhly trojúhelníku znamená, že úhel β je ostrý, takže $\cos\beta > 0$, a proto musí platit $\sin\beta = \frac{1}{2}$ (hodnota $\sin\beta = -\frac{1}{2}$ je pro úhel β z intervalu $(0, \pi)$ vyloučena). Tak docházíme k jediným možným hodnotám $\beta = \gamma = 30°$, z nichž snadno dopočteme $\alpha = 120°$. Při uvedeném postupu není zkouška nutná: první zadaná rovnice platí díky rovnosti $\beta = \gamma$ a druhou rovnici jsme za předpokladu $\beta = \gamma$ řešili ekvivalentními úpravami.

Jiné řešení. Podobně jako při řešení úlohy domácího kola využijeme známé goniometrické vzorce k odvození rovnosti

$$\begin{aligned} 2\sin y\sin(x+y) - \cos x &= 2\sin y(\sin x\cos y + \cos x\sin y) - \cos x =\\ &= 2\sin y\cos y\sin x + (2\sin^2 y - 1)\cos x =\\ &= \sin 2y\sin x - \cos 2y\cos x =\\ &= -\cos(x+2y) \end{aligned}$$

pro libovolná reálná čísla x, y. Díky tomu můžeme soustavu rovnic ze zadání přepsat do tvaru

$$\cos(\alpha + 2\beta) = -1, \tag{1}$$
$$\cos(\beta + 2\gamma) = 0. \tag{2}$$

Vnitřní úhly libovolného trojúhelníku leží v intervalu $(0, \pi)$, z čehož plynou nerovnosti $0 < \alpha + 2\beta < 3\pi$.[1] Z nich plyne, že rovnice (1) je splněna, právě když $\alpha + 2\beta = \pi$. Porovnáním s obecně platnou rovností $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ dostáváme ekvivalentní podmínku $\gamma = \beta$, za níž (2) přejde do tvaru

$$\cos 3\beta = 0. \tag{3}$$

Protože úhel β je ostrý (neboť je shodný s úhlem γ a trojúhelník nemůže mít dva pravé nebo dva tupé vnitřní úhly), platí nerovnosti $0 < 3\beta < \frac{3}{2}\pi$, při kterých je rovnice (3) splněna, právě když $3\beta = \frac{1}{2}\pi$ neboli $\beta = \gamma = \frac{1}{6}\pi$. Stejně jako v prvním řešení dopočítáme $\alpha = \pi - \beta - \gamma = \frac{2}{3}\pi$. Zkouškou (ani při tomto postupu však není nutná) snadno ověříme, že nalezená trojice úhlů α, β, γ splňuje všechny podmínky zadání úlohy.

[1] Platí dokonce $\alpha + 2\beta < 2\pi$, neboť $\alpha + 2\beta < 2(\alpha + \beta + \gamma) = 2\pi$.

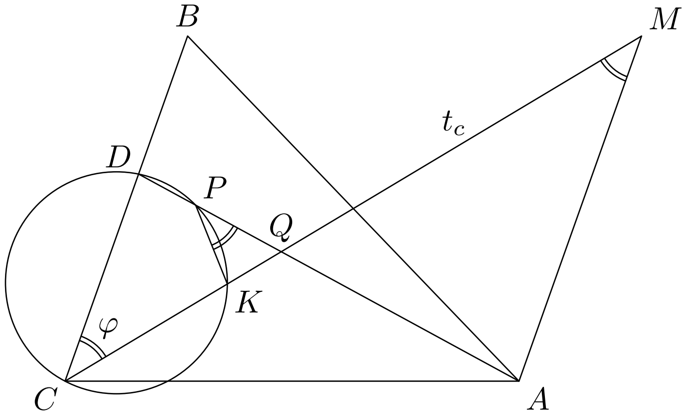
Podmínkám úlohy vyhovují pouze trojúhelníky, jejichž vnitřní úhly mají velikosti $\alpha = 120^\circ$, $\beta = \gamma = 30^\circ$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Při prvním postupu udělte 3 body za odvození vztahu $\beta = \gamma$ z první rovnice, 1 bod za úpravu druhé rovnice na součinový tvar či základní goniometrickou rovnici (jakou je např. $\cos 3\beta = 0$) a zbývající 2 body za následné určení (se zdůvodněním jednoznačnosti) velikostí všech tří úhlů.

Při druhém postupu udělte 2 body za odvození soustavy rovnic (1) a (2) (musí být v základním tvaru), další 2 body za zdůvodnění vztahu $\beta = \gamma$ a zbývající 2 body jako při prvním postupu.

Vyžaduje-li řešitelův postup zkoušku, za její absenci strhněte 1 bod. Rovněž tak strhněte 1 bod pokaždé, když je některá z hodnot $\beta - \gamma$, $\alpha + 2\beta$, 3β apod. určena z příslušné základní goniometrické rovnice bez zmínky potřebných nerovností pro zastoupený argument.

4. Označme φ velikost úhlu, který svírá přímka t_c, na níž leží těžnice z vrcholu C, s přímkou strany BC daného trojúhelníku. Vzhledem k definici bodu K budou stejný úhel φ svírat i přímky KP a AD. To však znamená, že na kružnici opsané trojúhelníku AKP bude ležet i takový bod M přímky t_c, v němž přímka AM protne přímku t_c pod úhlem φ. Takovou vlastnost zřejmě má bod M souměrně sdružený s bodem C podle středu strany AB (který na volbě bodů D a P rovněž nezávisí, obr. 3).

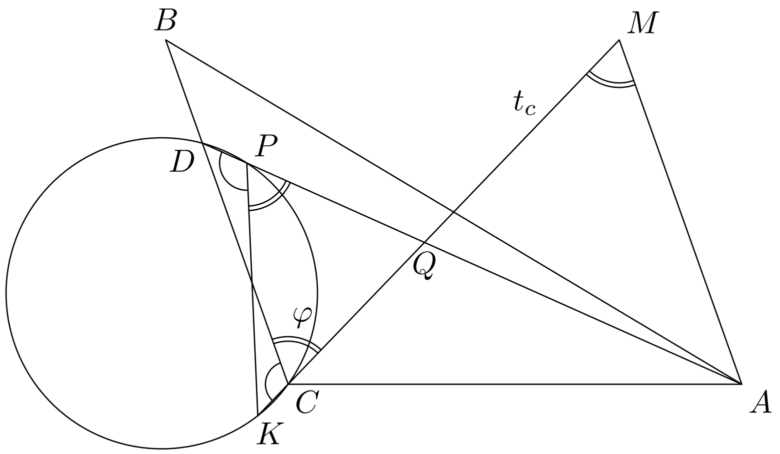


Obr. 3

Dokážeme nyní shora uvedené skutečnosti podrobněji. Označme Q průsečík těžnice t_c s úsečkou AD (Q je tedy „zakázaná“ poloha bodu P). Bod P leží buď uvnitř úsečky DQ (obr. 3), nebo uvnitř úsečky QA (obr. 5).

V prvním případě leží bod Q vně kružnice opsané trojúhelníku CPD, bod K tedy padne dovnitř polopřímky QC. Pokud bod K leží uvnitř úsečky QC, jsou body C a P protilehlými vrcholy tětivového čtyřúhelníku $CDPK$, a tudíž $|\sphericalangle APK| = \varphi$. Navíc body P a M leží vzhledem k přímce AK v téže polorovině, takže ze shodnosti úhlů AMK a APK vyplývá, že čtyřúhelník $AMPK$ je tětivový, proto bod M skutečně leží na kružnici opsané trojúhelníku AKP.

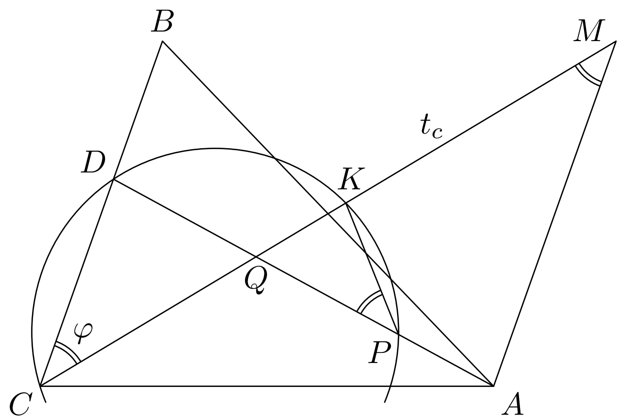
Pokud bod K uvnitř úsečky QC neleží a je $K \neq C$ (obr. 4), je $|\sphericalangle KPD| = |\sphericalangle KCD| = 180^\circ - \varphi$, takže $|\sphericalangle KPA| = \varphi = |\sphericalangle KMA|$. (Poslední rovnost samozřejmě platí i pro $K = C$.) Protože body P a M leží v téže polorovině určené přímkou KA, leží i v tomto případě bod M na kružnici opsané trojúhelníku AKP.



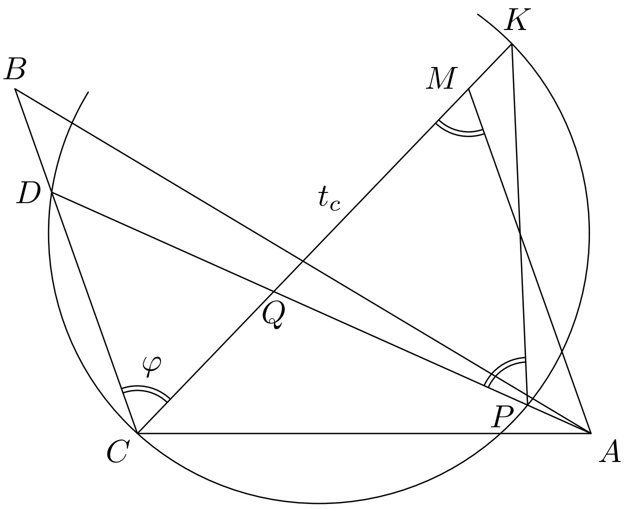
Obr. 4

Ve druhém případě leží bod K uvnitř polopřímky QM. Pokud bod K leží uvnitř úsečky QM (obr. 5), leží body P a M v opačných polorovinách vzhledem k přímce AK a z rovnosti obvodových úhlů DCK a DPK nad tětivou DK plyne $|\sphericalangle DPK| = \varphi = |\sphericalangle AMK|$, což zaručuje, že čtyřúhelník $AMKP$ je tětivový, takže bod M leží na kružnici opsané trojúhelníku AKP.

Pokud bod K uvnitř úsečky QM neleží (obr. 6), vychází $|\sphericalangle KPA| = |\sphericalangle KMA| = 180° - \varphi$. Protože body P a M leží v téže polorovině určené přímkou KA, leží i v tomto případě bod M na kružnici opsané trojúhelníku AKP.



Obr. 5



Obr. 6

Jiné řešení. Označme body Q a M stejně jako v prvním řešení. Pro mocnost bodu Q ke kružnici opsané bodům C, P, D, K (bez ohledu na polohu bodu P) platí $|QK| \cdot |QC| = |QP| \cdot |QD|$, takže $|QK| : |QP| = |QD| : |QC|$. Z podobnosti trojúhelníků QDC a QAM, jež plyne z rovnoběžnosti přímek BC a AM, dostáváme $|QD| : |QC| = |QA| : |QM|$. Platí tedy

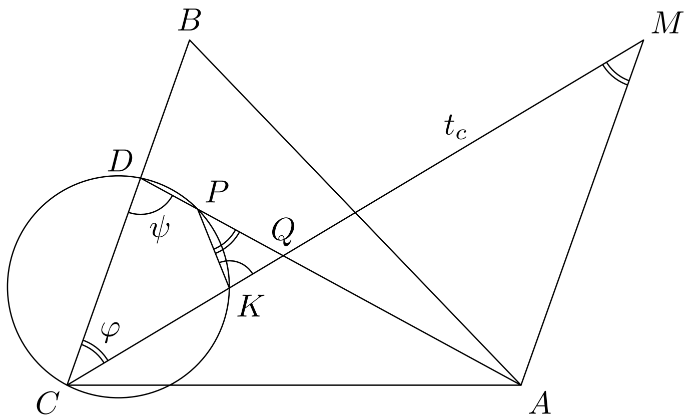
$$\frac{|QK|}{|QP|} = \frac{|QD|}{|QC|} = \frac{|QA|}{|QM|}, \quad \text{takže} \quad |QK| \cdot |QM| = |QP| \cdot |QA|. \tag{1}$$

Jak už víme, leží bod Q buď uvnitř, anebo vně obou úseček AP a KM, proto z právě získané rovnosti vyplývá, že bod M leží na kružnici určené body A, P, K. Označíme-li totiž M' druhý průsečík přímky QK s touto kružnicí ($M' \neq K$), plyne z mocnosti bodu Q vůči této kružnici rovnost $|QK| \cdot |QM'| = |QP| \cdot |QA|$, takže podle (1) je $|QM'| = |QM|$, a musí tudíž být $M' = M$.

Poznámky. V žádném z obou řešení jsme nevyužili předpoklad, že daný trojúhelník ABC je ostroúhlý. Za tohoto předpokladu leží bod K vždy uvnitř úsečky CM. Lze to ukázat úvahami o obvodových úhlech podobně, jako jsme ukázali, že tvrzení úlohy platí i v případech, kdy bod K padne mimo tuto úsečku. Jiný důkaz dostaneme následující úvahou:

Je-li trojúhelník ABC ostroúhlý, platí $\psi > \varphi$, kde jsme jako ψ označili velikost úhlu CDA. Tato nerovnost $\psi > \varphi$ plyne ze zřejmé nerovnosti $\psi = \beta + |\sphericalangle DAB| > \beta$ a z nerovnosti $\beta > \varphi$, která je ekvivalentní nerovnosti $t_c > \frac{1}{2}|AB|$ (proti větší straně trojúhelníku leží větší úhel), což je nerovnost $|CM| > |AB|$ mezi délkami úhlopříček rovnoběžníku $CAMB$, jehož vnitřní úhel při vrcholu C je dle předpokladu ostrý (tuto nerovnost získáme snadno použitím kosinové věty: $|AB|^2 < |AC|^2 + |CB|^2 = |AC|^2 + |AM|^2 < |CM|^2$).

Z nerovnosti $\psi > \varphi$ pak pro bod P uvnitř úsečky DQ pro délky stran trojúhelníků QPK, QCD (obr. 7) vychází, že $|QK| < |QP| < |QD| < |QC|$ (proti většímu úhlu v trojúhelníku leží větší strana), takže bod K leží uvnitř úsečky QC. Podobně pro bod P uvnitř úsečky QA dostaneme $|QK| < |QP| < |QA| < |QM|$, takže bod K leží uvnitř úsečky QM.



Obr. 7

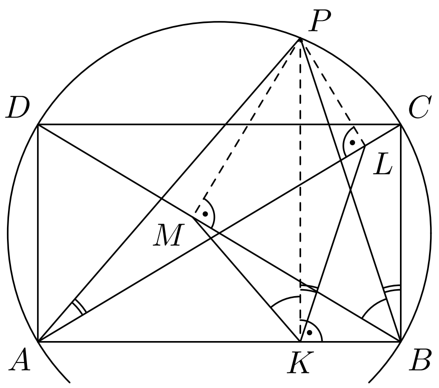
Budeme-li úhel φ chápat jako orientovaný úhel dvou přímek (tj. úhel, o který musíme první přímku otočit, aby splynula nebo byla rovnoběžná s druhou přímkou), vyplyne tvrzení úlohy z úvah v úvodním odstavci a z následující charakterizace kružnice: *Body A, B, C, D leží na kružnici, právě když se orientovaný úhel ACB rovná orientovanému úhlu ADB.*

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za objevení pevného bodu M. Pokud žák určí bod M a dokáže požadovanou vlastnost jen v jednom z rozebíraných případů, udělte 5 bodů. Pokud řešitel nedokáže, že bod K (díky předpokladu ostroúhlosti trojúhelníku ABC) padne dovnitř úsečky CM, ani nedokáže obecnější tvrzení bez uvedeného předpokladu, strhněte dva body. Za opomenutí možnosti $K = C$ žádné body nestrhávejte. Řešení jiného typu než uvedené hodnoťte v souladu s tímto schématem.

2. *Na kratším z oblouků CD kružnice opsané pravoúhelníku $ABCD$ zvolme bod P. Paty kolmic z bodu P na přímky AB, AC a BD označme postupně K, L a M. Ukažte, že úhel LKM má velikost 45°, právě když $ABCD$ je čtverec.*

(Tomáš Jurík)

Řešení. Ukážeme, že úhel LKM má stejnou velikost jako úhel CBD (obr. 1). Odtud dané tvrzení triviálně plyne (úhel CBD má velikost 45°, právě když $|BC| = |CD|$, tj. když $ABCD$ je čtverec).



Obr. 1

Body B, K, M, P leží v tomto pořadí na Thaletově kružnici nad průměrem BP. Pro velikosti obvodových úhlů nad tětivou PM tedy platí $|\sphericalangle PKM| = |\sphericalangle PBM|$. Podobně body A, K, L, P leží v tomto pořadí na Thaletově kružnici nad průměrem AP a pro velikosti obvodových úhlů nad tětivou PL máme $|\sphericalangle LKP| = |\sphericalangle LAP|$. Z obvodových úhlů nad tětivou CP kružnice opsané pravoúhelníku $ABCD$ tak dostáváme $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CBP|$.

Z uvedených rovností vyplývá

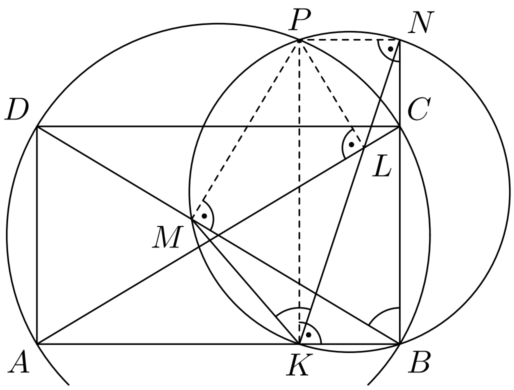
$$\begin{aligned}|\sphericalangle LKM| &= |\sphericalangle LKP| + |\sphericalangle PKM| = |\sphericalangle LAP| + |\sphericalangle PBM| = |\sphericalangle CAP| + |\sphericalangle PBD| = \\ &= |\sphericalangle CBP| + |\sphericalangle PBD| = |\sphericalangle CBD|,\end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

Poznámka. Uvedený postup se dá použít i v triviálním případě, kdy $P = C$ anebo $P = D$; tehdy mají některé z uvažovaných úhlů nulovou velikost.

Jiné řešení. Opět dokážeme, že úhly LKM a CBD mají stejnou velikost. Označme N patu kolmice z bodu P na přímku BC. Body K, L, N leží na Simsonově přímce příslušející bodu P a trojúhelníku ABC (obr. 2). Na Thaletově kružnici nad průměrem PB leží body K, M i N. Z obvodových úhlů nad tětivou MN téže kružnice tak máme

$$|\sphericalangle LKM| = |\sphericalangle NKM| = |\sphericalangle NBM| = |\sphericalangle CBD|.$$



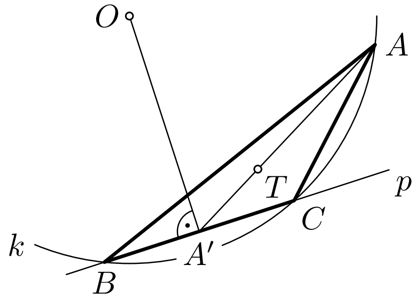
Obr. 2

6. *V rovině ω jsou dány dva různé body O a T. Najděte množinu vrcholů všech trojúhelníků, které leží v rovině ω a mají těžiště v bodě T a střed opsané kružnice v bodě O.* *(Jaromír Šimša)*

Řešení. Vezměme nějaký bod A z roviny ω. Aby mohl být vrcholem trojúhelníku popsaného v zadání, musí být různý od bodů O a T. Nejprve popíšeme obecnou konstrukci trojúhelníku ABC, v němž jsou dány vrchol A, střed O opsané kružnice a těžiště T (pro trojici navzájem různých bodů A, O, T). Teprve pak zjistíme, pro které body A takový trojúhelník sestrojit nelze.

Označme A' střed strany BC. Bod A' je obrazem bodu A ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem $-\frac{1}{2}$. Pokud $A' \neq O$, leží body B a C na kolmici p vedené bodem A' k přímce OA' a zároveň na opsané kružnici k se středem O a poloměrem $|OA|$ (obr. 3).

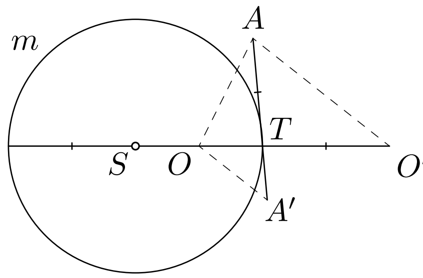
K danému bodu A dokážeme vždy sestrojit jeho obraz A' v uvedené stejnolehlosti. Předpokládejme nejprve, že $A' \neq O$. Abychom dostali dva různé body B a C, musí být přímka p sečnou kružnice k. To nastane, právě když $|OA'| < |OA|$. Označme O' obraz bodu O ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem -2. Platí $|O'A| = 2|OA'|$, proto konstrukční podmínku můžeme zapsat ve tvaru $|O'A| < 2|OA|$. Bod A proto musí ležet



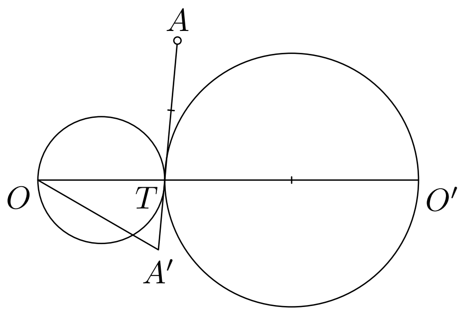
Obr. 3

mimo kruh určený Apollóniovou kružnicí[1] $m(S; |ST|)$, kde S je bod souměrně sdružený s bodem T podle bodu O (obr. 4).

Pokud tedy $A' \neq O$ neboli $A \neq O'$, dostaneme konstrukcí tři body A, B, C. Ty budou vrcholy vyhovujícího trojúhelníku, pokud neleží v přímce. Na přímce leží, když je přímka BC totožná s přímkou AT, tj. když přímka OA' je kolmá na AT. Bod A' proto nesmí ležet na Thaletově kružnici nad průměrem OT a (po „zobrazení“ této podmínky ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem -2) bod A nesmí ležet na Thaletově kružnici nad průměrem $O'T$ (obr. 5).

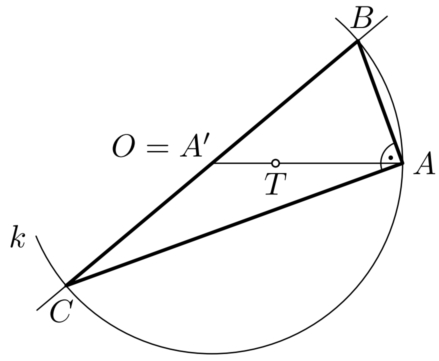


Obr. 4

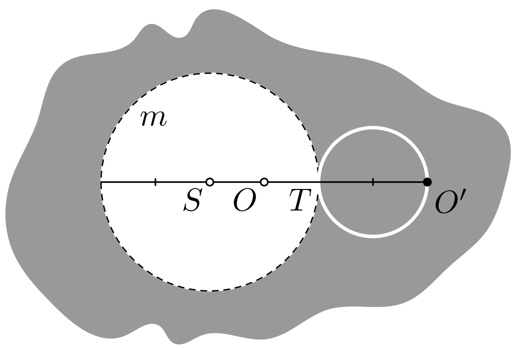


Obr. 5

V případě, že bod A je totožný s bodem O', tj. $A' = O$, namísto kolmice p můžeme vzít libovolnou přímku (různou od AT) procházející bodem O (obr. 6). Dostaneme tak nekonečně mnoho různých trojúhelníků ABC s pravým úhlem při vrcholu A, které splňují všechny podmínky zadání.



Obr. 6



Obr. 7

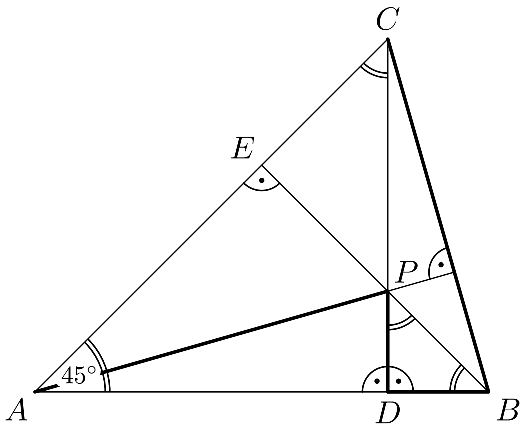
Závěr. Hledanou množinou bodů je vnější oblast kružnice m kromě bodů ležících na Thaletově kružnici nad průměrem $O'T$, přičemž bod O' do hledané množiny též patří (obr. 7).

[1] Pro dané dva různé body P, Q a kladné číslo $k \neq 1$ je Apollóniova kružnice množina bodů X, pro něž platí $|PX| = k|QX|$. Střed Apollóniovy kružnice leží na přímce PQ stejně jako dva body kružnice, které dovedeme pro dané k jednoduše sestrojit.

2. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, v němž vnitřní úhel při vrcholu A má velikost $45°$. Označme D patu výšky z vrcholu C. Uvažujme dále libovolný vnitřní bod P výšky CD. Dokažte tvrzení: Přímky AP a BC jsou navzájem kolmé, právě když úsečky AP a BC jsou shodné.

2. Nejdřív dokážeme první implikaci. Nechť $AP \perp BC$, bod P je pak průsečíkem výšek trojúhelníku ABC. Chceme dokázat, že úsečky AP a BC jsou shodné, najdeme proto dva shodné trojúhelníky, v nichž si tyto úsečky jako strany odpovídají.

Označme E průsečík přímky BP se stranou AC, tj. patu výšky z vrcholu B. Z pravoúhlého trojúhelníku ABE a dané velikosti úhlu BAC snadno dopočítáme, že $|\sphericalangle PBD| = 45^\circ$. Trojúhelník PDB je tedy pravoúhlý a rovnoramenný, takže $|DP| = |DB|$ (obr.). Podobně trojúhelník ADC je pravoúhlý a vzhledem k velikosti úhlu při vrcholu A i rovnoramenný, proto $|DA| = |DC|$. Podle věty *sus* jsou pak pravoúhlé trojúhelníky APD a CBD shodné a jejich přepony AP, BC proto mají stejnou délku.



Zbývá dokázat opačnou implikaci. Předpokládejme, že $|AP| = |BC|$. Protože ADC je rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, platí $|AD| = |CD|$, takže trojúhelníky PAD a BCD jsou shodné podle věty *Ssu*. Máme tak $|PD| = |BD|$, proto $|\sphericalangle ABP| = 45^\circ$. Označme opět E průsečík přímky BP se stranou AC. V trojúhelníku ABE vychází, že úhel BEA je pravý, takže přímka BP je výškou trojúhelníku ABC (obr.) a bod P je tak jeho průsečík výšek. Odtud plyne, že AP je výška na stranu BC, tudíž je na ni kolmá.

Jiné řešení. Je-li $AP \perp BC$, je bod P průsečíkem výšek trojúhelníku ABC. Označme $\alpha = |\sphericalangle BAC| = 45^\circ$. Podobně jako v jednom z řešení druhé úlohy domácího kola[1] můžeme odvodit, že

$$|AP| = \frac{|BC| \cdot \cos\alpha}{\sin\alpha} = |BC| \cdot \operatorname{cotg}\alpha = |BC| \cdot \operatorname{cotg} 45^\circ = |BC|.$$

Nechť naopak $|AP| = |BC|$. Označme Q průsečík výšek trojúhelníku ABC. Z právě dokázané implikace víme, že $|AQ| = |BC|$. Všechny body výšky CD mají ovšem navzájem různou vzdálenost od vrcholu A, proto může uvnitř úsečky CD ležet nejvýše jeden bod P s vlastností $|AP| = |BC|$, a tento bod musí být totožný s bodem Q. Je tedy $AP \perp BC$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Přitom za úplný důkaz každé z obou implikací udělte 3 body. Za důkaz první implikace využívající *bez důkazu* vztah $|AP| = |BC| \operatorname{cotg}\alpha$ odvozený v domácím kole udělte 3 body, pokud žák uvede, že používá vztah z řešení domácího kola, jinak dejte jen 1 bod.

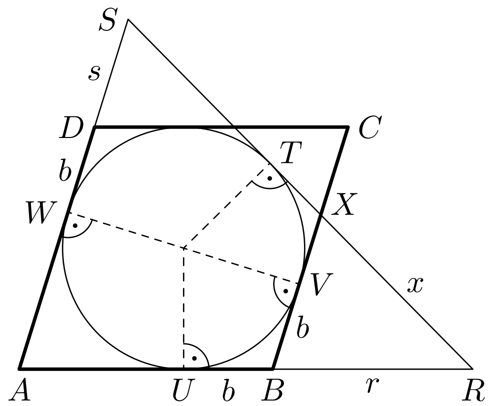
[1] V uvedeném řešení byla při standardním označení odvozena rovnost $|CU| = c|\cos\gamma|/\sin\gamma$, kde U je průsečík výšek trojúhelníku ABC.

V případě neúplného důkazu některé z implikací udělte body odpovídající tomu, jak daleko se žák dostal; například za odvození rovnosti $|DP| = |DB|$ v případě první implikace 1 bod, za odvození rovnosti $|AD| = |CD|$ též 1 bod.

Za odůvodněné pozorování, že trojúhelník ADC je rovnoramenný, udělte 1 bod i v případě, že žák toto pozorování nepoužije k úspěšnému důkazu ani jedné z implikací.

2. *Kosočtverci $ABCD$ je vepsána kružnice. Uvažujme její libovolnou tečnu protínající obě strany BC, CD a označme po řadě R, S její průsečíky s přímkami AB, AD. Dokažte, že hodnota součinu $|BR| \cdot |DS|$ na volbě tečny nezávisí.*

Řešení. Nechť U, V, W, T jsou body dotyku vepsané kružnice po řadě se stranami AB, BC, DA a s uvažovanou tečnou RS, jejíž průsečík se stranou BC pojmenujeme X (obr. 1). Označme $a = |AB| = |AD|$, $b = |BU| = |BV| = |DW|$ pevné délky a $r = |BR|$, $s = |DS|$ proměnné délky závislé na volbě tečny RS. Naším cílem je ukázat, že zadaný součin $|BR| \cdot |DS|$ $(= r \cdot s)$ má stálou hodnotu $a \cdot b$.



Obr. 1

Trojúhelníky ARS, BRX jsou stejnolehlé podle středu R, neboť jejich strany AS a BX leží na rovnoběžných přímkách. Navíc kružnice vepsaná prvnímu trojúhelníku ARS je připsaná straně BX druhého trojúhelníku BRX. Podle poznatku ze závěru návodné úlohy N2 o tom, že body dotyku vepsané a připsané kružnice jsou souměrně sdružené podle středu strany, na které oba body leží, můžeme usoudit, že poměru $|SW| : |AR|$ v trojúhelníku ARS odpovídá poměr $|BV| : |BR|$ v trojúhelníku BRX. To vede k rovnosti, kterou v zavedeném označení zapíšeme jako

$$\frac{b+s}{a+r} = \frac{b}{r}, \quad \text{odkud} \quad r \cdot s = a \cdot b.$$

Tím je důkaz hotov a úloha vyřešena.

Jiné řešení. Užijeme stejné označení jako v původním řešení. Obejdeme se bez výsledků úlohy N2 tak, že označíme ještě $|RX| = x$ a vyjádříme délky stran obou stejnolehlých trojúhelníků ARS, BRX na základě triviálního poznatku o rovnosti úseků tečen z daného bodu k dané kružnici (úloha N1). Pro $\triangle ARS$ je to snadné: platí $|AR| = a + r$, $|AS| = a + s$ a

$$|RS| = |RT| + |TS| = |RU| + |WS| = (b + r) + (b + s) = 2b + r + s.$$

V trojúhelníku BRX předně máme $|BR| = r$ a délku třetí strany BX vyjádříme takto:

$$\begin{aligned} |BX| &= |BV| + |VX| = b + |TX| = b + (|RT| - |RX|) = \\ &= b + |RU| - x = b + (b + r) - x = 2b + r - x. \end{aligned}$$

Pro strany podobných trojúhelníků ARS a BRX tedy platí úměra

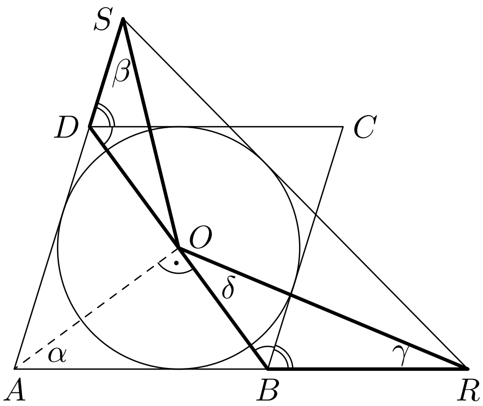
$$(a + r) : (2b + r + s) : (a + s) = r : x : (2b + r - x).$$

Odtud je možné eliminovat x a pak objevit závislost $rs = ab$. Místo takového postupu si však povšimněme, že obvod druhého trojúhelníku nezávisí na x, proto porovnáme poměry obvodu k první straně (na x nezávislé) v každém z obou trojúhelníků:

$$\begin{gathered} \frac{(a + r) + (2b + r + s) + (a + s)}{a + r} = \frac{r + x + (2b + r - x)}{r}, \\ 2 + \frac{2(b + s)}{a + r} = 2 + \frac{2b}{r}, \\ rs = ab. \end{gathered}$$

Potřebná rovnost je dokázána.

Jiné řešení. Překvapivě jednoduchý důkaz tvrzení úlohy podala studentka *Lenka Polcerová* z Gymnázia Křenová v Brně, když ukázala, že jsou podobné trojúhelníky ODS a RBO, kde O je střed kružnice vepsané kosočtverci $ABCD$ (obr. 2). Z této podobnosti totiž plyne úměra $|DS| : |DO| = |BO| : |BR|$ neboli $|BR| \cdot |DS| = |BO| \cdot |DO|$, což je konstantní hodnota (nezávislá na volbě tečny).



Obr. 2

Protože zmíněné trojúhelníky ODS a RBO se zřejmě shodují ve vnitřních úhlech u vrcholů D a B, stačí k důkazu jejich podobnosti ověřit shodnost úhlů $\beta = |\sphericalangle OSD|$ a $\delta = |\sphericalangle ROB|$. Zavedeme-li ještě úhly $\alpha = |\sphericalangle BAO|$ a $\gamma = |\sphericalangle ARO|$, pak z faktu, že kružnice vepsaná kosočtverci $ABCD$ je zároveň vepsána trojúhelníku ARS, plyne, že vnitřní úhly tohoto trojúhelníku jsou 2α, 2β, 2γ, takže platí $\alpha + \beta + \gamma = 90°$. Protože úhel AOB je pravý, vnitřní úhly trojúhelníku AOR mají velikost α, γ, $\delta + 90°$, takže $\alpha + \gamma + \delta = 90°$. Porovnáním obou uvedených rovností pro součet tří úhlů dostáváme kýženou rovnost $\beta = \delta$ a celý důkaz je hotov.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte rovnost $|AT_1| = |AT_2|$, kde T_1, T_2 jsou body dotyku obou tečen vedených z bodu A k dané kružnici. [Využijte osovou souměrnost nebo shodnost trojúhelníků AT_1S a AT_2S (kde S je střed dané kružnice) podle věty Ssu.]

N2. Vyjádřete délky všech úseků, na které jsou strany daného trojúhelníku rozděleny
   a) třemi body dotyku kružnice vepsané,
   b) třemi body dotyku kružnic připsaných,

   pomocí délek a, b, c celých (tj. nerozdělených) stran. Z výsledku pak vypozorujte, že na každé straně trojúhelníku tvoří bod dotyku z a) a bod dotyku z b) dvojici bodů, které jsou souměrně sdružené podle středu dotyčné strany. [Jak úseky z části a), tak úseky z části b) mají délky $\frac{1}{2}(a + b - c)$, $\frac{1}{2}(b + c - a)$, $\frac{1}{2}(c + a - b)$. Vyplývá to ze soustav lineárních rovnic, které sestavíte na základě poznatku z úlohy N1, uplatněné vždy k tečnám ze všech tří vrcholů trojúhelníku k dané (vepsané či jedné připsané) kružnici.]

N3. Kružnice vepsaná tečnovému lichoběžníku $ABCD$ se dotýká základen AB, CD po řadě v bodech E, F. Dokažte rovnost $|AE|\cdot|DF| = |BE|\cdot|CF|$. [Základny AB a CD vymezují spolu s průsečíkem prodloužených ramen BC, AD dva stejnolehlé trojúhelníky, přitom kružnice vepsaná většímu z nich je připsaná základně menšího trojúhelníku. Z poznatků z úlohy N2 a úměrnosti délek stran obou trojúhelníků již plyne rovnost poměrů $|AE| : : |BE|$ a $|CF| : |DF|$.]

D1. Do téhož konvexního úhlu jsou vepsány dvě neprotínající se kružnice. Jejich společná vnitřní tečna s body dotyku K, L protne ramena úhlu v bodech A, B. Dokažte rovnost $|AK| = |BL|$. [Důsledek N2 — uvažte vztah obou kružnic k trojúhelníku ABV, kde V je vrchol daného úhlu. Anebo přímo: Nechť úsečka AB je rozdělena body K, L na úseky po řadě délek x, y, z. Užitím N1 odvoďte, že vzdálenosti bodů dotyku obou kružnic na jednotlivých ramenech jsou $2x + y$, resp. $2z + y$. Z N1 ovšem plyne $2x + y = 2z + y$, tj. $x = z$.]

D2. Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB. Na jeho výšce CD je zvolen bod P tak, že kružnice vepsané trojúhelníku ABP a čtyřúhelníku $PECF$ jsou shodné; přitom bod E je průsečík přímky AP se stranou BC a F průsečík přímky BP se stranou AC. Dokažte, že i kružnice vepsané trojúhelníkům ADP a BCP jsou shodné. [49–A–III–2]

4. *V libovolném ostroúhlém různostranném trojúhelníku ABC označme O, V a S po řadě střed kružnice opsané, průsečík výšek a střed kružnice vepsané. Dokažte, že osa úsečky OV prochází bodem S, právě když jeden vnitřní úhel trojúhelníku ABC má velikost* $60°$.

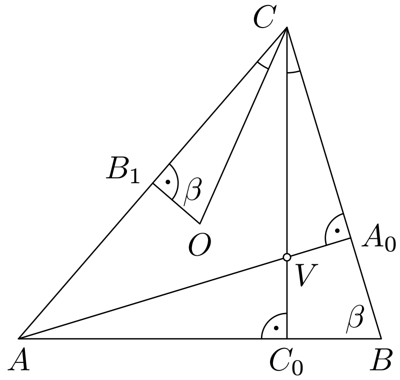
Řešení. Nejprve ukážeme, že v každém ostroúhlém trojúhelníku ABC platí

$$\gamma = 60° \iff |CO| = |CV|. \tag{1}$$

K tomu uvážíme trojúhelníky CVA_0 a COB_1, kde A_0 je pata výšky z vrcholu A a B_1 je střed strany AC (obr. 3). Z pravoúhlého trojúhelníku ACA_0 plyne

$$\gamma = 60° \iff |CA_0| = \frac{|AC|}{2} \iff |CA_0| = |CB_1|.$$

Poslední je rovnost délek odvěsen pravoúhlých trojúhelníků CVA_0 a COB_1, jejichž vyznačené vnitřní úhly VCA_0 a OCB_1 mají shodnou velikost $90° - \beta$. (Pro úhel CVA_0 to plyne z pravoúhlého trojúhelníku BCC_0, kde C_0 je pata výšky z vrcholu C na stranu AB, pro úhel OCB_1 to plyne z rovnoramenného trojúhelníku ACO, který má u hlavního vrcholu O úhel 2β díky větě o obvodovém a středovém úhlu v opsané kružnici.) Proto je shodnost odvěsen CA_0, CB_1 ekvivalentní se shodností přepon CO a CV, což dokazuje (1).



Obr. 3

Nyní zapojíme do úvah střed S kružnice vepsané. Ze zmíněné shodnosti úhlů VCA_0 a OCB_1 plyne, že v každém ostroúhlém trojúhelníku ABC je polopřímka CS nejen osou úhlu ACB, ale také osou úhlu OCV. Tato osa je v případě $\gamma = 60°$, kdy jak víme $|CO| = |CV|$, osou základny OV rovnoramenného trojúhelníku OVC (body O a V jsou různé, neboť podle zadání úlohy je trojúhelník ABC různostranný), takže střed S na ose úsečky OV skutečně leží. Stejně tak tomu je i v případech $\alpha = 60°$, resp. $\beta = 60°$.

Připusťme nyní, že střed S leží na ose úsečky OV, avšak žádný z úhlů α, β, γ není $60°$. Podle (1) tudíž platí $|AO| \neq |AV|$, $|BO| \neq |BV|$ a $|CO| \neq |CV|$. Podívejme se znovu na trojúhelník OVC, v němž tedy osa CS vnitřního úhlu OCV nesplývá s osou protější strany OV, takže jejich jediný společný bod S leží na kružnici trojúhelníku OVC opsané (tento známý fakt uvádíme v úloze N2). Jinak řečeno, bod C leží na kružnici opsané trojúhelníku OVS. Ze stejných důvodů na této kružnici leží i body A a B, takže se jedná o kružnici opsanou trojúhelníku ABC, která však nikdy svým středem O neprochází. Tak jsme dostali spor, který ukazuje, že připuštěná situace nemůže nastat. Tím je řešení celé úlohy u konce.

Poznámka 1. Z druhé části řešení vyplývá tento poznatek: má-li úhel γ (ostroúhlého) trojúhelníku ABC velikost $60°$, leží vrcholy A a B na jedné kružnici s průsečíkem výšek, středem opsané kružnice i středem vepsané kružnice. Jednodušší zdůvodnění nabízíme v úloze N1.

Poznámka 2. Klíčovou ekvivalenci (1) z podaného řešení lze rovněž dokázat trigonometricky. Platí totiž vzorce

$$|CO| = \frac{c}{2\sin\gamma} \quad \text{a} \quad |CV| = \frac{c}{\operatorname{tg}\gamma}, \tag{2}$$

podle kterých jsou úsečky CO a CV shodné, právě když je úhel γ řešením rovnice $2\sin\gamma = \operatorname{tg}\gamma$, která je zřejmě ekvivalentní s rovnicí $\cos\gamma = \frac{1}{2}$, jež má v intervalu

$(0^\circ, 90^\circ)$ jediné řešení $\gamma = 60^\circ$. První ze vzorců (2) plyne z tzv. rozšířené sinové věty

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r,$$

kde r je poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC, o druhém vzorci v (2) pojednává úloha D1.

Poznámka 3. Ekvivalenci (1) z podaného řešení můžeme dokázat i bez velkého počítání: průsečík výšek daného trojúhelníku totiž vždy leží na kružnici souměrně sdružené s kružnicí trojúhelníku opsanou podle přímky AB (v našem případě). Vzhledem k tomu, že taková kružnice je zároveň obrazem kružnice opsané v posunutí o vektor $\boldsymbol{CV}$, závisí velikost $|CV|$ v dané opsané kružnici jen na velikosti tětivy AB (či odpovídajícím obvodovém úhlu), a nikoli na poloze bodu C. Proto rovnost $|CV| = r = |CO|$ nastane, právě když zmíněná sdružená kružnice prochází středem O kružnice trojúhelníku opsané, tj. právě když příslušná strana leží proti (obvodovému) úhlu velikosti 60°.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že v každém ostroúhlém trojúhelníku ABC (při označení O, S, V ze soutěžní úlohy) platí $|\sphericalangle AOB| = 2\gamma$, $|\sphericalangle ASB| = 90^\circ + \gamma/2$, $|\sphericalangle AVB| = 180^\circ - \gamma$. Jaký důsledek mají tyto rovnosti v případě $\gamma = 60^\circ$? [První rovnost je vztahem obvodového a středového úhlu, pro druhou, resp. třetí rovnost uvažte, že v trojúhelníku ASB, resp. AVB mají dva vnitřní úhly velikosti $\alpha/2$ a $\beta/2$, resp. $90^\circ - \alpha$ a $90^\circ - \beta$, a v obou případech dopočtěte třetí úhel. Protože body O, S, V leží ve stejné polorovině vyťaté přímkou AB, v případě $\gamma = 60^\circ$ ze shodnosti úhlů AOB, ASB, AVB (všechny tři jsou 120°) plyne, že body A, B, O, S, V leží na jedné kružnici.]

N2. Pokud strany KM a LM daného trojúhelníku KLM nejsou shodné, protne osa vnitřního úhlu KML osu strany KL v bodě, který leží na kružnici, která je trojúhelníku KLM opsána. Dokažte. [Snažší je dokázat obecnější tvrzení, že osa vnitřního úhlu protne opsanou kružnici v bodě, který má stejnou vzdálenost od zbývajících dvou vrcholů trojúhelníku. Ze shodnosti dvou obvodových úhlů v kružnici totiž plyne shodnost příslušných tětiv.]

N3. V rovině je dána úsečka AB. Sestrojte množinu těžišť všech ostroúhlých trojúhelníků ABC, pro něž platí: Vrcholy A a B, průsečík výšek V a střed S kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na jedné kružnici. [A–55–III–4]

D1. Dokažte, že pro vzdálenosti průsečíku V výšek od vrcholů ostroúhlého trojúhelníku ABC platí vzorce

$$|AV| = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad |BV| = \frac{b}{\operatorname{tg}\beta}, \quad |CV| = \frac{c}{\operatorname{tg}\gamma}.$$

[Jsou-li AA_0, CC_0 výšky ostroúhlého trojúhelníku ABC a V jejich průsečík, platí $|CA_0| = b\cos\gamma$. Pravoúhlý trojúhelník CA_0V má u vrcholu C úhel $90^\circ - \beta$, takže $|CA_0| = |CV|\cos(90^\circ - \beta) = |CV|\sin\beta$. Porovnáním dostaneme $b\cos\gamma = |CV|\sin\beta$, což spolu s rovností $b/\sin\beta = c/\sin\gamma$ (sinová věta) dává $|CV| = (b/\sin\beta)\cdot\cos\gamma = (c/\sin\gamma)\cdot\cos\gamma = c/\operatorname{tg}\gamma$. Třetí ze vzorců je dokázán, první dva platí z důvodů symetrie.]

2. Je dán rovnoběžník $ABCD$ s tupým úhlem ABC. Na jeho úhlopříčce AC v polorovině BDC zvolme bod P tak, aby platilo $|\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle ABC|$. Dokažte, že přímka CD je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku BCP, právě když úsečky AB a BD jsou shodné.

4. V libovolném trojúhelníku ABC označme O střed kružnice vepsané, P střed kružnice připsané ke straně BC a D průsečík osy úhlu CAB se stranou BC. Dokažte, že platí

$$\frac{2}{|AD|} = \frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|}.$$

(Kružnicí připsanou ke straně BC rozumíme takovou kružnici, která se dotýká jednak strany BC, jednak obou polopřímek opačných k polopřímkám BA a CA.)

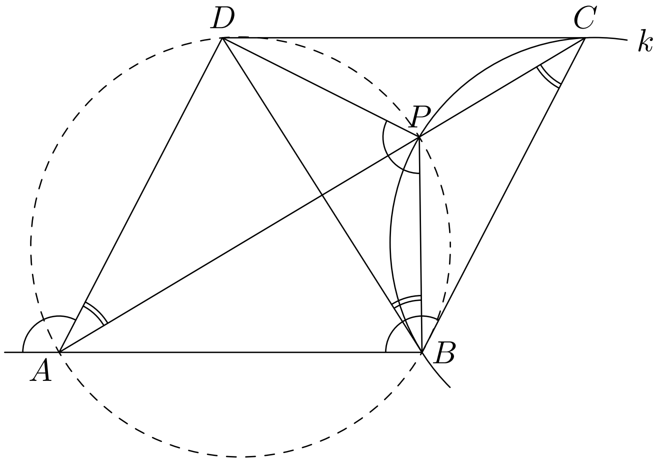
2. Pro lepší přehlednost zmiňme úvodem zřejmé vlastnosti obecného rovnoběžníku $ABCD$, které v řešení využijeme: součet úhlů BAD a ABC je úhel přímý, zatímco úhly DAC a ACB jsou shodné, stejně jako strany AB a CD.

Podle zadání úlohy přímka BD odděluje body A a P, přičemž platí

$$|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle ABC| = 180^\circ,$$

čtyřúhelníku $ABPD$ lze tudíž opsat kružnici (obr. 1). V ní jsou proto shodné obvodové úhly DBP a DAP, z čehož vyplývá

$$|\sphericalangle DBP| = |\sphericalangle DAP| = |\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle BCP|.$$



Obr. 1

Protože přímka BP odděluje body C a D, lze uplatnit větu o obvodovém a úsekovém úhlu pro tětivu BP kružnice k opsané trojúhelníku BCP: Z odvozené shodnosti úhlů BCP a DBP vyplývá, že přímka BD je tečnou ke kružnici k (s bodem dotyku B). Po tomto zjištění již snadno dokážeme obě požadované implikace.

(i) Je-li přímka CD tečnou ke kružnici k, ze symetrie obou tečen CD a BD plyne $|CD| = |BD|$ neboli $|AB| = |BD|$.

(ii) Platí-li naopak $|AB| = |BD|$ neboli $|CD| = |BD|$, leží bod D na ose tětivy BC kružnice k, takže její tečnou je nejen přímka BD, ale i souměrně sdružená přímka CD.

Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 2 body za objev tětivového čtyřúhelníku $ABPD$, 2 body za zdůvodnění, že přímka CD je tečnou kružnice k a po 1 bodu za jednotlivé implikace (i) a (ii). Patřičné polohy bodů pro závěry o obvodových, příp. úsekových úhlech jsou ze zadání úlohy natolik zřejmé, že absenci jejich popisu v žákovských řešeních nepenalizujte.

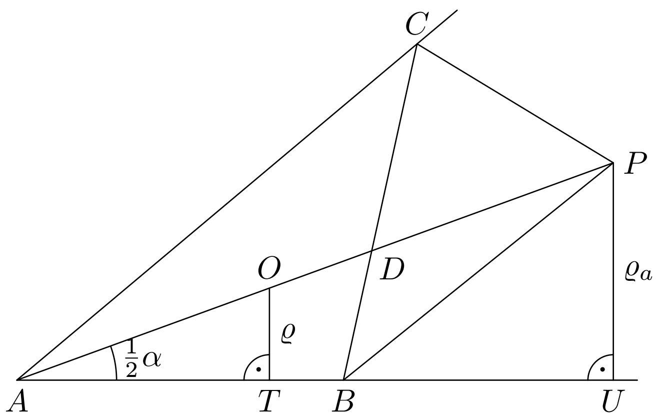
4. Označme obvyklým způsobem délky stran a velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC. Pro poloměry ϱ, ϱ_a kružnice vepsané, resp. připsané straně BC trojúhelníku ABC o obsahu S platí známé vzorce

$$\varrho = \frac{2S}{a+b+c} \quad \text{a} \quad \varrho_a = \frac{2S}{b+c-a}.$$

(K jejich odvození stačí uvážit rovnosti $S = S_{BCO} + S_{ABO} + S_{ACO}$, resp. $S = S_{ACP} + S_{ABP} - S_{BCP}$ a uvážit, že ϱ, resp. ϱ_a je společná výška zastoupené trojice trojúhelníků ke stranám původního trojúhelníku.)

Protože středy O, P leží na ose vnitřního úhlu BAC, jsou ϱ, ϱ_a odvěsnami protilehlými k úhlu $\frac{1}{2}\alpha$ pravoúhlých trojúhelníků s přeponami AO, resp. AP (obr. 2), takže platí $\varrho = |AO| \sin\frac{1}{2}\alpha$ a $\varrho_a = |AP| \sin\frac{1}{2}\alpha$. Dohromady dostáváme vyjádření pravé strany dokazované rovnosti ve tvaru

$$\begin{aligned}\frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|} &= \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\varrho} + \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha}{\varrho_a} = \\ &= \frac{\big((a+b+c)+(b+c-a)\big)\sin\frac{1}{2}\alpha}{2S} = \frac{(b+c)\sin\frac{1}{2}\alpha}{S}.\end{aligned}$$



Obr. 2

Na druhé straně je obsah S součtem obsahů trojúhelníků ABD a ACD, které vyjádříme pomocí délek jejich stran z vrcholu A a sinu jimi sevřeného (shodného) úhlu $\frac{1}{2}\alpha$:

$$S = S_{ABD} + S_{ACD} = \frac{c|AD|\sin\frac{1}{2}\alpha}{2} + \frac{b|AD|\sin\frac{1}{2}\alpha}{2} = \frac{(b+c)|AD|\sin\frac{1}{2}\alpha}{2}.$$

Odtud snadno obdržíme vyjádření

$$\frac{2}{|AD|} = \frac{(b+c)\sin\frac{1}{2}\alpha}{S}.$$

Vidíme, že obě strany dokazované rovnosti mají stejnou hodnotu. Tím je celý důkaz hotov. Dodejme, že díky vzorci $S = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = bc\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha$ lze získaný výsledek zapsat ve tvaru

$$\frac{2}{|AD|} = \frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|} = \frac{b+c}{bc\cos\frac{1}{2}\alpha}.$$

Jiné řešení. Využijeme rovnosti $|AT| = \frac{1}{2}(b+c-a)$ a $|AU| = \frac{1}{2}(a+b+c)$ pro body T, U dotyku polopřímky AB s vepsanou, resp. připsanou kružnicí.[1] Vzhledem k rovnostem $|AT| = |AO|\cos\frac{1}{2}\alpha$ a $|AU| = |AP|\cos\frac{1}{2}\alpha$ dostaneme následující vyjádření pravé strany dokazované rovnosti:

$$\frac{1}{|AO|} + \frac{1}{|AP|} = \frac{|AO|+|AP|}{|AP|}\cdot\frac{1}{|AO|} = \frac{|AT|+|AU|}{|AU|}\cdot\frac{1}{|AO|} =$$
$$= \frac{b+c}{\frac{1}{2}(a+b+c)}\cdot\frac{1}{|AO|} = \frac{2(b+c)}{a+b+c}\cdot\frac{1}{|AO|}.$$

Vidíme, že k dokončení důkazu požadované rovnosti stačí ukázat, že

$$\frac{|AD|}{|AO|} = \frac{a+b+c}{b+c}.$$

Z vlastností osy úhlu však víme, že bod D dělí stranu BC v poměru délek stran AB a AC, tedy $|BD|/|DC| = c/b$, takže $|CD| = ab/(b+c)$. Podobně ovšem bod O osy úhlu ACD dělí protější stranu AD trojúhelníku ACD v poměru

$$\frac{|AO|}{|OD|} = \frac{|AC|}{|CD|} = \frac{b}{\dfrac{ab}{b+c}} = \frac{b+c}{a}.$$

Odtud

$$\frac{|AD|}{|AO|} = \frac{|AO|+|OD|}{|AO|} = 1 + \frac{a}{b+c} = \frac{a+b+c}{b+c}.$$

Jiné řešení. Uvedeme trigonometrický postup založený na užití sinové věty v trojúhelnících ABO, ABD a ABP.[2] Je zřejmé, že tyto trojúhelníky mají u vrcholu B po řadě úhly $\frac{1}{2}\beta$, β a $90^\circ + \frac{1}{2}\beta$, zatímco u vrcholů O, D, P mají po řadě úhly $90^\circ + \frac{1}{2}\gamma$, $\gamma + \frac{1}{2}\alpha$ a $\frac{1}{2}\gamma$. Proto sinová věta přináší rovnosti

$$\frac{|AB|}{|AO|} = \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\beta}, \quad \frac{|AB|}{|AD|} = \frac{\sin(\gamma+\frac{1}{2}\alpha)}{\sin\beta}, \quad \frac{|AB|}{|AP|} = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\beta},$$

[1] Tyto rovnosti jsou dobře známé a snadno plynou z rovností délek úseků tečen od vrcholů trojúhelníku k bodům dotyku s příslušnou kružnicí.

[2] Se stejným úspěchem lze využít i trojici trojúhelníků ACO, ACD a ACP.

když jsme dvakrát využili vzorec $\sin(90° + \delta) = \cos\delta$. Po dosazení do dokazované rovnosti tak docházíme k ekvivalentní úloze dokázat pro vnitřní úhly libovolného trojúhelníku ABC rovnost

$$\frac{2\sin(\gamma + \frac{1}{2}\alpha)}{\sin\beta} = \frac{\cos\frac{1}{2}\gamma}{\sin\frac{1}{2}\beta} + \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\beta}.$$

Po uplatnění vzorce $\sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta$ a následném vynásobení obou stran nenulovým výrazem $\sin\frac{1}{2}\beta\cos\frac{1}{2}\beta$ přecházíme k úkolu ověřit jednodušší rovnost

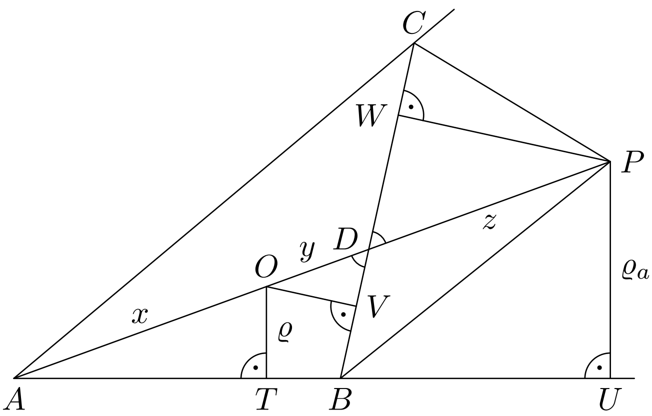
$$\sin\Big(\gamma + \frac{1}{2}\alpha\Big) = \cos\frac{1}{2}\gamma\cdot\cos\frac{1}{2}\beta + \sin\frac{1}{2}\gamma\cdot\sin\frac{1}{2}\beta.$$

To je už docela snadné: výraz napravo je totiž roven $\cos(\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma)$ a rovnost typu $\sin\delta = \cos\varepsilon$ je zaručena, platí-li $\delta + \varepsilon = 90°$. V našem případě je ovšem $\delta = \gamma + \frac{1}{2}\alpha$ a $\varepsilon = \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma$, tudíž

$$\delta + \varepsilon = \gamma + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 90°$$

a celý důkaz je tak hotov.

Jiné řešení. Položme $x = |AO|$, $y = |OD|$ a $z = |DP|$ a podle obr. 3 označme body dotyku T, U, V, W vepsané a připsané kružnice s přímkami AB, BC. Podle věty *uu* platí



Obr. 3

$\triangle AOT \sim \triangle APU$ a $\triangle DOV \sim \triangle DPW$, přitom v obou případech je koeficient podobnosti roven poměru poloměrů obou kružnic. Odtud plyne pro přepony zmíněných čtyř trojúhelníků úměra[3]

$$\frac{x}{x + y + z} = \frac{y}{z}. \tag{1}$$

Protože $x + y + z > z$, a tedy rovněž $x > y$, uvedeným dvěma zlomkům se rovná i třetí zlomek sestavený z (kladných) rozdílů čitatelů a jmenovatelů. Platí tedy

$$\frac{x}{x + y + z} = \frac{x - y}{(x + y + z) - z} = \frac{x - y}{x + y} = \frac{2x}{x + y} - 1.$$

[3] Její platnost je zaručena i v případě $D = V = W$, kdy druhý pár podobných trojúhelníků degeneruje na dvojici úseček – poloměrů zkoumaných kružnic.

Odtud po vydělení kladnou hodnotou x dostaneme

$$\frac{1}{x+y+z} = \frac{2}{x+y} - \frac{1}{x}$$

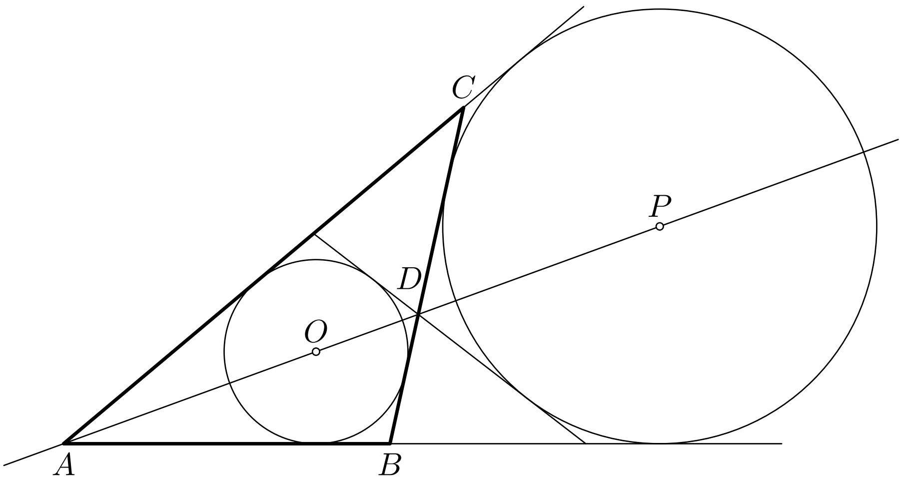
a po převodu druhého zlomku z pravé strany na levou již obdržíme dokazovanou rovnost, neboť

$$\frac{1}{x+y+z} = \frac{1}{|AP|}, \quad \frac{2}{x+y} = \frac{2}{|AD|} \quad \text{a} \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{|AO|}.$$

Jiné řešení. Obě kružnice jsou stejnolehlé podle středů A i D. Obě stejnolehlosti mají až na znaménko stejné koeficienty a zobrazují bod O na bod P (obr. 4). Odtud

$$\frac{|DP|}{|DO|} = \frac{|AP|}{|AO|} \quad \text{neboli} \quad \frac{|AP|-|AD|}{|AD|-|AO|} = \frac{|AP|}{|AO|}.$$

Úpravou poslední rovnosti dostáváme $2|AP||AO| = |AD|(|AP| + |AO|)$ a po vydělení nenulovým součinem $|AP||AO||AD|$ vyjde vztah, který jsme chtěli dokázat.

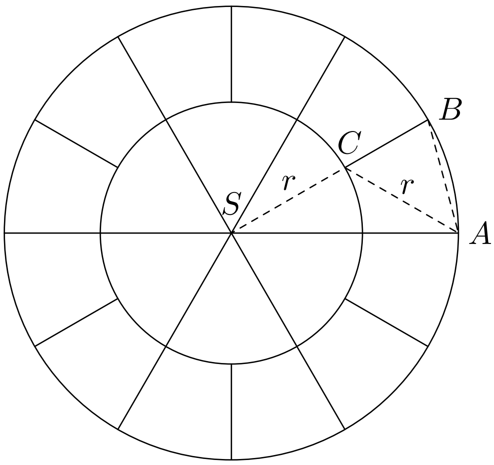


Obr. 4

Za úplné řešení je 6 bodů. Známé vzorce pro délky úseků stran k bodům dotyku vepsané a připsané kružnice stejně jako vzorce pro jejich poloměry není třeba dokazovat. Za vyjádření jednotlivých délek $|AD|$, $|AO|$, $|AP|$ pomocí obsahu S, délek b, c a hodnoty $\sin \frac{1}{2}\alpha$ udělte po 1 bodu; stejně tak při jiném postupu udělte po 1 bodu za jednotlivá vyjádření ze sinové věty pomocí vnitřních úhlů α, β, γ a jedné ze stran b, c. (Takové zisky ovšem nelze sčítat, zkouší-li řešitel současně oba postupy.)

2. *Kruhový terč o poloměru 12 cm zasáhlo 19 střel. Dokažte, že vzdálenost některých dvou zásahů je menší než 7 cm.* (Vojtech Bálint, Jaromír Šimša)

Řešení. Označme $r = 4\sqrt{3}$ cm a celý terč o daném poloměru $r\sqrt{3}$ rozdělme na 18 částí. Prvních šest částí budou shodné výseče o středovém úhlu 60° v kruhu o poloměru r uprostřed terče. Zbylé mezikruží rozdělíme na 12 shodných „mezivýsečí" o středovém úhlu 30° (obr. 1).



Obr. 1

Označme podle obrázku S střed terče a A, B, C vrcholy jedné ze zmíněných mezivýsečí. Protože kružnice ohraničující tyto části mají poloměry r a $r\sqrt{3}$ a protože $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, je zřejmě trojúhelník SAC rovnoramenný, takže $|AC| = r$; navíc je AC nejdelší stranou v trojúhelníku ABC, který má vnitřní úhly 45°, 75° a 60°. Proto je maximální vzdálenost dvou bodů jedné mezivýseče rovna r stejně jako maximální vzdálenost dvou bodů každé ze 6 výsečí středového kruhu o poloměru r. Podle Dirichletova principu některé dva z 19 zásahů leží ve stejné z 18 vytvořených částí, takže jejich vzdálenost je nejvýše r. Důkaz je hotov, protože platí $4\sqrt{3} < 7$ ($\Leftrightarrow 48 < 49$).

Poznámka. Uvažujme tvrzení: *Je-li v kruhu o poloměru $r\sqrt{3}$ vybráno N bodů, je vzdálenost některých dvou z nich nejvýše r.* Kdybychom chtěli takové tvrzení dokázat porovnáním součtu obsahů N shodných kruhů o průměru r s obsahem kruhu o průměru $r\bigl(1+2\sqrt{3}\bigr)$, podaří se nám to, právě když bude platit

$$N \cdot \frac{\pi r^2}{4} > \frac{\pi r^2\bigl(1+2\sqrt{3}\bigr)^2}{4} \quad \text{neboli} \quad N > 13 + 4\sqrt{3} \doteq 19{,}9.$$

V situaci dané úlohy, kdy je odhad r vzdálenosti dvou bodů zaměněn větší hodnotou $r_1 = r \cdot \dfrac{7}{4\sqrt{3}}$, má podobná podmínka tvar

$$N \cdot \frac{\pi r_1^2}{4} > \frac{\pi\bigl(r_1 + 2r\sqrt{3}\bigr)^2}{4}, \quad \text{po dosazení} \quad N > \left(1 + \frac{24}{7}\right)^2 \doteq 19{,}6.$$

Proto nelze takto jednoduchým postupem k řešení úlohy dospět.

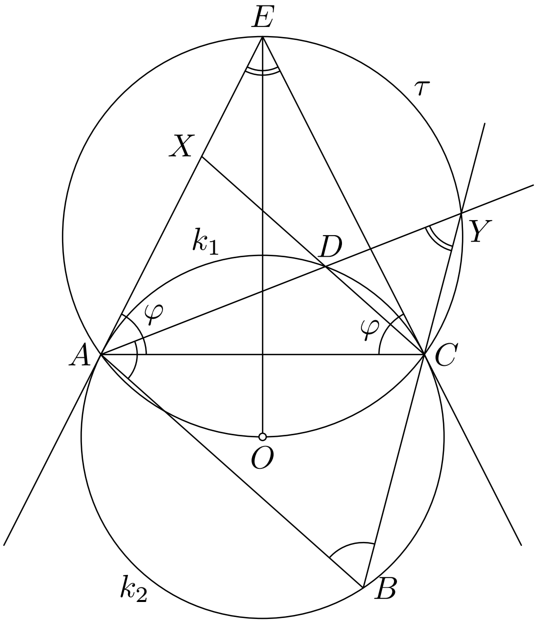
4. *Je dána kružnice k s tětivou AC, jež není průměrem. Na její tečně vedené bodem A zvolíme bod $X \neq A$ a označíme D průsečík kružnice k s vnitřkem úsečky XC (pokud existuje). Trojúhelník ACD doplníme na lichoběžník $ABCD$ vepsaný kružnici k. Určete množinu průsečíků přímek BC a AD odpovídajících všem takovým lichoběžníkům.* (Pavel Leischner)

Řešení. Budeme dále uvažovat jen takové lichoběžníky $ABCD$, ve kterých platí $AB \parallel CD$, u ostatních průsečík (rovnoběžných) přímek BC a AD neexistuje.

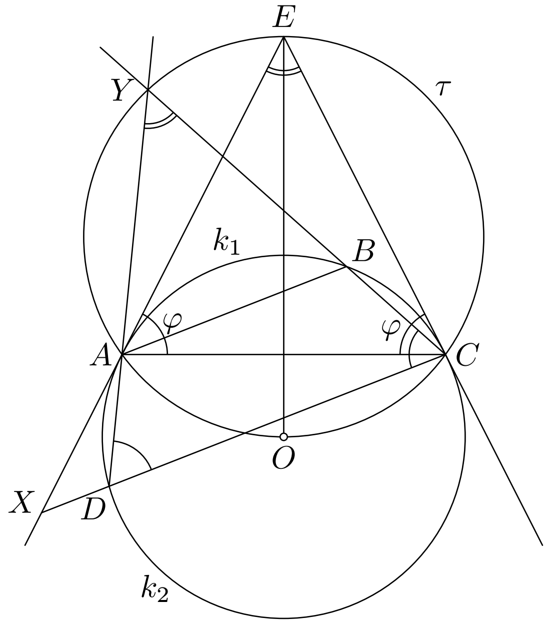
Označme O střed kružnice k, E průsečík jejích tečen vedených body A, C (obr. 2). Jak víme, body A, C leží na Thaletově kružnici τ nad průměrem OE a jsou podle tohoto průměru souměrně sdruženy. Společnou velikost ostrých úhlů při základně AC rovnoramenného trojúhelníku ACE označme φ. Konečně vnitřky kratšího a delšího oblouku AC kružnice k označme k_1, resp. k_2.

a) Zvolme na tečně AE libovolný bod X, $X \neq A$. Kružnice k zřejmě protne úsečku XC ve vnitřním bodě D, právě když bod X je buď vnitřním bodem úsečky AE, anebo vnitřním bodem polopřímky opačné k polopřímce AE. Oba případy (obr. 2 a obr. 3) nyní posoudíme samostatně.

V prvním případě platí $D \in k_1$ a $B \in k_2$, takže podle věty o úsekovém úhlu je úhel ABC roven ostrému úhlu φ. Stejnou velikost má i úhel BAD, protože každý tětivový lichoběžník je rovnoramenný. Bod Y, průsečík různoběžných polopřímek BC a AD, tedy leží v polorovině ACE. Z rovnoramenných trojúhelníků ABY a ACE proto plyne, že



Obr. 2



Obr. 3

úhly AYC a AEC jsou shodné (mají velikost $\pi - 2\varphi$). Podle věty o obvodovém úhlu leží bod Y na oblouku AEC kružnice τ, přesněji uvnitř kratšího z jejích oblouků CE, neboť polopřímka AD leží v úhlu CAE.

Ve druhém případě je úvaha analogická a zapíšeme ji stručně: $D \in k_2$, $B \in k_1$, $|\sphericalangle ADC| = \varphi = |\sphericalangle BCD|$, průsečík Y různoběžných polopřímek CB a DA leží v polorovině ACE, a protože $|\sphericalangle AYC| = |\sphericalangle AEC|$, leží bod Y na kružnici τ, a to uvnitř jejího kratšího oblouku AE.

b) Ukážeme nyní, že naopak každý vnitřní bod Y kratších oblouků CE a AE kružnice τ je průsečíkem přímek BC a AD některého z uvažovaných lichoběžníků $ABCD$. Opět rozlišíme dva případy podle toho, na kterém z obou oblouků bod Y leží.

Je-li Y vnitřní bod oblouku CE, lze zřejmě sestrojit body $D \in k_1$ a $B \in k_2$ tak, aby body A, D, Y resp. B, C, Y ležely v uvedeném pořadí v přímce. Z $D \in k_1$ plyne existence průsečíku X polopřímky CD s vnitřkem úsečky AE (bod D pak odpovídá bodu X podle konstrukce ze zadání úlohy). Zbývá objasnit, proč $AB \parallel CD$. Protože body O a Y leží na různých obloucích AC kružnice τ a přitom $|AO| = |CO|$, je polopřímka YO osou úhlu AYC, takže přímky $A(D)Y$ a $B(C)Y$ jsou souměrně sdružené podle přímky YO, která je (triviálně) osou souměrnosti kružnice k, neboť prochází jejím středem. Proto podle této osy musí být souměrně sdruženy i průsečíky obou zmíněných přímek $A(D)Y$ a $B(C)Y$ s kružnicí k, tedy (díky určenému pořadí bodů) jednak body A a B, jednak body D a C. Obě úsečky AB a CD jsou proto kolmé na přímku OY, a jsou tudíž rovnoběžné.

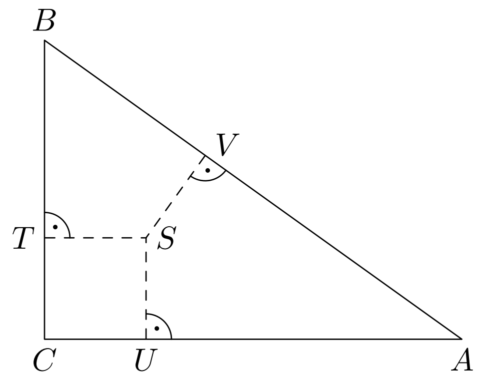
Je-li Y vnitřní bod oblouku AE, sestrojíme body $D \in k_2$ a $B \in k_1$ tak, aby v přímce ležely body v pořadí D, A, Y, resp. C, B, Y. Polopřímka CD protne přímku AE v potřebném bodě X (protože $D \neq A$, bude jistě $X \neq A$), pokud platí $|\sphericalangle AEC| + |\sphericalangle ECD| < \pi$. To ověříme tak, že užijeme větu o obvodovém a úsekovém úhlu v kružnici k, podle které $|\sphericalangle ECD| = \pi - |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CAY|$, a protože $|\sphericalangle AEC| = |\sphericalangle AYC|$, je součet $|\sphericalangle AEC| + |\sphericalangle ECD|$ roven součtu dvou úhlů v trojúhelníku ACY. Ze sdruženosti přímek $D(A)Y$ a $C(B)Y$ podle osy OY úhlu AYC pak opět plyne požadovaná rovnoběžnost $AB \parallel CD$.

Závěr. Hledanou množinou je sjednocení vnitřků kratších oblouků CE a AE Thaletovy kružnice τ.

2. Najděte všechny možné hodnoty podílu

$$\frac{r + \varrho}{a + b},$$

kde r je poloměr kružnice opsané a ϱ poloměr kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku s odvěsnami délek a a b.



2. Pro délky úseků stran obecného trojúhelníku ABC k bodům dotyku vepsané kružnice (označeným podle obr.) platí vzorce

$$|AU| = |AV| = \frac{b+c-a}{2},\ |BV| = |BT| = \frac{a+c-b}{2},\ |CT| = |CU| = \frac{a+b-c}{2},$$

které lze snadno získat vyřešením soustavy rovnic

$$|AV| + |BV| = c, \quad |AU| + |CU| = b, \quad |BT| + |CT| = a.$$

Body C, T, U spolu se středem S vepsané kružnice jsou obecně vrcholy deltoidu, který je v případě pravého úhlu ACB čtvercem o straně $\varrho = |SU| = |SV|$. Porovnání s výše uvedenými vzorci pro délky úseků CT, CU vede ke vztahu

$$\varrho = \frac{a+b-c}{2};$$

podle Thaletovy věty v takovém pravoúhlém trojúhelníku navíc platí $r = \frac{1}{2}c$. Dohromady dostáváme

$$r + \varrho = \frac{c}{2} + \frac{a + b - c}{2} = \frac{a + b}{2}.$$

Zkoumaný podíl $(r + \varrho)/(a + b)$ má proto v libovolném pravoúhlém trojúhelníku jedinou možnou hodnotu, rovnou číslu $\frac{1}{2}$.

Podané řešení lze obměňovat, zejména tak, že namísto obecných vzorců pro úseky stran vyjdeme z rovností $|CT| = |CU| = \varrho$, z nichž plyne $|AV| = |AU| = b - \varrho$ a $|BV| = |BT| = a - \varrho$, tudíž

$$2r = c = |AB| = |AV| + |BV| = (b - \varrho) + (a - \varrho),$$

odkud je již závěr nasnadě.

Jiné řešení. Pro obsah P obecného trojúhelníku ABC platí vzorec

$$2P = \varrho(a + b + c);$$

k jeho odvození stačí sečíst obsahy trojúhelníků ABS, ACS a BCS se shodnou výškou ϱ ke stranám původního trojúhelníku. V případě $\gamma = 90°$ je ovšem $2P = ab$ a kromě toho, jak už jsme zmínili výše, $r = \frac{1}{2}c$. Spolu s Pythagorovou větou $c^2 = a^2 + b^2$ tak dostáváme

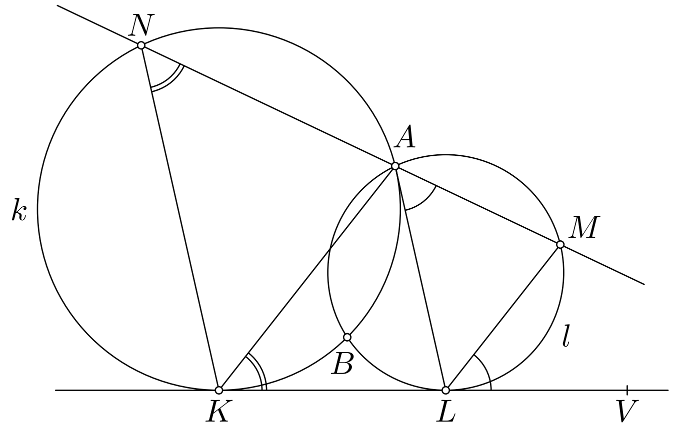
$$r + \varrho = \frac{c}{2} + \frac{ab}{a + b + c} = \frac{ac + bc + c^2 + 2ab}{2(a + b + c)} = \frac{ac + bc + a^2 + b^2 + 2ab}{2(a + b + c)} =$$
$$= \frac{(a + b)c + (a + b)^2}{2(a + b + c)} = \frac{(a + b)(a + b + c)}{2(a + b + c)} = \frac{a + b}{2},$$

a docházíme tak ke stejnému závěru jako v původním řešení.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Známé vzorce pro délky úseků stran k bodům dotyku vepsané kružnice není nutné dokazovat, stejně jako vztah mezi obsahem, poloměrem kružnice vepsané a obvodem trojúhelníku. Při neúplných řešeních udělte 1 bod za vzorec $r = \frac{1}{2}c$; za vyjádření ϱ ve tvaru $\varrho = \frac{1}{2}(a + b - c)$ udělte 3 body, z toho 1 bod za objev čtverce $CUST$, zatímco za vzorec $2P = \varrho(a + b + c)$ pouze 1 bod (poslední dva zisky nelze sčítat).

3. *Jsou dány kružnice k, l, které se protínají v bodech A, B. Označme K, L po řadě dotykové body jejich společné tečny zvolené tak, že bod B je vnitřním bodem trojúhelníku AKL. Na kružnicích k a l zvolme po řadě body N a M tak, aby bod A byl vnitřním bodem úsečky MN. Dokažte, že čtyřúhelník $KLMN$ je tětivový, právě když přímka MN je tečnou kružnice opsané trojúhelníku AKL.*

Řešení. Z rovnosti obvodového a úsekového úhlu příslušného tětivě AK kružnice k plyne (obr. 1) $|\sphericalangle KNA| = |\sphericalangle LKA|$ a podobně z rovnosti obvodového a úsekového úhlu příslušného tětivě AL kružnice l plyne $|\sphericalangle VLM| = |\sphericalangle LAM|$, kde jsme jako V označili nějaký bod polopřímky opačné k polopřímce LK.



Obr. 1

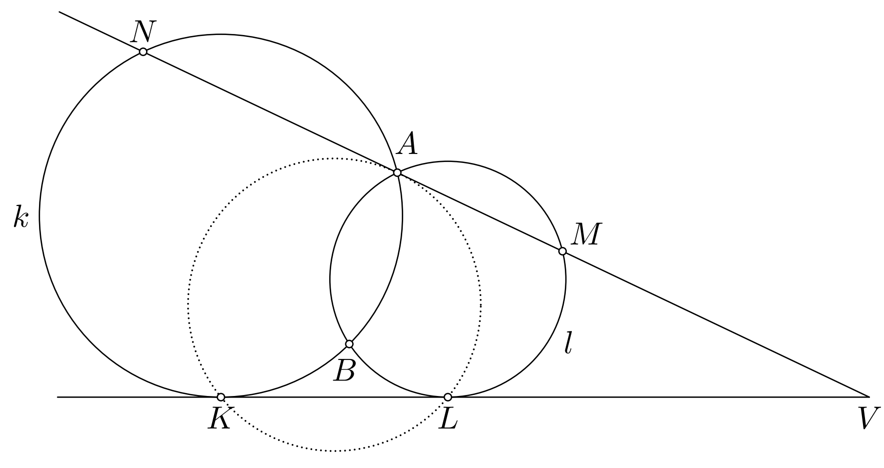
Čtyřúhelník $KLMN$ je tětivový, právě když platí $|\sphericalangle KNA| = |\sphericalangle VLM|$ neboli $|\sphericalangle LKA| = |\sphericalangle LAM|$. Poslední rovnost ovšem platí, právě když je LAM úsekovým úhlem příslušným obvodovému úhlu LKA tětivy LA kružnice opsané trojúhelníku AKL, tedy právě když je přímka MN tečnou této kružnice.

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Jiné řešení. Vyřešme úlohu nejprve za předpokladu, že přímky KL a MN jsou rovnoběžné. V takovém případě jsou zřejmě oba trojúhelníky ANK a MAL rovnoramenné, protože osy stran AN, resp. MA procházejí odpovídajícím vrcholem K, resp. L (jinak bodem dotyku tečny rovnoběžné s tětivou AN, resp. MA kružnice k, resp. l). Je tedy $|LA| = |LM|$ a $|KN| = |KA|$. Přitom čtyřúhelník $KLMN$ je tětivový, právě když je to rovnoramenný lichoběžník, tj. $|LM| = |KN|$. To podle předchozí dvojice rovností nastane, právě když je trojúhelník KLA rovnoramenný neboli právě když MN je tečnou jeho kružnice opsané ve vrcholu proti základně KL. (Vzhledem k tomu, že pak jsou trojúhelníky ANK a MAL shodné, uvedená situace nastane, právě když jsou kružnice k, l shodné.)

Předpokládejme dále, že přímky MN a KL jsou různoběžné, a označme V jejich průsečík (obr. 2). Užitím mocnosti bodu V ke kružnicím k a l dostaneme

$$|VK|^2 = |VA| \cdot |VN| \qquad \text{a} \qquad |VL|^2 = |VM| \cdot |VA|.$$



Obr. 2

Vynásobením obou vztahů obdržíme

$$|VK|^2 \cdot |VL|^2 = |VN| \cdot |VA|^2 \cdot |VM|. \tag{1}$$

Čtyřúhelník $KLMN$ je ovšem tětivový, právě když platí (viz návodnou úlohu N1)

$$|VK| \cdot |VL| = |VN| \cdot |VM|$$

neboli — s přihlédnutím k (1) — právě když platí

$$|VK| \cdot |VL| = |VA|^2.$$

Poslední rovnost ovšem platí, právě když přímka MN (procházející bodem A) je tečnou kružnice opsané trojúhelníku AKL. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Návodné a doplňující úlohy:

Zopakujte si nejdříve učebnicové poznatky o obvodovém, středovém a úsekovém úhlu i s jejich důkazy. Připomeňte si rovněž vlastnost všech sečen dané kružnice jdoucích daným bodem, jež je vyjádřena mocností bodu ke kružnici.

N1. Přímky KL a MN se protínají v bodě V, který leží buď uvnitř, nebo vně obou úseček KL a MN. Dokažte, že body K, L, M, N leží na jedné kružnici, právě když platí $|VK| \cdot |VL| = |VM| \cdot |VN|$. [Uvažte mocnost bodu V ke kružnici opsané trojúhelníku KLM a posuďte, kdy druhý průsečík N' této kružnice s přímkou VM splývá s bodem N.]

N2. V rovině je dána přímka p a body A, B ($A \neq B$), které leží v téže polorovině vyťaté přímkou p. Sestrojte kružnici, která prochází body A, B a dotýká se přímky p. [Uvažujte přímku q, na níž leží body A, B, a využijte mocnost jejího průsečíku s p k hledané kružnici.]

N3. V rovině je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB a pravým úhlem při vrcholu A. Kružnice k_1 sestrojená nad stranou AD jako průměrem a kružnice k_2, která prochází vrcholy B a C a dotýká se přímky AB, mají vnější dotyk v bodě P. Dokažte, že úhly CPD a ABC jsou shodné. [52–B–I–5]

N4. V rovině je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB a pravým úhlem při vrcholu A. Označme k_1 kružnici sestrojenou nad stranou AD jako nad průměrem a k_2 kružnici procházející vrcholy B, C a dotýkající se přímky AB. Mají-li kružnice k_1, k_2 vnější dotyk v bodě P, je přímka BC tečnou kružnice opsané trojúhelníku CDP. Dokažte. [52–B–II–4]

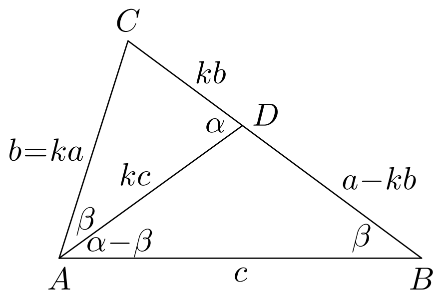
D1. Nechť L je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku CD kružnice opsané čtverci $ABCD$. Označme K průsečík přímek AL a CD, M průsečík přímek AD a CL a N průsečík přímek MK a BC. Dokažte, že body B, L, M, N leží na téže kružnici. [53–A–III–5]

6. *Dokažte, že v každém trojúhelníku ABC s ostrým úhlem při vrcholu C (při obvyklém označení délek stran a velikostí vnitřních úhlů) platí nerovnost*

$$(a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta) \leqq 2ab.$$

Zjistěte, kdy nastane rovnost.

Je-li $a = b$, je $\alpha = \beta$, takže $\cos(\alpha - \beta) = 1$ a dokazovaná nerovnost platí jako rovnost $a^2 + a^2 = 2a^2$ (dodejme, že bez ohledu na to, zda je úhel γ ostrý či nikoliv). Protože dokazovaná nerovnost je symetrická v a, b (kosinus je sudá funkce), můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že $a > b$ neboli $\alpha > \beta$.



Obr. 3

Protože $\alpha > \beta$, lze úhel BAC velikosti α rozdělit pomocí bodu $D \in BC$ na dva úhly CAD a DAB velikostí β, a $\alpha - \beta$ (obr. 3). Trojúhelník DAC je pak zmenšením trojúhelníku ABC s koeficientem podobnosti $k = b : a$, takže $|AD| = bc/a$ a $|DC| = b^2/a$, odkud $|BD| = |BC| - |DC| = (a^2 - b^2)/a$.

Vyjádření $|AD|$, $|BD|$ dosadíme do rovnosti z kosinové věty pro trojúhelník ABD a upravíme:

$$\begin{gathered}|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2|AB||AD|\cos(\alpha-\beta),\\ \frac{(a^2-b^2)^2}{a^2} = c^2 + \frac{b^2c^2}{a^2} - \frac{2bc^2\cos(\alpha-\beta)}{a},\\ (a^2-b^2)^2 = \delta\cdot c^2, \quad \text{kde} \quad \delta = a^2+b^2-2ab\cos(\alpha-\beta) > 0. \end{gathered} \tag{1}$$

(Poslední nerovnost plyne z toho, že pro $\alpha \neq \beta$ je $\cos(\alpha-\beta) < 1$.) Vztah (1) spolu s rovností $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ nyní využijeme k úpravě rozdílu Δ pravé a levé strany dokazované nerovnosti, který navíc ještě vynásobíme výrazem $2ab$:

$$\begin{aligned}2ab\Delta &= 2ab\bigl(2ab-(a^2+b^2)\cos(\alpha-\beta)\bigr) = 4a^2b^2-(a^2+b^2)\cdot 2ab\cos(\alpha-\beta) =\\ &= 4a^2b^2-(a^2+b^2)(a^2+b^2-\delta) = \delta(a^2+b^2)-(a^2-b^2)^2 =\\ &= \delta(a^2+b^2)-\delta\cdot c^2 = \delta(a^2+b^2-c^2) = \delta\cdot 2ab\cos\gamma,\end{aligned}$$

Po vydělení výrazem $2ab$ dostáváme vztah $\Delta = \delta\cos\gamma$, takže s ohledem na $\delta > 0$ má výraz Δ stejné znaménko jako $\cos\gamma$ (zopakujme, že za předpokladu $a \neq b$). Odtud plyne, že v případě, kdy $\gamma < 90^\circ$ a $a \neq b$, platí nerovnost ze zadání úlohy jako *ostrá*. Tím je úloha vyřešena a odpověď na její závěrečnou otázku zní: v dokázané nerovnosti (v zadané situaci, tj. při ostrém úhlu γ) nastane rovnost, právě když $a = b$.

Poznámka 1. Odvozený vztah $\Delta = \delta\cos\gamma$ se bez pomocných označení přepíše jako identita

$$2ab-(a^2+b^2)\cos(\alpha-\beta) = \bigl(a^2+b^2-2ab\cos(\alpha-\beta)\bigr)\cos\gamma, \tag{2}$$

která platí pro *libovolný* trojúhelník ABC (k našemu odvození stačí přidat triviální ověření rovnosti (2) v případě $a = b$). Výsledek (2) umožňuje snadnou diskusi o jednotlivých případech relace

$$(a^2+b^2)\cos(\alpha-\beta) \lesseqqgtr 2ab,$$

neboť první činitel v pravé straně (2) je vždy nezáporný:

$$a^2+b^2-2ab\cos(\alpha-\beta) \geqq a^2+b^2-2ab = (a-b)^2 \geqq 0.$$

Relace dopadá takto: rovnost nastane, právě když $a = b$ nebo $\gamma = 90^\circ$; v případě $a \neq b$ pak platí ostrá nerovnost $<$ či $>$ podle toho, zda je $\gamma < 90^\circ$ nebo $\gamma > 90^\circ$.

Jiné řešení. Původní řešení je celé založeno na vztahu (1), proto jeho odlišné odvození nyní uvedeme jako „jiné řešení". Tvar kladného výrazu δ v (1) je motivací k úvaze o pomocném trojúhelníku, jehož dvě strany mají délky a, b a svírají úhel velikosti $\alpha-\beta$ (opět předpokládáme, že $a > b$). Nás zajímá délka jeho třetí strany, kterou označíme d, takže pro výraz δ ve vztahu (1), který se chystáme dokázat, budeme mít $\delta = d^2$. Ukažme, že takový trojúhelník o stranách a, b, d je — vedle původního trojúhelníku o stranách a, b, c — druhým řešením úlohy *sestrojit trojúhelník ABC, jsou-li dány strany a, b a úhel β*. Konstrukci obou řešení A_1BC a A_2BC vidíme na obr. 4. Součet úhlů při vrcholech A_1 a A_2 (vyznačených obloučky) je zřejmě 180°. V jednom z trojúhelníků je to úhel α, ve druhém tedy úhel $180^\circ-\alpha$, takže úhel při vrcholu C druhého trojúhelníku je právě $\alpha-\beta$, jak jsme si přáli.[2] Úsečky A_1B, A_2B tedy mají (v některém pořadí)

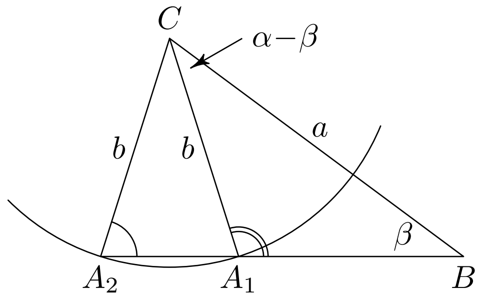
[2] V případě $\alpha = 90^\circ$ sice platí $A_1 = A_2$, avšak na celé naší úvaze není třeba nic měnit: tehdy totiž $\alpha-\beta = \gamma$ a $c = d$.

délky c a d. Z mocnosti bodu B k sestrojené kružnici o středu C a poloměru b vyplývá rovnost

$$cd = a^2 - b^2, \tag{3}$$

z níž po umocnění na druhou dostáváme $c^2d^2 = (a^2 - b^2)^2$. A to je kýžený klíčový vztah (1) z původního řešení, neboť jak už jsme naznačili, podle kosinové věty platí

$$d^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha - \beta). \tag{4}$$



Obr. 4

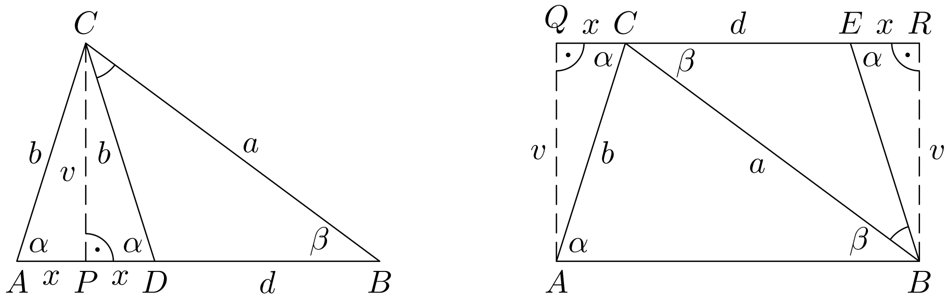
Poznámka 2. V původním řešení jsme ze vztahu (1) odvodili identitu zapsanou v Poznámce 1 jako (2). Právě uvedený alternativní důkaz (1) s využitím konstrukční úlohy (a, b, β) má zajímavý důsledek: díky „rovnoprávnosti" obou řešení z obr. 4 musí platit i identita

$$2ab - (a^2 + b^2)\cos\gamma = c^2\cos(\alpha - \beta). \tag{5}$$

získaná z (2) výměnou rolí trojúhelníků s trojicemi stran (a, b, c) a (a, b, d) a uvedená v doplňující úloze D1, v jejímž návodu naznačujeme odlišné trigonometrické odvození.

Další řešení. Pomocný trojúhelník se stranami a, b $(a > b)$ svírajícími úhel $\alpha - \beta$ a třetí stranou d danou vztahem (4) lze využít k řešení úlohy i bez objevu „mocnostní" rovnosti (3) následujícím postupem, který může být blízký řešitelům, a proto ho popisujeme i v návodné úloze N1.

Zmíněný trojúhelník lze k trojúhelníku ABC vhodně přikreslit dvěma způsoby patrnými z obr. 5. Vlevo je to trojúhelník BCD (ten známe už z předchozího řešení), vpravo



Obr. 5

to je trojúhelník BCE; snadno pak ověříme, že oba vyznačené úhly BCD a CBE mají požadovanou velikost $\alpha - \beta$.[3] Pomocí délky d ze vztahu (4) nyní upravíme dokazovanou

[3] Oba obrázky odpovídají případu $\alpha < 90°$, v úplném řešení by neměl chybět obrázek pro případ $\alpha \geqq 90°$, který zde posuzovat nebudeme, protože další postup vyžaduje jen nepatrnou obměnu.

(ostrou) nerovnost:

$$
\begin{aligned}
(a^2+b^2)\cos(\alpha-\beta) &< 2ab,\\
(a^2+b^2)\cdot 2ab\cos(\alpha-\beta) &< 4a^2b^2,\\
(a^2+b^2)(a^2+b^2-d^2) &< 4a^2b^2,\\
(a^2-b^2)^2 &< (a^2+b^2)d^2. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

Nakonec využijeme Pythagorovu větu pro dvojice pravoúhlých trojúhelníků z obr. 5; v obou variantách jak s trojúhelníkem BCD, tak s trojúhelníkem BCE pak platí

$$a^2 = (d+x)^2 + v^2 \quad \text{a} \quad b^2 = x^2 + v^2,$$

takže $a^2-b^2 = d^2+2dx = d(d+2x)$. Po dosazení do levé strany nerovnosti (6) a zkrácení výrazem d^2 dostaneme ekvivalentní nerovnost

$$(d+2x)^2 < a^2+b^2 \quad \text{neboli} \quad c^2 < a^2+b^2,$$

která (díky kosinové větě) přesně vyjadřuje podmínku $\gamma < 90^\circ$ ze zadání úlohy. Tím je celé její řešení hotovo, protože v případě $a=b$ zřejmě v dokazované nerovnosti nastane rovnost.

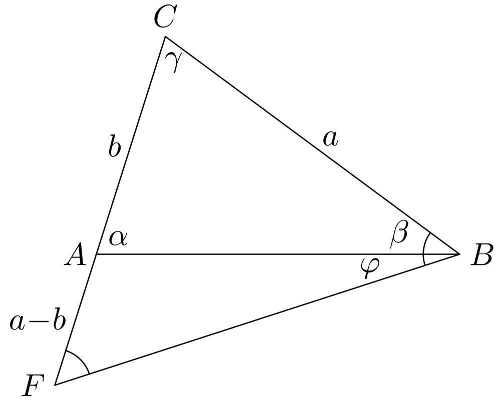
Další řešení. Ještě jedním způsobem za předpokladů $\gamma < 90^\circ$ a $a > b$ (neboli $\alpha > \beta$) dokážeme ostrou nerovnost

$$(a^2+b^2)\cos(\alpha-\beta) < 2ab.$$

Nejprve ji ekvivalentně upravíme, když položíme $\varphi = \frac{1}{2}(\alpha-\beta) > 0$ a využijeme vzorec $\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi$:

$$
\begin{aligned}
(a^2+b^2)(1-2\sin^2\varphi) &< 2ab,\\
(a-b)^2 &< 2(a^2+b^2)\sin^2\varphi,\\
2\cdot\left(\frac{a-b}{2\sin\varphi}\right)^2 &< a^2+b^2.
\end{aligned}
$$

To je (podle sinové věty) nerovnost $2r^2 < a^2+b^2$ pro poloměr r kružnice opsané libovolnému trojúhelníku se stranou $a-b$ a protilehlým vnitřním úhlem φ. Takový trojúhelník dostaneme, když jako na obr. 6 stranu CA trojúhelníku ABC prodloužíme za bod A



Obr. 6

do bodu F tak, aby platilo $|CF| = a$ ($a > b$). Potom má trojúhelník ABF stranu AF délky $a - b$ s protilehlým úhlem ABF, jehož velikost určíme takto: rovnoramenný trojúhelník BCF má při základně BF shodné úhly $90° - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, takže

$$|\sphericalangle ABF| = |\sphericalangle CBF| - |\sphericalangle CBA| = \frac{\alpha+\beta}{2} - \beta = \varphi.$$

Proto je poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABF skutečně roven zkoumané hodnotě r. Pro ni tak získáme z předpokladu $\gamma < 90°$ odhad

$$r = \frac{|AB|}{2\sin|\sphericalangle AFB|} = \frac{c}{2\sin(90° - \frac{1}{2}\gamma)} < \frac{c}{2\sin 45°} = \frac{c}{\sqrt{2}}$$

neboli $2r^2 < c^2$; ze stejného předpokladu $\gamma < 90°$ ovšem vyplývá (díky kosinové větě pro trojúhelník ABC) další nerovnost $c^2 < a^2 + b^2$. Dohromady dostáváme $2r^2 < c^2 < a^2 + b^2$ a kýžená nerovnost $2r^2 < a^2 + b^2$ je tak dokázána.

Dodejme ještě, že v případě $\gamma > 90°$ ze stejných důvodů platí $2r^2 > c^2 > a^2 + b^2$, což (za předpokladu $a \neq b$) dokazuje opačnou nerovnost

$$(a^2 + b^2)\cos(\alpha - \beta) > 2ab.$$

Poslední řešení. Uvedeme ještě jedno trigonometrické řešení. Pro libovolný trojúhelník ABC platí totiž tzv. *Mollweidův vzorec*

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma},$$

o kterém pojednává návodná úloha N2 a ze kterého plyne následující vyjádření hodnoty $\cos(\alpha - \beta)$:

$$\cos(\alpha-\beta) = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 1 - \frac{2(a-b)^2\cos^2\frac{1}{2}\gamma}{c^2}.$$

Dosazením do levé strany dokazované nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned}
(a^2+b^2)\cos(\alpha-\beta) &\leqq 2ab,\\
(a^2+b^2)\left(1 - \frac{2(a-b)^2\cos^2\frac{1}{2}\gamma}{c^2}\right) &\leqq 2ab,\\
(a-b)^2 &\leqq \frac{2(a^2+b^2)(a-b)^2\cos^2\frac{1}{2}\gamma}{c^2}.
\end{aligned}$$

Vidíme, že v případě $a = b$ nastane rovnost. V případě $a \neq b$ po dělení kladným výrazem $(a-b)^2$ a další zřejmé ekvivalentní úpravě dostaneme

$$c^2 \leqq 2(a^2+b^2)\cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

Dosadíme-li sem z rovností

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad \text{a} \quad 2\cos^2\frac{\gamma}{2} = 1 + \cos\gamma,$$

dostaneme po odečtení součtu $a^2 + b^2$ od obou stran nerovnost

$$-2ab\cos\gamma \leqq (a^2+b^2)\cos\gamma \quad \text{neboli} \quad 0 \leqq (a+b)^2\cos\gamma,$$

což díky zadanému předpokladu $\gamma < 90°$ skutečně platí jako ostrá nerovnost. Tím je nerovnost ze zadání úlohy dokázána; rovnost v ní nastane, právě když $a = b$.[4]

[4] I při tomto postupu lze odvodit obecnější závěry uvedené v Poznámce 1 za prvním řešením.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Nejprve uvažte, jak k danému trojúhelníku ABC, ve kterém platí $a > b$ a $\gamma < 90°$, vhodně přikreslit trojúhelník s dvěma stranami a, b, které by svíraly úhel $\alpha-\beta$. Označte d délku třetí strany takového trojúhelníku a ukažte, že nerovnost ze zadání soutěžní úlohy je ekvivalentní s nerovností $(a^2 - b^2)^2 \leqq (a^2 + b^2)^2 d^2$. Tu pak dokažte tak, že do levé strany dosadíte vyjádření přepon a, b ve vhodných pravoúhlých trojúhelnících pomocí Pythagorovy věty. [Celý postup je podrobně popsán v celkově třetím řešení soutěžní úlohy.]

N2. Pro obecný trojúhelník ABC dokažte tzv. Mollweidův vzorec

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma},$$

s jehož pomocí lze rovněž vyřešit zadanou soutěžní úlohu. [Mollweidův vzorec je triviální v případě $a = b$; v případě $a > b$ užijte sinovou větu pro trojúhelník ABF, kde F je bod vybraný na prodloužení strany CA za bod A tak, že platí $|AF| = a - b$; případ $a < b$ lze převést na předchozí záměnou stran a a b. Řešení soutěžní úlohy pomocí Mollweidova vzorce je v našem textu uvedeno jako poslední.]

D1. Pro obecný trojúhelník ABC dokažte rovnost

$$2ab - (a^2 + b^2)\cos\gamma = c^2\cos(\alpha-\beta).$$

[S využitím rovnosti $a^2 + b^2 = c^2 + 2ab\cos\gamma$ lze dokazovaný vzorec upravit do tvaru $2ab\sin^2\gamma = c^2(\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma)$. Ukažte dále, že platí $\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta$, a pak využijte, že rovnost $ab\sin^2\gamma = c^2\sin\alpha\sin\beta$ je důsledek sinové věty.]

D2. Pro obecný trojúhelník ABC dokažte druhý Mollweidův vzorec

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma},$$

který spolu s prvním Mollweidovým vzorcem z úlohy N2 vede k rovnosti

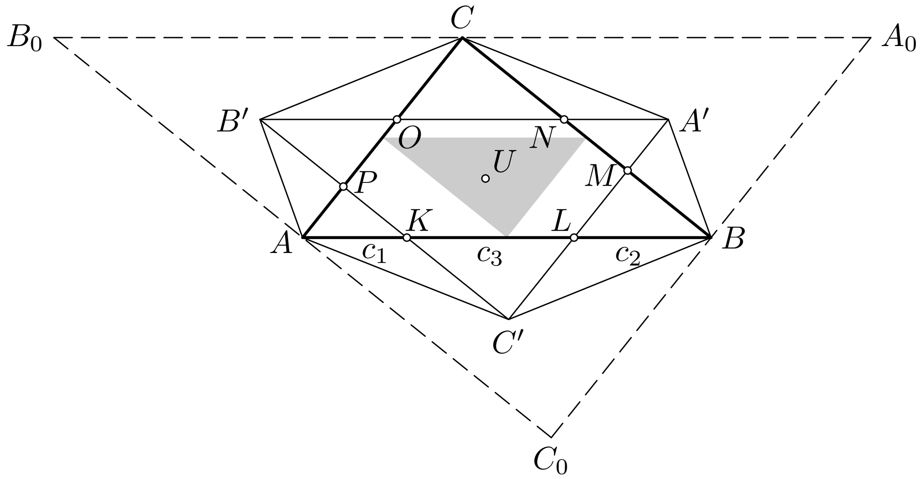
$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

označované spolu s dalšími dvěma analogickými rovnostmi pro dvojice stran a, c a b, c jako tangentová věta pro trojúhelník ABC. [Užijte sinovou větu pro trojúhelník ABG, kde bod G leží na prodloužení strany BC za bod C tak, že $|BG| = a + b$. K odvození tangentové věty porovnejte podíl levých a podíl pravých stran obou Mollweidových vzorců a k tomu uvažte, že $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha+\beta) = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\gamma$.]

2. Je dán trojúhelník ABC s obsahem S. Uvnitř trojúhelníku, jehož vrcholy jsou ve středech stran trojúhelníku ABC, je libovolně zvolen bod U. Označme A', B', C' po řadě obrazy bodů A, B, C v souměrnosti se středem U. Dokažte, že šestiúhelník $AC'BA'CB'$ má obsah $2S$.

2. Označme T trojúhelník s vrcholy ve středech stran BC, CA, AB daného trojúhelníku ABC. Obsah trojúhelníku XYZ budeme značit symbolem S_{XYZ}.

Protože body A', B', C' jsou zároveň obrazy bodu U ve stejnolehlostech se středy v odpovídajících vrcholech trojúhelníku ABC a koeficientem 2, plyne z předpokladu úlohy, že body A', B', C' leží postupně uvnitř trojúhelníků A_0CB, CB_0A a BAC_0 (to jsou obrazy trojúhelníku T v uvedených stejnolehlostech, na obr. 1 je T vyznačen šedou barvou). Hranice trojúhelníku $A'B'C'$ tudíž protne strany AB, BC, CA postupně v jejich vnitřních bodech K, L, M, N, O, P.



Obr. 1

Protože trojúhelník $A'B'C'$ je obrazem trojúhelníku ABC ve středové souměrnosti podle středu U, jsou navzájem si odpovídající strany rovnoběžné a v téže souměrnosti si odpovídají dvojice bodů K a N, L a O i M a P. Proto podle věty *uu* je každý z trojúhelníků AKP, LBM, ONC podobný trojúhelníku ABC. Označme k_1, k_2, k_3 koeficienty podobností, jež zobrazí trojúhelník ABC postupně na trojúhelníky AKP, LBM, ONC. Obrazy trojúhelníků AKP, LBM, ONC ve středové souměrnosti se středem U jsou po řadě trojúhelníky $A'NM$, $OB'P$, LKC'. Ty jsou rovněž podobné trojúhelníku ABC, přičemž odpovídající koeficienty podobností, které na ně převedou trojúhelník ABC, jsou opět k_1, k_2, k_3. Označíme-li c délku strany AB, platí pro délky úseků na straně AB

$$c_1 = |AK| = k_1 c, \quad c_2 = |LB| = k_2 c, \quad c_3 = |KL| = k_3 c,$$

takže

$$c = c_1 + c_2 + c_3 = k_1 c + k_2 c + k_3 c = (k_1 + k_2 + k_3)c \quad \text{neboli} \quad k_1 + k_2 + k_3 = 1.$$

Z podobnosti trojúhelníků ABC a LKC' dále plyne, že velikost výšky z vrcholu C' ke straně AB v trojúhelníku ABC' je rovna $k_3 v_c$, kde v_c je velikost výšky z vrcholu C v trojúhelníku ABC. Je tudíž

$$S_{ABC'} = \frac{1}{2} c \cdot k_3 v_c = k_3 \Big(\frac{1}{2} c v_c \Big) = k_3 S.$$

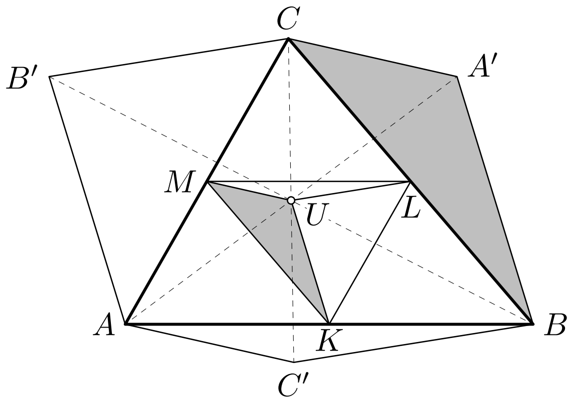
Analogicky $S_{BCA'} = k_1 S$ a $S_{CAB'} = k_2 S$. Pro obsah S' šestiúhelníku $AC'BA'CB'$ tak platí

$$S' = S_{ABC} + S_{BCA'} + S_{CAB'} + S_{ABC'} = (1 + k_1 + k_2 + k_3)S = 2S.$$

Jiné řešení. Označme K, L, M středy stran AB, BC, CA. Stejnolehlost se středem A a koeficientem 2 zobrazí trojúhelník MKU na trojúhelník CBA' (obr. 2), proto $S_{CBA'} = 4 \cdot S_{MKU}$. Podobně $S_{ACB'} = 4 \cdot S_{KLU}$ a $S_{BAC'} = 4 \cdot S_{LMU}$. Odtud

$$S_{CBA'} + S_{ACB'} + S_{BAC'} = 4 \cdot S_{KLM} = S,$$

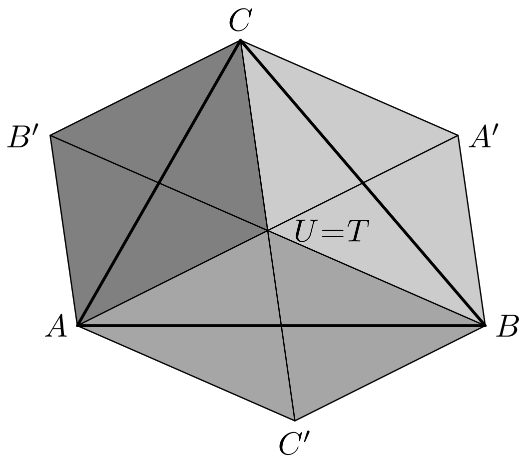
takže šestiúhelník $AC'BA'CB'$ má obsah $2S$.



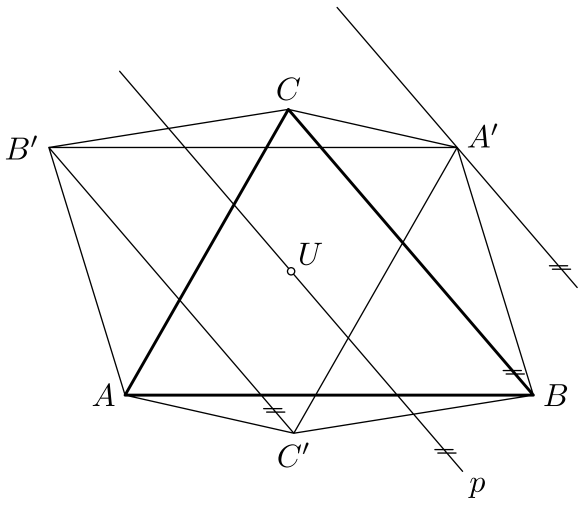
Obr. 2

Jiné řešení. Je-li bod U totožný s těžištěm T trojúhelníku ABC ($U = T$), je tvrzení úlohy splněno, neboť $S_{A'BC} = S_{TBC}$, $S_{B'CA} = S_{TCA}$ a $S_{C'AB} = S_{TAB}$ (obr. 3).

Předpokládejme nyní, že se bod U pohybuje uvnitř trojúhelníku T po přímce p rovnoběžné se stranou BC, a ukažme, že se obsah šestiúhelníku $AC'BA'CB'$ nemění. Body A', B' a C' leží totiž na rovnoběžkách s přímkou p, a proto se nemění obsah trojúhelníku $A'BC$ ani obsahy rovnoběžníku $BCB'C'$ a trojúhelníku $B'C'A$ (obr. 4). Obsah šestiúhelníku $AC'BA'CB'$ tedy na poloze bodu U na přímce p nezávisí. Podobně lze ukázat, že se obsah šestiúhelníku $AC'BA'CB'$ nemění, pohybuje-li se bod U po rovnoběžce se stranou AC.



Obr. 3



Obr. 4

Libovolný vnitřní bod U trojúhelníku T přitom získáme jako obraz těžiště T trojúhelníku ABC v zobrazení složeném ze dvou posunutí, a to z posunutí ve směru rovnoběžném se stranou BC a z posunutí ve směru rovnoběžném se stranou AC. Proto pro každý bod U uvnitř trojúhelníku T má šestiúhelník $AC'BA'CB'$ stejný obsah jako šestiúhelník odpovídající bodu $U = T$, tedy obsah $2S$, jak jsme chtěli dokázat.

Jiné řešení. Označme U' libovolný vnitřní bod trojúhelníku ABC. Protože obsah zkoumaného šestiúhelníku je roven součtu obsahů tří čtyřúhelníků $AC'BU'$, $BA'CU'$ a $CB'AU'$, bude tvrzení úlohy zřejmě platit, dokážeme-li bod U' vybrat tak, aby všechny tři zmíněné čtyřúhelníky byly rovnoběžníky. Protože

$$U = \frac{A + A'}{2} = \frac{B + B'}{2} = \frac{C + C'}{2},$$

mají body A', B', C' vyjádření

$$A' = 2U - A, \quad B' = 2U - B, \quad C' = 2U - C,$$

takže potřebné rovnosti

$$\frac{A + B}{2} = \frac{C' + U'}{2}, \quad \frac{B + C}{2} = \frac{A' + U'}{2}, \quad \frac{C + A}{2} = \frac{B' + U'}{2}$$

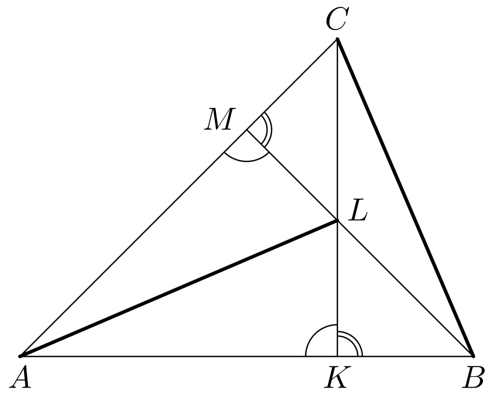
budou splněny, právě když bod U' bude mít vyjádření $U' = A + B + C - 2U$ neboli $U' = 3T - 2U$, kde $T = \frac{1}{3}(A + B + C)$ je těžiště trojúhelníku ABC. Odvozená rovnost zapsaná ve tvaru $U' - T = 2(T - U)$ znamená, že kýžený bod U' je určen jako obraz bodu U ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem -2. V ní je ovšem obrazem trojúhelníku T výchozí trojúhelník ABC, takže vnitřní bod U trojúhelníku T se skutečně zobrazí na vnitřní bod U' trojúhelníku ABC, jak jsme potřebovali dokázat.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za uvedení (a zdůvodnění) jakýchkoliv částečných výsledků, které vedou k úplnému řešení úlohy, udělte v součtu nejvýše 4 body.

1. *Určete velikosti vnitřních úhlů všech trojúhelníků ABC s vlastností: Uvnitř stran AB, AC existují po řadě body K, M, které s průsečíkem L přímek MB a KC tvoří tětivové čtyřúhelníky $AKLM$ a $KBCM$ se shodnými opsanými kružnicemi.*

(Jaroslav Švrček)

Řešení. Čtyřúhelník $KBCM$ je tětivový, právě když $|\sphericalangle CMB| = |\sphericalangle CKB|$ neboli $|\sphericalangle AKL| = |\sphericalangle AML|$ (obr. 1). Přitom čtyřúhelník $AKLM$ je tětivový, právě když $|\sphericalangle AKL| + |\sphericalangle AML| = 180°$. Ve zkoumaném případě proto musí být všechny čtyři zmíněné úhly pravé, K a M jsou tak paty výšek v trojúhelníku ABC, který je tudíž ostroúhlý, a bod L je průsečíkem jeho výšek. Kružnice opsaná čtyřúhelníku $KBCM$ je Thaletovou kružnicí nad průměrem BC a kružnice opsaná čtyřúhelníku $AKLM$ je Thaletovou kružnicí nad průměrem AL.



Obr. 1

Kružnice opsané uvedeným čtyřúhelníkům jsou shodné, právě když jsou shodné jejich průměry BC a AL. Označme velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC obvyklým způsobem α, β, γ. Pravoúhlé trojúhelníky CKB a AKL jsou podobné, protože pro jejich úhly při odpovídajících vrcholech C a A platí $|\sphericalangle BAL| = |\sphericalangle BCK| = 90° - \beta$. Zřejmě proto platí $|BC| = |AL|$, právě když $|AK| = |CK|$, tedy AKC je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník.

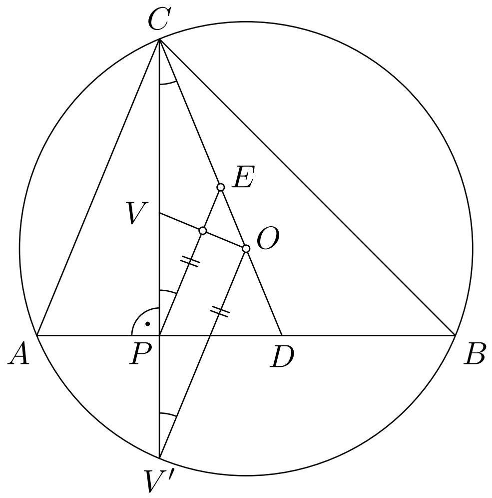
Vidíme, že trojúhelník ABC vyhovuje podmínkám úlohy, právě když je ostroúhlý s úhlem $\alpha = 45°$. Pro *ostré* úhly β a γ pak platí $\beta + \gamma = 135°$.

Závěr. Řešením jsou právě všechny trojice úhlů $(\alpha, \beta, \gamma) = (45°, 45° + \varphi, 90° - \varphi)$, kde $\varphi \in (0°, 45°)$.

5. *V ostroúhlém trojúhelníku ABC, který není rovnostranný, označme P patu výšky z vrcholu C na stranu AB, V průsečík výšek, O střed kružnice opsané, D průsečík polopřímky CO se stranou AB a E střed úsečky CD. Dokažte, že přímka EP prochází středem úsečky OV.* (Karel Horák)

Řešení. Je-li trojúhelník ABC rovnoramenný se základnou AB, leží celá úsečka OV na přímce EP a tvrzení platí triviálně. Můžeme tedy předpokládat, že $|AC| \neq |BC|$, takže přímky CV, CO jsou různé.

Jak známo, bod V' souměrně sdružený s průsečíkem výšek V podle strany AB uvažovaného trojúhelníku ABC leží na kružnici tomuto trojúhelníku opsané, proto je bod P středem úsečky VV' (obr. 4). Trojúhelník $CV'O$ je rovnoramenný s hlavním



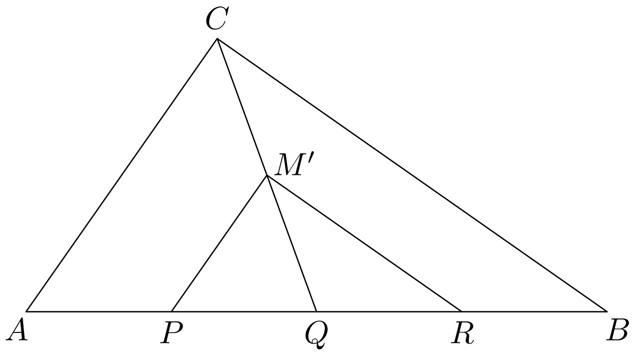
Obr. 4

vrcholem O, a protože střed E úsečky CD je současně středem kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku CPD s přeponou CD, je i trojúhelník CPE rovnoramenný. Oba rovnoramenné trojúhelníky $CV'O$ a CPE jsou přitom stejnolehlé (se středem stejnolehlosti v bodě C) — shodují se totiž ve společném úhlu při základně a body C, P, V' leží v přímce stejně jako body C, E, O. Je tudíž $PE \parallel V'O$.

Protože P je středem strany VV' trojúhelníku $V'OV$, leží na přímce PE střední příčka tohoto trojúhelníku, která je rovnoběžná s jeho stranou $V'O$. Přímka PE tedy protíná úsečku OV v jejím středu, což jsme chtěli dokázat.

2. Nechť P, Q, R jsou body přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC, pro něž platí $|AP| = |PQ| = |QR| = |RB| = \frac{1}{4}|AB|$. Dokažte, že průsečík M kružnic opsaných trojúhelníkům APC a BRC, který je různý od bodu C, splývá se středem S úsečky CQ.

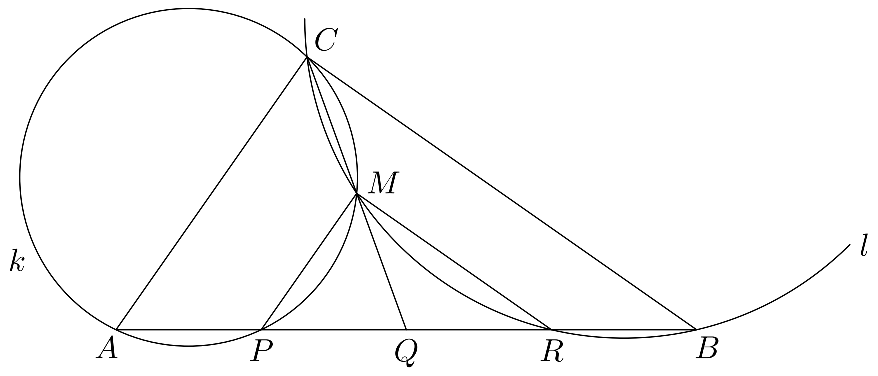
2. Označme M' střed úsečky CQ (obr. 1). Protože PM' a RM' jsou střední příčky trojúhelníků AQC a BQC, které jsou podle Thaletovy věty rovnoramenné se základnami AC a BC, jsou čtyřúhelníky $CAPM'$ a $CBRM'$ rovnoramenné lichoběžníky a jim opsané kružnice, jež se protínají v bodech C a M', jsou zároveň i opsanými kružnicemi uvažovaných trojúhelníků APC a BRC. Je tedy $M = M'$ a tvrzení úlohy je tím dokázáno.



Obr. 1

Jiné řešení. Označme c délku přepony AB daného pravoúhlého trojúhelníku ABC.

Kružnice opsané trojúhelníkům APC a BRC označme po řadě k, l (obr. 2). Vzhledem k tomu, že $|QP| \cdot |QA| = |QR| \cdot |QB| = \frac{1}{4}c \cdot \frac{1}{2}c$, má střed Q přepony AB stejnou mocnost $m = \frac{1}{4}c \cdot \frac{1}{2}c$ k oběma kružnicím k i l, a leží proto na jejich chordále CM. Navíc podle Thaletovy věty platí $|QC| = |QA| = \frac{1}{2}c$. Z rovnosti $|QM| \cdot |QC| = m$ tak plyne $|QM| = \frac{1}{4}c = \frac{1}{2}|QC|$, takže M je středem úsečky CQ.



Obr. 2

Za úplné vyřešení úlohy udělte 6 bodů. Za částečná pozorování, která vedou k řešení úlohy, udělte nejvýše 3 body.

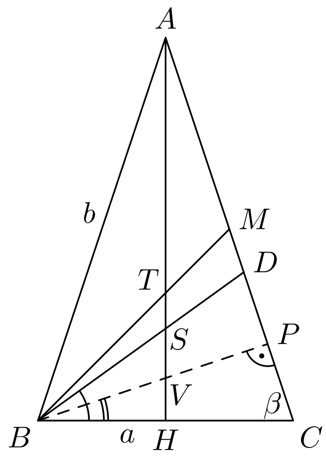
3. *Označme S střed kružnice vepsané, T těžiště a V průsečík výšek daného rovnoramenného trojúhelníku, který není rovnostranný.*

a) Dokažte, že bod S je vnitřním bodem úsečky TV.

b) Určete poměr délek stran daného trojúhelníku, je-li bod S středem úsečky TV.

ŘEŠENÍ. Označme vrcholy daného trojúhelníku písmeny A, B, C tak, aby BC byla jeho základna. Velikosti stran a úhlů trojúhelníku budeme označovat standardním způsobem, tj. $|BC| = a$, $|AC| = |AB| = b$, $\beta = \gamma = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Nechť H je střed základny BC.

a) Veďme vrcholem B výšku, osu úhlu a těžnici trojúhelníku ABC a jejich průsečíky s přímkou CA označme postupně P, D a M. Všechny tři leží na polopřímce CA (body D, M dokonce na úsečce CA). Zřejmě stačí dokázat, že bod D je vnitřním bodem úsečky MP. Rozebereme dva případy.



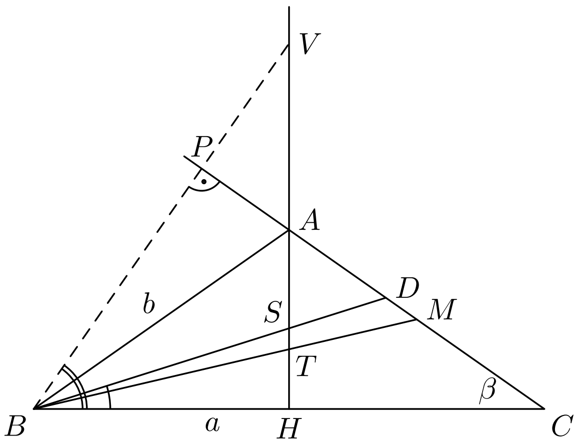
Obr. 4a

Jestliže $b > a$ (obr. 4a), je zřejmě $\beta > 60^\circ$. Odtud máme

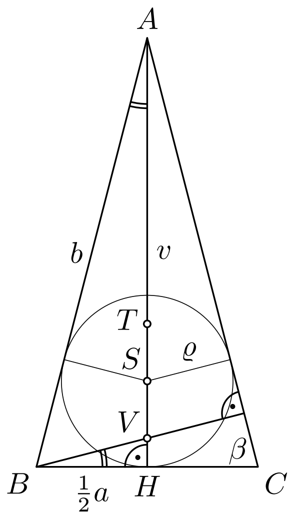
$$|\sphericalangle CBP| = 90^\circ - \beta < 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ < \tfrac{1}{2}\beta = |\sphericalangle CBD|,$$

takže $|CP| < |CD|$. Osa úhlu dělí stranu trojúhelníku v poměru přilehlých stran, proto $|CD|/|AD| = a/b < 1$, odkud $|CD| < \frac{1}{2}|CA| = |CM|$. Dohromady tedy $|CP| < |CD| < |CM|$, tedy bod D leží uvnitř úsečky MP.

Jestliže $a > b$ (obr. 4b), je $\beta < 60^\circ$ a analogicky dostáváme $|\sphericalangle CBP| = 90^\circ - \beta > 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ > \frac{1}{2}\beta = |\sphericalangle CBD|$, $|CD|/|AD| = a/b > 1$,



Obr. 4b



Obr. 5

takže $|CP| > |CD| > \frac{1}{2}|CA| = |CM|$, tedy i v tomto případě leží bod D uvnitř úsečky MP.

b) Nejdříve vyjádříme délky úseček TH, SH, VH pomocí délek stran trojúhelníku a pomocí délky v výšky AH (obr. 5), kterou ovšem dokážeme rovněž vyjádřit pomocí délek a, b, neboť z Pythagorovy věty v trojúhelníku ABH máme $v^2 = b^2 - \frac{1}{4}a^2$.

Těžiště T dělí těžnici AH v poměru $2:1$, takže $|TH| = \frac{1}{3}v$.

Úsečka SH je poloměrem ϱ vepsané kružnice a její délku vypočítáme ze známého vzorce $S_{ABC} = \varrho \cdot s$ pro obsah trojúhelníku ABC, kde s označuje polovinu jeho obvodu:

$$|SH| = \varrho = \frac{S_{ABC}}{s} = \frac{\frac{1}{2}av}{\frac{1}{2}(a+2b)} = \frac{av}{a+2b}.$$

Trojúhelníky BVH a ABH jsou podobné, protože jsou oba pravoúhlé a $|\sphericalangle VBH| = 90^\circ - \beta = \frac{1}{2}\alpha = |\sphericalangle BAH|$. Pro příslušné délky stran proto máme $|VH| : |BH| = |BH| : |AH|$, odkud

$$|VH| = \frac{|BH|^2}{|AH|} = \frac{a^2}{4v}.$$

Protože body S, T, V leží na polopřímce HA, je rovnost $|TS| = |SV|$ ekvivalentní rovnosti

$$|TH| + |VH| = 2|SH|,$$

takže dosazením za jednotlivé délky a využitím vztahu pro výšku v postupně (ekvivalentními úpravami) dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}v + \frac{a^2}{4v} &= \frac{2av}{a+2b},\\
4v^2(a+2b) + 3a^2(a+2b) &= 24av^2,\\
3a^2(a+2b) &= 4v^2(5a-2b),\\
3a^2(a+2b) &= 4(b^2 - \tfrac{1}{4}a^2)(5a-2b),\\
3a^2(a+2b) &= (2b+a)(2b-a)(5a-2b),\\
3a^2 &= 12ab - 5a^2 - 4b^2,\\
2a^2 - 3ab + b^2 &= 0,\\
(2a-b)(a-b) &= 0.
\end{aligned}$$

Protože podle zadání je $a \neq b$, je bod S středem úsečky TV, právě když $2a = b$, tedy právě když je poměr délek stran vyšetřovaného trojúhelníku roven $1 : 2 : 2$.

JINÉ ŘEŠENÍ. a) Protože S, T, V jsou vnitřní body polopřímky HA (body S, T jsou dokonce vnitřní body úsečky HA), stačí ukázat, že rozdíly $|HS| - |HT|$ a $|HV| - |HS|$ jsou nenulové a mají oba stejné znaménko.

Bez újmy na obecnosti nechť $a = 2$, tj. $|BH| = |HC| = 1$. Z pravoúhlých trojúhelníků BSH, BAH a BVH dostáváme

$$|HS| = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}, \quad |HT| = \frac{|HA|}{3} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{3} \quad \text{a} \quad |HV| = \operatorname{tg}(90^\circ - \beta) = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}.$$

Díky vztahu $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$ při označení $t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta$ máme

$$\begin{aligned} |HS| - |HT| &= t - \frac{2t}{3(1-t^2)} = \frac{t(1-3t^2)}{3(1-t^2)}, \\ |HV| - |HS| &= \frac{1-t^2}{2t} - t = \frac{1-3t^2}{2t}. \end{aligned}$$

Protože β je ostrý úhel různý od 60°, platí $\frac{1}{2}\beta \in (0^\circ, 45^\circ)$ a $\frac{1}{2}\beta \neq 30^\circ$, odkud pro hodnotu $t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta$ vyplývají vztahy $0 < t < 1$ a $3t^2 \neq 1$, takže oba zkoumané rozdíly jsou buď kladné (jestliže $\beta < 60^\circ$), anebo záporné (jestliže $\beta > 60^\circ$).

b) Podíl rozdílů z části a) má vyjádření

$$\frac{|HS| - |HT|}{|HV| - |HS|} = \frac{t(1-3t^2)}{3(1-t^2)} \cdot \frac{2t}{1-3t^2} = \frac{2t^2}{3(1-t^2)}.$$

Bod S je středem úsečky TV, právě když je uvedený podíl roven 1. Proto v oboru $(0, 1)$ řešíme rovnici

$$\frac{2t^2}{3(1-t^2)} = 1,$$

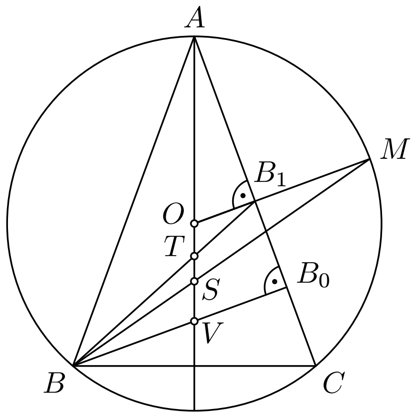
která tam zřejmě má jediný kořen

$$t = \sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \text{odkud} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{2t}{1-t^2} = \sqrt{15}.$$

V trojúhelníku BHA tedy kromě $|BH| = 1$ platí $|HA| = \operatorname{tg}\beta = \sqrt{15}$, takže podle Pythagorovy věty máme $|BA| = \sqrt{1 + 15} = 4$. Strany trojúhelníku ABC jsou proto v poměru $2 : 4 : 4$ neboli $1 : 2 : 2$.

JINÉ ŘEŠENÍ. a) Označme vrcholy daného trojúhelníku stejně jako v prvním řešení, dále O střed opsané kružnice, B_0 patu výšky z vrcholu B a B_1 střed strany AC. Protože osa úhlu při vrcholu B protíná oblouk CA opsané kružnice v jeho středu M (obr. 6), je zřejmé, že díky podmínce $O \neq V$ (jež je ekvivalentní s tím, že daný trojúhelník není rovnostranný) protne tato osa stranu AC uvnitř úsečky B_0B_1, a tudíž bod S leží uvnitř úsečky TV.

b) Využijeme známou vlastnost tří základních bodů trojúhelníku, těžiště T, středu O opsané kružnice a průsečíku V výšek. Uvedené tři body leží totiž v přímce v libovolném trojúhelníku, přičemž těžiště T vždy dělí úsečku OV v poměru $1 : 2$. Uvedená



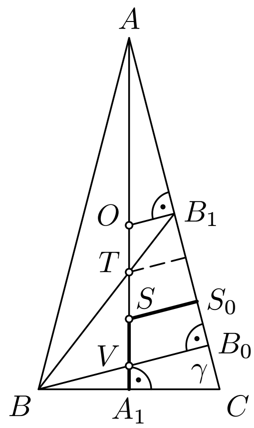
Obr. 6

vlastnost jednoduše plyne z toho, že trojúhelník $A_1B_1C_1$ tvořený středními příčkami daného trojúhelníku ABC je jeho obrazem ve stejnolehlosti se středem v těžišti a koeficientem $\frac{1}{2}$. A protože osa každé ze stran trojúhelníku ABC je zároveň výškou trojúhelníku $A_1B_1C_1$, je střed O kružnice opsané danému trojúhelníku ABC zároveň průsečíkem výšek trojúhelníku $A_1B_1C_1$, takže bod O je v uvedené stejnolehlosti obrazem bodu V a $|TO| = \frac{1}{2}|TV|$. Pokud tedy střed S kružnice vepsané trojúhelníku ABC půlí úsečku TV, dělí body T a S (v tomto pořadí) orientovanou úsečku OV na tři shodné části.

Pro kolmé průměty B_1, S_0 a B_0 bodů O, S a V na stranu AC (obr. 7) proto platí

$$CB_1 = CB_0 + 3(CS_0 - CB_0) = 3CS_0 - 2CB_0.$$

Budeme-li uvedenou rovnost chápat jako rovnost orientovaných úseček (nebo vektorů) na přímce CA, vyhneme se nutnosti rozlišovat, zda je úhel při vrcholu A větší či menší než $60°$, protože jak už víme, na pořadí zmíněných bodů to nemá vliv.



Obr. 7

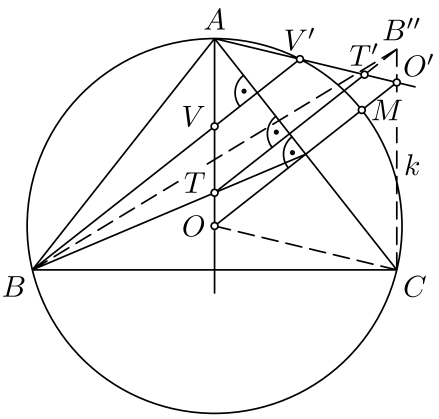
Do nalezené rovnosti teď můžeme dosadit $\frac{1}{2}b$ za CB_1, $\frac{1}{2}a$ za CS_0 ($|CS_0| = |CA_1|$ je délka úseků obou tečen z vrcholu C ke kružnici vepsané trojúhelníku ABC) a konečně ze dvou podobných pravoúhlých trojúhelníků BCB_0 a ACA_1 (shodují se ve společném úhlu BCA) vychází $CB_0 = \frac{1}{2}a^2/b$. Dostáváme tak

$$\frac{b}{2} = \frac{3a}{2} - \frac{a^2}{b} \quad \text{neboli} \quad b^2 - 3ab + 2a^2 = 0.$$

Poslední rovnost lze přepsat jako $(b-a)(b-2a)=0$, a protože $a\neq b$, musí být $b=2a$.

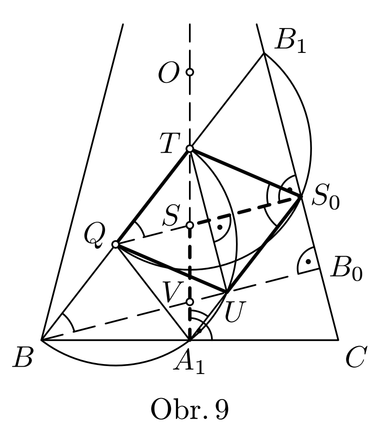
Jiné řešení. Část a) už nebudeme znovu dokazovat, použijeme stejný postup i označení jako v předchozím řešení.

b) Nejprve ukážeme, že v trojúhelníku, v němž je při vrcholu A úhel větší než $60°$, nemůže osa úhlu středem úsečky VT vůbec procházet. K tomu využijeme známou vlastnost průsečíku výšek: jeho obraz V' v osové souměrnosti podle strany AC leží na kružnici k trojúhelníku ABC opsané (obr. 8). Protože za uvedeného předpokladu leží body T a O (v tomto pořadí) na polopřímce AO až za bodem V, leží zřejmě obrazy T', O' bodů T, O v uvedené osové souměrnosti ve vnější oblasti kružnice k. V její vnější oblasti leží ovšem i obraz B'' vrcholu B ve středové souměrnosti podle středu úsečky VT: bod B'' je totiž průsečíkem polopřímek TT' a CO', protože CO' je zároveň kolmá na BC ($AOCO'$ je kosočtverec) a je tak obrazem přímky AO ve stejnolehlosti se středem B a koeficientem 2. Úhlopříčka BB'' rovnoběžníku $BTB''V$ (na níž leží těžnice trojúhelníku BTV) proto určitě protne kružnici k uvnitř pásu rovnoběžek BV a TT'. Osa úhlu při vrcholu B však protíná kružnici k ve středu M příslušného oblouku AC a přímka OM leží vně zmíněného pásu.



Obr. 8

Předpokládejme tedy, že v daném trojúhelníku je při vrcholu A úhel menší než $60°$ a že střed S vepsané kružnice půlí úsečku VT. Označme Q střed úsečky BT, S_0 bod dotyku vepsané kružnice se stranou AC a U patu kolmice z bodu T na výšku BV (obr. 9). Úsečky TU a QS_0 jsou zřejmě příčky trojúhelníku BB_0B_1 rovnoběžné s odpovídajícími stranami B_1B_0 a BB_0 ve dvoutřetinové vzdálenosti od protějších vrcholů. Je tedy



Obr. 9

také $US_0 \parallel QT$ (body U, S_0 totiž dělí orientované úsečky BB_0, resp. B_1B_0 ve stejném poměru $2:1$), a protože bod S_0 leží zřejmě na Thaletově kružnici s průměrem QB_1 a zároveň bod U leží na Thaletově kružnici s průměrem BT, je QUS_0T kosočtverec. Trojúhelník A_1S_0S je rovnoramenný a z rovnosti obvodových úhlů příslušných tětivě TU kružnice s průměrem BT plyne $|\sphericalangle TA_1U| = |\sphericalangle TBU| = |\sphericalangle QS_0U|$. Kdyby body A_1, U a S_0 neležely v přímce, průsečík U ramen A_1U, S_0U shodných úhlů SA_1U, SS_0U by ležel na ose souměrnosti úsečky A_1S_0, takže trojúhelník A_1US_0 by byl rovnoramenný. Protože však tětivě A_1U přísluší obvodový úhel A_1BU, pro jehož velikost dle předpokladu platí $90^\circ - \gamma < 30^\circ$, je délka této tětivy menší než poloměr příslušné kružnice neboli $|A_1U| < |QT| = |US_0|$. Vzhledem k uvedenému rozporu musí body A_1, U a S_0 ležet v přímce, takže A_1S_0 je střední příčkou trojúhelníku BCB_1. Trojúhelník A_1S_0C je rovnoramenný, proto je rovnoramenný i trojúhelník BB_1C. Odtud okamžitě plyne, že $b = 2a$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že v každém trojúhelníku dělí osa úhlu protilehlou stranu v poměru stran přilehlých. [Jestliže D je průsečík strany CA a osy úhlu CBA, lze poměr q obsahů trojúhelníků BCD a BAD vyjádřit dvěma způsoby: $q = |BC| : |BA|$ (výšky z vrcholu D mají stejnou velikost) a zároveň $q = |CD| : |AD|$ (výšky z vrcholu B splývají).]

N2. V rovnoramenném trojúhelníku se základnou délky a a rameny délky b vyjádřete velikost poloměru ϱ vepsané kružnice. [$\varrho = \frac{1}{2}a\sqrt{4b^2 - a^2}/(a+2b) = \frac{1}{2}a\sqrt{(2b-a)/(2b+a)}$]

N3. Dokažte platnost součtového vzorce $\operatorname{tg}(x+y) = (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)/(1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y)$.

D1. Na odvěsnách délek a, b pravoúhlého trojúhelníku leží postupně středy dvou kružnic k_a, k_b. Obě kružnice se dotýkají přepony a procházejí vrcholem proti přeponě. Poloměry uvedených kružnic označme ϱ_a, ϱ_b. Určete největší kladné číslo p takové, že nerovnost

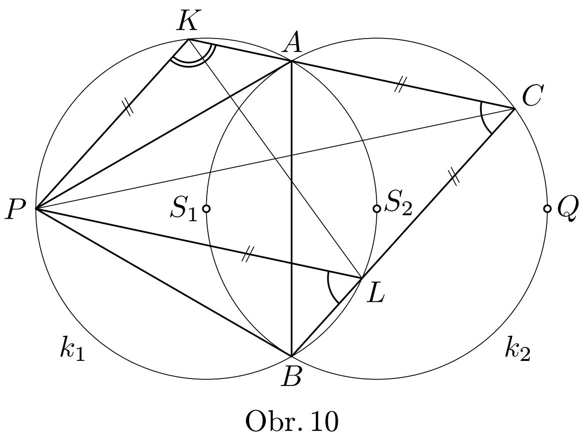
$$\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} \geqq p\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

platí pro všechny pravoúhlé trojúhelníky. [58–A–II–2]

5. *Jsou dány dvě shodné kružnice k_1, k_2 o poloměru rovném vzdálenosti jejich středů. Jejich průsečíky označme A a B. Na kružnici k_2 zvolme bod C tak, že úsečka BC protne kružnici k_1 v bodě různém od B, který označíme L. Přímka AC protne kružnici k_1 v bodě různém od A, který označíme K. Dokažte, že přímka, na níž leží těžnice z vrcholu C trojúhelníku KLC, prochází pevným bodem nezávislým na poloze bodu C.*

Řešení. Označme S_1, S_2 středy kružnic k_1, k_2. Nechť P je takový bod kružnice k_1, že PS_2 je jejím průměrem. Ukážeme, že hledaným pevným bodem je bod P, tj. dokážeme, že střed úsečky KL leží s body P, C na jedné přímce.

Označme Q bod souměrně sdružený s bodem S_1 podle středu S_2 kružnice k_2. To znamená, že S_1Q je průměrem kružnice k_2 a úhel S_1BQ je pravý, BQ je tudíž tečnou kružnice k_1. Vzhledem k podmínkám úlohy musíme bod C volit uvnitř kratšího oblouku AQ kružnice k_2. Z osové souměrnosti podle osy S_1S_2 je i PA tečnou kružnice k_1, proto je bod K vnitřním bodem kratšího oblouku PA kružnice k_1 (obr. 10).



Obr. 10

Protože kružnice mají stejné poloměry, jsou trojúhelníky S_1S_2A, S_1S_2B rovnostranné a velikost středového úhlu BS_1A je 120°. Příslušný obvodový úhel BPA má proto velikost 60°. Navíc body A, B jsou souměrně sdružené podle přímky PS_2, takže

$|PA| = |PB|$ a trojúhelník ABP je rovnostranný.[3] Všechny obvodové úhly nad shodnými tětivami PA, PB, AB mají tedy velikost 60° (jestliže vrchol leží na delším oblouku), resp. 120° (jestliže vrchol leží na kratším oblouku). U tětivy AB to platí i pro obvodové úhly na kružnici k_2, protože obě kružnice jsou shodné.

Z uvedeného dostáváme

$$|\sphericalangle ACB| = 60^\circ, \qquad |\sphericalangle PLB| = 60^\circ, \qquad |\sphericalangle PKA| = 120^\circ.$$

Z rovnosti prvých dvou úhlů plyne rovnoběžnost přímek PL a KC a z toho, že součet prvního a třetího úhlu je 180°, plyne rovnoběžnost přímek PK a LC. Čtyřúhelník $PLCK$ je tedy rovnoběžník, odkud už přímo plyne dokazované tvrzení (úhlopříčky rovnoběžníku se navzájem půlí, takže přímka PC prochází středem úsečky KL).

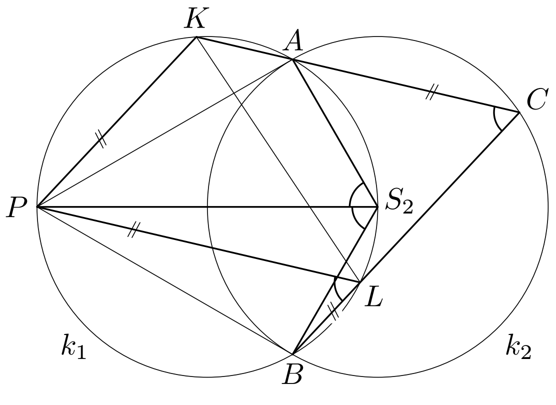
Jiné řešení. Označme body stejně jako v prvním řešení. Jediné, co potřebujeme dokázat, je, že $PLCK$ je rovnoběžník.

Body A, B jsou souměrně sdružené podle přímky PS_2, proto vzhledem k vlastnostem obvodových a středových úhlů platí (obr. 11)

$$|\sphericalangle PLB| = |\sphericalangle PS_2B| = \frac{1}{2}|\sphericalangle AS_2B| = |\sphericalangle ACB|$$

a odtud už plyne $PL \parallel KC$.

Čtyřúhelník $PLAK$ je tedy lichoběžník (pořadí jeho vrcholů je dáno tím, že bod K je vnitřním bodem kratšího oblouku AP, jak víme z prvního řešení), a protože je tětivový (je vepsán kružnici k_1), musí být rovnoramenný. Jeho úhlopříčky KL, PA jsou tedy shodné, a protože z výše zmíněné souměrnosti máme $|PA| = |PB|$, platí též $|KL| = |PB|$. Čtyřúhelník $KPBL$ je tětivový a jeho protilehlé strany KL, PB jsou shodné, takže to rovněž musí být rovnoramenný lichoběžník[4] (obr. 11). Odtud už dostáváme $PK \parallel LC$.



Obr. 11

Poznámka. Dané tvrzení platí, i když připustíme, že kružnice k_1, k_2 mají různé poloměry, přičemž S_2 leží na k_1; v druhém uvedeném řešení jsme totiž shodnost kružnic

[3] To ostatně plyne i z toho, že P, B, S_2, A jsou čtyři ze šesti vrcholů pravidelného šestiúhelníku vepsaného do k_1.

[4] Vyplývá to například z rovnosti obvodových úhlů PLB, KPL nad shodnými tětivami PB, KL, anebo jednoduše ze souměrnosti podle osy úsečky BL.

mlčky využili jen ke zjištění, na kterém z oblouků AP bod K bude ležet. Na další úvahy však poloha bodu K nemá podstatný vliv. Podobně lze rozborem několika případů ukázat, že tvrzení úlohy platí i v případě, kdy bod L na kružnici k_1 je určen jako její druhý průsečík s *přímkou* BC.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Dokažte, že každý tětivový lichoběžník je rovnoramenný. [Jestliže $PQRS$ je tětivový lichoběžník se základnou PQ, ze střídavých úhlů plyne $|\sphericalangle QPR| = |\sphericalangle SRP|$. Obvodové úhly nad tětivami QR, PS tedy mají stejnou velikost, a proto musejí být tětivy QR, PS shodné. Jiný způsob: Osa každé tětivy prochází středem kružnice, proto je osa strany PQ totožná s osou strany RS (jsou rovnoběžné a procházejí společným bodem) a podle této osy jsou úsečky PS, QR souměrně sdružené, tedy shodné.]

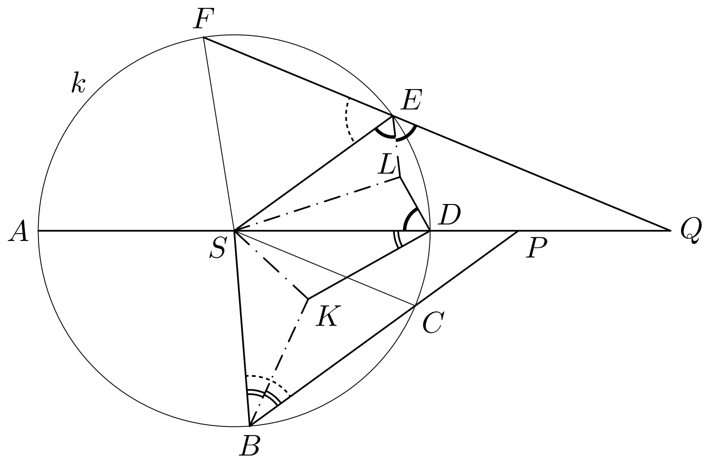
N2. Dokažte, že ve čtyřúhelníku se úhlopříčky navzájem půlí, právě když to je rovnoběžník. [Jestliže se v čtyřúhelníku $ABCD$ úhlopříčky půlí v bodě S, jsou trojúhelníky ABS, CDS shodné a ze střídavých úhlů $AB \parallel CD$, analogicky $BC \parallel AD$. Jestliže $ABCD$ je rovnoběžník s průsečíkem úhlopříček S, plyne ze střídavých úhlů shodnost trojúhelníků ABS, CDS, tj. shodnost úseček BS, SD, resp. AS, SC.]

D1. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Dokažte, že spojnice průsečíku výšek trojúhelníku ABC s průsečíkem výšek trojúhelníku ABD je rovnoběžná s přímkou CD. [58–A–I–2]

D2. Je dána kružnice k s tětivou AC, která není průměrem. Na její tečně vedené bodem A zvolíme bod $X \neq A$ a označíme D průsečík kružnice k s vnitřkem úsečky XC (pokud existuje). Trojúhelník ACD doplníme na lichoběžník $ABCD$ vepsaný do kružnice k. Určete množinu průsečníků přímek BC a AD odpovídajících všem takovým lichoběžníkům. [59–A–III–4]

3. Označme k kružnici opsanou danému šestiúhelníku. Protože $AB \perp BD$, je k Thaletovou kružnicí nad průměrem AD a střed S úhlopříčky AD je zároveň středem kružnice k.

Dokážeme, že trojúhelník KLD má pravý úhel při vrcholu D. Velikost úhlu KDL je součtem velikostí úhlů KDS a LDS. Trojúhelníky KDS, KBS jsou shodné podle věty *sus*: stranu SK mají společnou, strany SD, SB jsou obě poloměry kružnice k a úhel při vrcholu S mají trojúhelníky shodný, neboť SK je osou úhlu BSP (obr. 1).



Obr. 1

Proto $|\sphericalangle KDS| = |\sphericalangle KBS|$. Odtud vzhledem k tomu, že BK je osou úhlu SBP, plyne $|\sphericalangle KDS| = \frac{1}{2}|\sphericalangle CBS|$.

Využijeme-li analogicky shodnost trojúhelníků LDS, LES, dostaneme $|\sphericalangle LDS| = \frac{1}{2}|\sphericalangle QES|$.

K dokončení řešení stačí využít zbývající předpoklad $|BC| = |EF|$. Díky němu jsou BCS, EFS shodné rovnoramenné trojúhelníky (délky jejich ramen jsou rovny poloměru kružnice k), je tedy $|\sphericalangle CBS| = |\sphericalangle FES|$. Spojením získaných rovností máme

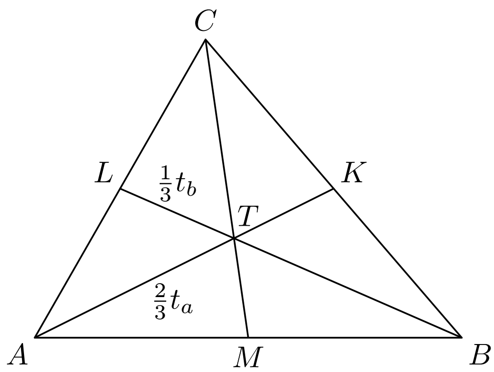
$$|\sphericalangle KDL| = |\sphericalangle KDS| + |\sphericalangle LDS| = \frac{1}{2}|\sphericalangle CBS| + \frac{1}{2}|\sphericalangle QES| = \\ = \frac{1}{2}|\sphericalangle FES| + \frac{1}{2}|\sphericalangle QES| = \frac{1}{2}(|\sphericalangle FES| + |\sphericalangle QES|) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Z toho 1 bod za zjištění, že AD je průměrem k; 3 body za odvození rovností $|\sphericalangle KDS| = \frac{1}{2}|\sphericalangle CBS|$, $|\sphericalangle LDS| = \frac{1}{2}|\sphericalangle QES|$ (jestliže má řešitel jen jednu z nich, dejte 2 body; jestliže ukáže jen $|\sphericalangle KDS| = |\sphericalangle KBS|$ nebo $|\sphericalangle LDS| = |\sphericalangle LES|$, dejte 1 bod); 2 body za rovnost $|\sphericalangle CBS| = |\sphericalangle FES|$ a úspěšné dokončení řešení.

2. *Zjistěte, jaký je největší možný obsah trojúhelníku ABC, jehož těžnice mají délky vyhovující nerovnostem $t_a \leqq 2$, $t_b \leqq 3$, $t_c \leqq 4$.* (Pavel Novotný)

Řešení. Označme T těžiště trojúhelníku ABC a K, L, M středy stran BC, CA, AB. Těžnice rozdělují trojúhelník ABC na šest menších trojúhelníků se stejným obsahem: Například trojúhelník AMT má stranu $|AM| = \frac{1}{2}c$ a jeho výška na stranu AM má velikost $\frac{1}{3}v_c$, takže $S_{AMT} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{3}v_c = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}c \cdot v_c = \frac{1}{6}S_{ABC}$, a stejný výsledek analogicky dostaneme i pro zbylých pět trojúhelníků.

Daná úloha je tedy ekvivalentní úloze určit největší možný obsah jednoho ze šesti menších trojúhelníků — výsledek stačí vynásobit šesti.



Obr. 1

Uvažujme například trojúhelník ATL (obr. 1). Pro jeho dvě strany platí

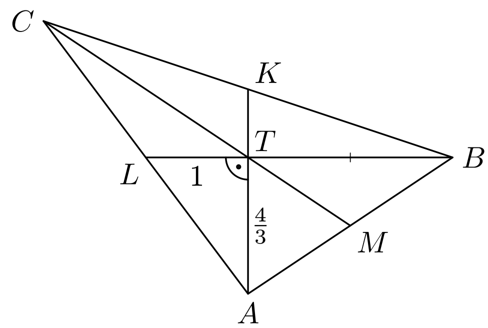
$$|AT| = \frac{2}{3}t_a \leqq \frac{4}{3}, \qquad |TL| = \frac{1}{3}t_b \leqq 1.$$

Proto pro jeho obsah dostáváme

$$S_{ATL} = \frac{1}{2}|AT| \cdot |TL| \cdot \sin|\sphericalangle ATL| \leqq \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

Tím jsme dokázali, že obsah trojúhelníku ABC, jehož těžnice splňují dané nerovnosti, nemůže být větší než $6 \cdot \frac{2}{3} = 4$. Přitom rovnost $S_{ATL} = \frac{2}{3}$ (tj. $S_{ABC} = 4$) nastane, právě když $t_a = 2$, $t_b = 3$ a $|\sphericalangle ATL| = 90°$.[1]

Trojúhelník ABC s těmito vlastnostmi dovedeme sestrojit: Nejdříve narýsujeme pravoúhlý trojúhelník ATL, v němž známe délky obou odvěsen $|AT| = \frac{4}{3}$, $|TL| = 1$, a následně sestrojíme bod C jako obraz bodu A ve středové souměrnosti se středem L a bod B jako obraz bodu L ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem -2 (obr. 2). Zbývá už jen ověřit, že v takovémto trojúhelníku ABC platí $t_c \leqq 4$.



Obr. 2

Délku t_c lze vypočítat různými způsoby. Například v pravoúhlém trojúhelníku ABT má přepona AB podle Pythagorovy věty délku

$$|AB| = \sqrt{|AT|^2 + |TB|^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + 4} = \sqrt{\frac{52}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{13},$$

takže velikost poloměru Thaletovy kružnice nad průměrem AB je

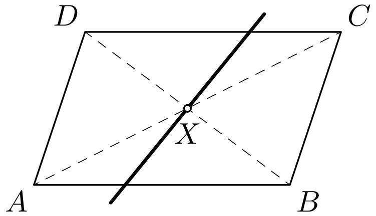
$$|MT| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{3}\sqrt{13}.$$

Odtud $t_c = 3|MT| = \sqrt{13} < 4$.[2]

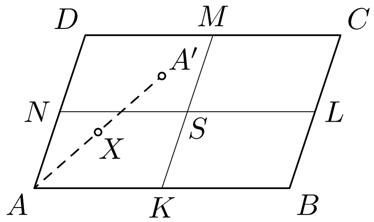
Odpověď. Největší možný obsah trojúhelníku ABC je 4.

4. *Uvnitř rovnoběžníku $ABCD$ je dán bod X. Sestrojte přímku, která prochází bodem X a rozděluje daný rovnoběžník na dvě části, jejichž obsahy se navzájem liší co nejvíce.* (Vojtech Bálint)

Řešení. Protože součet obsahů obou částí, na které přímka dělí rovnoběžník $ABCD$, je stále stejný, budou se nejvíce lišit, právě když menší z obsahů bude nejmenší možný. Řešení začneme pozorováním, že pokud je bod X středem rovnoběžníku $ABCD$, dělí každá přímka, která jím prochází, rovnoběžník na dvě části se stejným obsahem. Obě části jsou totiž v takovém případě shodné — jedna je obrazem druhé ve středové souměrnosti podle středu X (obr. 3). V tomto případě je každá přímka procházející bodem X řešením úlohy.



Obr. 3

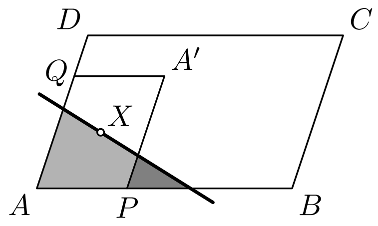


Obr. 4

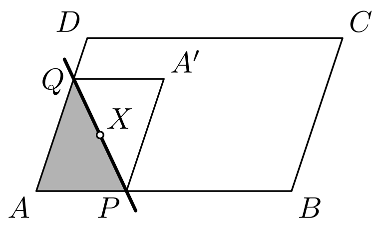
Středovou souměrnost využijeme i při obecné poloze bodu X. Označme postupně K, L, M, N středy stran AB, BC, CD, DA a S střed rovnoběžníku $ABCD$. Předpokládejme nejprve, že bod X leží uvnitř rovnoběžníku $AKSN$ (to znamená, že bod A', který je obrazem bodu A ve středové souměrnosti podle X, leží uvnitř rovnoběžníku $ABCD$, obr. 4).

Bodem A' veďme rovnoběžky se stranami rovnoběžníku a jejich průsečíky se stranami AB a AD označme P a Q. Čtyřúhelník $APA'Q$ je zřejmě rovnoběžník, jehož středem je bod X. Proto každá přímka procházející bodem X rozděluje $APA'Q$ na dva útvary stejného obsahu. Každý z těchto dvou útvarů přitom patří do jiné ze dvou částí, na něž uvedená přímka zároveň rozděluje rovnoběžník $ABCD$ (obr. 5a). To znamená, že ani jedna ze dvou částí rovnoběžníku $ABCD$ nemá obsah menší než polovina obsahu rovnoběžníku $APA'Q$. Nejmenšího obsahu menší části proto dosáhneme, když kromě útvaru pocházejícího z rovnoběžníku $APA'Q$ nebude tato část obsahovat už žádný jiný bod daného rovnoběžníku, což nastane právě v případě, kdy dělící přímkou bude přímka PQ (obr. 5b).

Jestliže bod X leží uvnitř rovnoběžníku $KBLS$, $SLCM$ či $NSMD$ (obr. 4), sestrojíme dělící přímku obdobným postupem: Pomocí obrazu bodu B, C či D ve středové



Obr. 5a

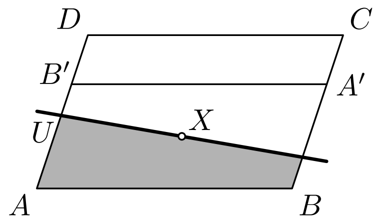


Obr. 5b

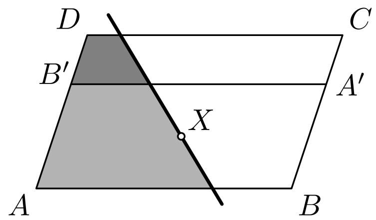
souměrnosti podle X sestrojíme menší rovnoběžník, který bude celý ležet uvnitř rovnoběžníku $ABCD$, bude mít střed X a dvě jeho strany budou ležet na stranách původního rovnoběžníku. Rozdělující přímkou pak musí být jedna z jeho úhlopříček, která oddělí jeho polovinu od zbytku rovnoběžníku $ABCD$.

Zbývá vyšetřit případ, kdy bod X leží uvnitř jedné z úseček KM, NL (mimo střed rovnoběžníku $ABCD$). I v této situaci umíme sestrojit menší rovnoběžník, který celý leží v rovnoběžníku $ABCD$, bod X je jeho středem a strany (tentokrát až tři) má na stranách původního rovnoběžníku.

Jestliže X leží uvnitř úsečky KS, je takovým rovnoběžníkem $ABA'B'$, přičemž A', B' jsou obrazy bodů A, B ve středové souměrnosti podle X. I v tomto případě musíme dělící přímku bodem X vést tak, aby jedna z částí rovnoběžníku $ABCD$ neobsahovala kromě útvaru pocházejícího z rovnoběžníku $ABA'B'$ nic jiného. Je zřejmé, že vyhovující bude právě každá přímka UX, kde U je libovolný bod úsečky AB' (obr. 6a, b).



Obr. 6a



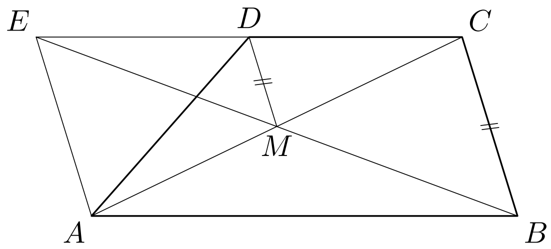
Obr. 6b

Analogicky najdeme dělící přímky v případě, že X leží uvnitř některé z úseček SM, NS či SL.

Závěr. Jestliže X je středem rovnoběžníku $ABCD$, je řešením libovolná přímka procházející bodem X. Jestliže X leží mimo úsečky KM, NL, je řešením jediná přímka. Jestliže X leží uvnitř některé z úseček KS, SM, NS, SL, je řešením nekonečně mnoho přímek. V každém z těchto případů je jejich konstrukce zřejmá z předešlých úvah.

2. V rovině uvažujme lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD a označme M střed jeho úhlopříčky AC. Dokažte, že platí: Mají-li trojúhelníky ABM a ACD stejné obsahy, jsou přímky DM a BC rovnoběžné.

2. Úsečka BM je těžnicí trojúhelníku ABC (obr. 1), dělí ho tedy na dva trojúhelníky se stejným obsahem. Podle zadání má jeden z těchto trojúhelníků stejný obsah jako trojúhelník ACD. Proto má trojúhelník ABC dvakrát větší obsah než trojúhelník ACD. Oba trojúhelníky mají přitom shodné výšky na strany AB resp. CD (shodné s výškou uvažovaného lichoběžníku). S ohledem na jejich obsahy tedy platí $|AB| = 2|CD|$.



Obr. 1

Na přímce CD uvažujme takový bod E, že D je středem úsečky CE. Z odvozené rovnosti $|AB| = 2|CD|$ plyne shodnost úseček CE a AB. Čtyřúhelník $ABCE$ je proto rovnoběžník a bod M (jako střed jeho úhlopříčky AC) je současně středem i jeho úhlopříčky BE. Úsečka DM je tedy střední příčkou trojúhelníku BCE, je tudíž rovnoběžná s jeho stranou BC, což jsme chtěli dokázat.

Poznámka. Rovnoběžnost přímek DM a BC lze obdobně dokázat využitím středu F základny AB uvažovaného lichoběžníku $ABCD$ (tím vznikne rovnoběžník $AFCD$).

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za pozorování, že trojúhelník ABC má oproti trojúhelníku ACD dvojnásobný obsah (či analogicky trojúhelníky AFM a CDM mají stejné obsahy), další 2 body za odvození rovnosti $|AB| = 2|CD|$ (anebo rovnosti $|AF| = |CD|$ plynoucí z toho, že trojúhelníky AFM a CDM mají shodné výšky z vrcholu M), 1 bod za objev rovnoběžníku $ABCE$ (anebo rovnoběžníku $AFCD$) a poslední bod za důkaz rovnoběžnosti DM, BC.

2. *Dvě kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ se vně dotýkají a leží ve čtverci $ABCD$ o straně a tak, že k_1 se dotýká stran AD a CD a k_2 se dotýká stran BC a CD. Dokažte, že aspoň jeden z trojúhelníků AS_1S_2, BS_1S_2 má obsah nejvýše $\frac{3}{16}\,a^2$.*

Řešení. Úsečky AS_2 a BS_1 leží na úhlopříčkách daného čtverce, jsou tedy navzájem kolmé a protínají se ve středu P čtverce. Platí

$$
\begin{aligned}
|DS_1| &= r_1 \cdot \sqrt{2}, \quad |BS_1| = (a - r_1)\sqrt{2}, \quad |PS_1| = \left(\frac{a}{2} - r_1\right)\sqrt{2},\\
|CS_2| &= r_2 \cdot \sqrt{2}, \quad |AS_2| = (a - r_2)\sqrt{2}, \quad |PS_2| = \left(\frac{a}{2} - r_2\right)\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Proto má trojúhelník AS_1S_2 obsah

$$S_{AS_1S_2} = \frac{1}{2}|AS_2| \cdot |PS_1| = (a - r_2)\left(\frac{a}{2} - r_1\right)$$

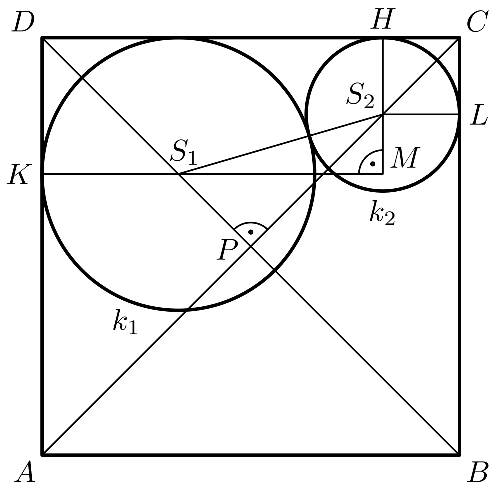
a trojúhelník BS_1S_2 obsah

$$S_{BS_1S_2} = \frac{1}{2}|BS_1| \cdot |PS_2| = (a - r_1)\left(\frac{a}{2} - r_2\right).$$

Součet obou obsahů je

$$S = (a - r_2)\left(\frac{a}{2} - r_1\right) + (a - r_1)\left(\frac{a}{2} - r_2\right) = a^2 - \frac{3}{2}a(r_1 + r_2) + 2r_1r_2.$$

Označme K bod dotyku kružnice k_1 se stranou AD, H a L body dotyku kružnice k_2 se stranami CD a BC a M průsečík přímek KS_1 a HS_2 (obr. 1).



Obr. 1

Podle Pythagorovy věty pro trojúhelník S_1MS_2 je

$$(a - r_1 - r_2)^2 + (r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2.$$

Odtud dostáváme

$$(a - r_1 - r_2)^2 = 4r_1r_2,$$
$$a - r_1 - r_2 = 2\sqrt{r_1r_2},$$
$$a = r_1 + r_2 + 2\sqrt{r_1r_2} = \left(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}\right)^2 \geqq 4\sqrt{r_1r_2}$$

čili

$$r_1r_2 \leqq \frac{a^2}{16}.$$

Délka úsečky DC zřejmě nemůže být větší než délka lomené čáry KS_1S_2L, takže

$$2r_1 + 2r_2 \geqq a.$$

(To vyplývá i z rovnosti $a = r_1+r_2+2\sqrt{r_1r_2}$, protože podle AG-nerovnosti je $2\sqrt{r_1r_2} \leqq$ $\leqq r_1 + r_2$.) Proto

$$S = a^2 - \frac{3}{2}a(r_1 + r_2) + 2r_1r_2 \leqq a^2 - \frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{8}a^2 = \frac{3}{8}a^2.$$

To znamená, že aspoň jeden z obsahů $S_{AS_1S_2}$, $S_{BS_1S_2}$ je nejvýše $\frac{3}{16}a^2$.

Jiné řešení. Můžeme položit $a = 1$. Rozdíl obsahů trojúhelníků AS_1S_2 a BS_1S_2 je (podle vyjádření z původního řešení)

$$S_{AS_1S_2} - S_{BS_1S_2} = (1 - r_2)\left(\frac{1}{2} - r_1\right) - (1 - r_1)\left(\frac{1}{2} - r_2\right) = \frac{1}{2}(r_2 - r_1).$$

Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $r_1 \geqq r_2$. Potom $S_{AS_1S_2} \leqq S_{BS_1S_2}$. Počítejme tedy obsah trojúhelníku AS_1S_2. Podle Pythagorovy věty je $(1 - r_1 - r_2)^2 + (r_1 - r_2)^2 =$ $= (r_1 + r_2)^2$, odtud $\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} = 1$, takže $r_2 = \left(1 - \sqrt{r_1}\right)^2$. Označme $x = \sqrt{r_1}$.

Z nerovností $r_1+r_2 \geqq \frac{1}{2}$ a $r_1 \geqq r_2$ vyplývá $r_1 \geqq \frac{1}{4}$ a z druhé strany platí $r_1 \leqq \frac{1}{2}$, protože kružnice k_1 leží ve čtverci $ABCD$. Odtud plyne $\frac{1}{2} \leqq x \leqq \sqrt{\frac{1}{2}}$. Obsah trojúhelníku AS_1S_2 je

$$S_{AS_1S_2} = (1-r_2)\left(\frac{1}{2}-r_1\right) = \frac{1}{2} - r_1 - \frac{r_2}{2} + r_1r_2 =$$
$$= \frac{1}{2} - x^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2 + x^2(1-x)^2 = x^4 - 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x;$$
$$S_{AS_1S_2} - \frac{3}{16} = x^4 - 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{16} = \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{8}\right) =$$
$$= \left(x-\frac{1}{2}\right)\left[x^2\left(x-\frac{3}{2}\right) - \frac{5}{4}\left(x - \frac{3}{10}\right)\right] \leqq 0$$

díky tomu, že $\frac{3}{10} < \frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}\sqrt{2} < \frac{3}{2}$. Proto $S_{AS_1S_2} \leqq \frac{3}{16}$.

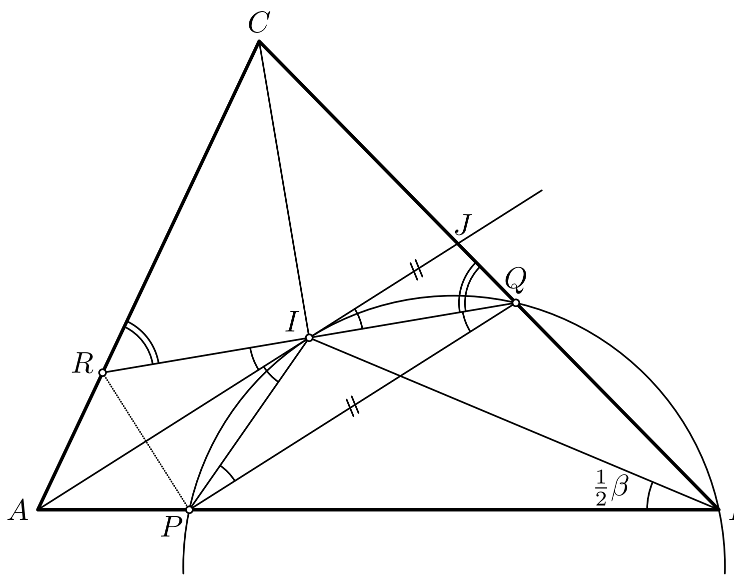
Návodné a doplňující úlohy:

1. Dokažte, že pro poloměry r_1, r_2 platí nerovnost $r_1+r_2 \geqq \frac{1}{2}a$ a rovnost $\sqrt{r_1}+\sqrt{r_2} = \sqrt{a}$.
2. Označme G ten bod střední příčky čtverce $ABCD$ rovnoběžné se stranou AD, jehož vzdálenost od strany AB je trojnásobkem vzdálenosti od strany CD. Dokažte, že G leží ve vnitřní oblasti kružnice k_1, právě když $r_1 > \frac{1}{4}a$.
3. Dokažte, že nemohou současně platit nerovnosti $r_1 > \frac{1}{4}a$ a $r_2 > \frac{1}{4}a$.
4. Dokažte, že obsah trojúhelníku AS_1S_2 je menší než obsah trojúhelníku BS_1S_2, právě když $r_1 > r_2$.
5. Dokažte, že aspoň jeden z trojúhelníků AS_1S_2, BS_1S_2 má obsah nejméně $\frac{3}{16}a^2$.
6. Je dána kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a kružnice $k_2(S_2, r_2)$, kde $r_2 < r_1$. Tyto kružnice mají vnitřní dotyk v bodě A. Sestrojte kružnici k_3, která má vnitřní dotyk s kružnicí k_1, vnější dotyk s kružnicí k_2 a dotýká se přímky AS_1. [15–A–II–3]
7. Dvě kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ se vně dotýkají a leží ve čtverci $ABCD$ o straně a tak, že k_1 se dotýká stran AD a CD a k_2 se dotýká stran BC a AB. Vypočítejte obsah trojúhelníku AS_1S_2. [$\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)a^2$]

5. *Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Kružnice, která prochází vrcholem B a dotýká se přímky AI v bodě I, protíná strany AB, BC postupně v bodech P, Q. Průsečík přímky QI se stranou AC označme R. Dokažte, že platí*

$$|AR| \cdot |BQ| = |PI|^2.$$

Řešení. Označme α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC při vrcholech A, B, C a J průsečík přímky AI se stranou BC (obr. 2). Úhel PBI je obvodový úhel příslušný k tětivě PI a úhel QBI je obvodový úhel příslušný k tětivě IQ. Protože oba tyto obvodové úhly mají stejnou velikost $\frac{1}{2}\beta$, mají úsečky PI a IQ stejnou délku.



Obr. 2

Úsekový úhel JIQ je shodný s obvodovým úhlem QBI, jeho velikost je proto $\frac{1}{2}\beta$. Ze shodnosti vrcholových úhlů potom vyplývá $|\sphericalangle RIA| = \frac{1}{2}\beta$. Stejnou velikost má i úsekový úhel PIA, jenž je shodný s obvodovým úhlem PBI. Dále platí $|\sphericalangle RAI| = |\sphericalangle PAI| = \frac{1}{2}\alpha$. Podle věty *usu* jsou trojúhelníky RIA a PIA shodné, a proto $|RI| = |PI|$.

Úhel QIB má tedy velikost

$$|\sphericalangle QIB| = 180^\circ - |\sphericalangle AIB| - |\sphericalangle JIQ| = 180^\circ - \left(90^\circ + \frac{\gamma}{2}\right) - \frac{\beta}{2} =$$
$$= 90^\circ - \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\alpha}{2} = |\sphericalangle RAI|.$$

Velikost úhlu QIB se dá určit i následovně: Podle věty o úsekovém úhlu platí $|\sphericalangle AIP| = \frac{1}{2}\beta = |\sphericalangle IPQ|$. Ze shodnosti střídavých úhlů vyplývá $AI \parallel PQ$. Odtud $|\sphericalangle QPB| = |\sphericalangle IAB| = \frac{1}{2}\alpha$ a ze shodnosti obvodových úhlů máme $|\sphericalangle QIB| = \frac{1}{2}\alpha$.

Ze shodnosti úhlů $|\sphericalangle QIB| = |\sphericalangle RAI|$ a $|\sphericalangle QBI| = |\sphericalangle RIA|$ vyplývá podobnost trojúhelníků $AIR \sim IBQ$ neboli $|AR|/|RI| = |IQ|/|QB|$, takže

$$|AR| \cdot |QB| = |RI| \cdot |IQ| = |PI|^2.$$

K důkazu podobnosti trojúhelníků AIR a IBQ může posloužit i rovnoramennost trojúhelníku CRQ, v němž je totiž osa úhlu současně těžnicí.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dokažte, že v dané situaci platí:
   a) $|\sphericalangle JIQ| = |\sphericalangle RIA| = |\sphericalangle PIA| = |\sphericalangle IPQ| = |\sphericalangle PBI| = |\sphericalangle QBI| = \frac{1}{2}\beta$;
   b) $PQ \parallel AI$;
   c) $|\sphericalangle QIB| = |\sphericalangle QPB| = |\sphericalangle IAP| = |\sphericalangle RAI| = \frac{1}{2}\alpha$;
   d) $|CR| = |CQ|$;
   e) $|\sphericalangle BQR| = |\sphericalangle ARQ| = 90° + \frac{1}{2}\gamma$.
2. Do kružnice k je vepsán čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčka BD není průměrem. Dokažte, že průsečík přímek, které se kružnice k dotýkají v bodech B a D, leží na přímce AC, právě když platí $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$. [51–A–II–3]
3. Je dán rovnoběžník $ABCD$ s tupým úhlem ABC. Na jeho úhlopříčce AC v polorovině BDC zvolme bod P tak, aby platilo $|\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle ABC|$. Dokažte, že přímka CD je tečnou kružnice opsané trojúhelníku BCP, právě když úsečky AB a BD jsou shodné. [59–A–II–2]
4. Nechť M je libovolný vnitřní bod přepony AB pravoúhlého trojúhelníku ABC. Označme S, S_1, S_2 středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům ABC, AMC, BMC.
   a) Dokažte, že body M, C, S_1, S_2 a S leží na jedné kružnici.
   b) Pro kterou polohu bodu M má tato kružnice nejmenší poloměr? [56–A–II–3]
5. Nechť L je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku kružnice opsané čtverci $ABCD$. Označme K průsečík přímek AL a CD, M průsečík přímek AD a CL a N průsečík přímek MK a BC. Dokažte, že body B, L, M, N leží na jedné kružnici. [53–A–III–5]

3. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB a odvěsnami délek $|AC| = 4$ a $|BC| = 3$ leží navzájem se dotýkající kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ tak, že k_1 se dotýká stran AB a AC a k_2 se dotýká stran AB a BC. Určete poloměry r_1 a r_2, jestliže platí $4r_1 = 9r_2$.

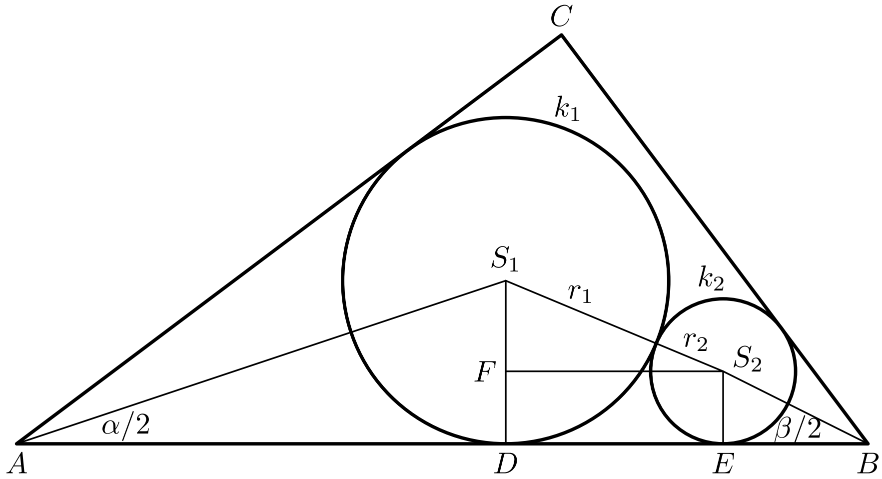
3. Přepona AB má podle Pythagorovy věty délku $|AB| = 5$. Při obvyklém označení velikostí úhlů a stran proto platí $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$,

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = 3,$$
$$\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\beta}{1-\cos\beta}} = 2.$$

Protože podle zadání leží obě kružnice k_1, k_2 celé v trojúhelníku ABC, musejí mít vnější dotyk — kdyby měly vnitřní dotyk (v bodě přepony), byla by větší kružnice proťata odvěsnou dotýkající se menší kružnice. Označme D a E dotykové body kružnic k_1 a k_2 se stranou AB a F kolmý průmět bodu S_2 na úsečku S_1D (obr. 1, podle předpokladu je $r_1 > r_2$). Podle Pythagorovy věty pro trojúhelník FS_2S_1 platí

$$(r_1 + r_2)^2 = (r_1 - r_2)^2 + |DE|^2,$$

odtud $|DE| = 2 \cdot \sqrt{r_1 r_2}$.



Obr. 1

Z rovnosti $|AB| = |AD| + |DE| + |EB|$ máme

$$c = r_1 \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + 2 \cdot \sqrt{r_1 r_2} + r_2 \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} = 3r_1 + 2 \cdot \sqrt{r_1 r_2} + 2r_2,$$

a protože $r_1 = \frac{9}{4} r_2$, dostáváme

$$\frac{27}{4} r_2 + 3r_2 + 2r_2 = 5,$$

a tedy

$$r_2 = \frac{20}{47}, \quad r_1 = \frac{45}{47}.$$

Poznámka. Obě kružnice s určenými poloměry skutečně leží v trojúhelníku ABC, neboť kružnice mu vepsaná má poloměr $\varrho = ab/(a + b + c) = 1$, zatímco obě hodnoty r_1, r_2 jsou menší než 1.

Jinou možnost, jak vypočítat hodnotu $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha$, poskytuje pravoúhlý trojúhelník ATS, kde S je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a T bod dotyku této kružnice se stranou AB. Platí

$$\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = \frac{|AT|}{|ST|} = \frac{b + c - a}{2\varrho} = 3;$$

podobně

$$\operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} = \frac{a + c - b}{2\varrho} = 2.$$

A další možnost: V pravoúhlém trojúhelníku XCB s odvěsnami délek $|XC| = c+b$, $|CB| = a$ má úhel BXC velikost $\frac{1}{2}\alpha$ (při umístění bodu X na polopřímku CA totiž vznikne rovnoramenný trojúhelník XBA), a proto

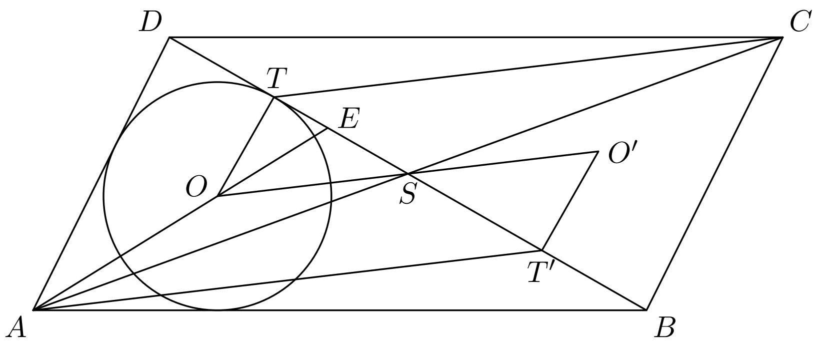
$$\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} = \frac{c + b}{a} \quad \text{a podobně} \quad \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2} = \frac{c + a}{b}.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Dejte jeden bod za vyjádření $|DE| = 2 \cdot \sqrt{r_1 r_2}$, jeden bod za rovnosti $|AD| = r_1 \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha$, $|BE| = r_2 \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\beta$, dva body za výpočet hodnot $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha$ a $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}\beta$, jeden bod za sestavení rovnosti $c = r_1 \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha + 2 \cdot \sqrt{r_1 r_2} + r_2 \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\beta$, jeden bod za výpočet poloměrů r_1, r_2. Ověření, že kružnice s těmito poloměry leží v trojúhelníku ABC, může v jinak úplném řešení chybět, stejně jako úvodní konstatování o vnějším dotyku zkoumaných kružnic.

3. *V rovnoběžníku $ABCD$ se středem S označme O střed kružnice vepsané trojúhelníku ABD a T bod jejího dotyku s úhlopříčkou BD. Dokažte, že přímky OS a CT jsou rovnoběžné.* (Jaromír Šimša)

Řešení. Označme $a = |AB|$, $b = |AD|$ a $c = |BD|$. Případ $a = b$ je triviální (tehdy obě přímky OS a CT splývají s přímkou AC), budeme proto dále předpokládat, že $a > b$ (v případě $a < b$ stačí vyměnit označení vrcholů B a D).

Označme T' obraz bodu T v souměrnosti podle středu S (v níž A je obrazem bodu C). Protože $CT \parallel AT'$, je naším cílem dokázat, že $OS \parallel AT'$. Dosáhneme toho ověřením stejnolehlosti trojúhelníků $AT'E$ a OSE, kde E je průsečík polopřímky AO s úhlopříčkou BD (obr. 1). Díky předpokladu $a > b$ a tomu, že AE je osa úhlu BAD, leží bod E mezi body S a D stejně jako bod T (ten jakožto kolmý průmět bodu O leží mezi body E a D), zatímco bod T' leží mezi body S a B.



Obr. 1

Potřebnou (i postačující) rovnost poměrů

$$\frac{|AO|}{|OE|} = \frac{|T'S|}{|SE|} \tag{1}$$

dokážeme tak, že je vyjádříme pomocí délek a, b, c. Jak je známo,

$$|DT| = \frac{b+c-a}{2}, \quad \text{a proto} \quad |T'S| = |TS| = \frac{c}{2} - \frac{b+c-a}{2} = \frac{a-b}{2}.$$

Z vlastností os úhlů v trojúhelnících ABD a AED plynou rovnosti

$$|BE| : |ED| = |AB| : |AD| \quad \text{a} \quad |AO| : |OE| = |AD| : |DE|,$$

z nichž postupně dostaneme

$$|BE| = \frac{ac}{a+b} \quad \text{a} \quad |DE| = \frac{bc}{a+b},$$

$$|SE| = |BE| - |BS| = \frac{ac}{a+b} - \frac{c}{2} = \frac{c(a-b)}{2(a+b)},$$

$$\frac{|AO|}{|OE|} = \frac{|AD|}{|DE|} = \frac{b}{\dfrac{bc}{a+b}} = \frac{a+b}{c}.$$

Posledním zlomkem jsme vyjádřili hodnotu levé strany (1). Ukažme, že stejnou hodnotu má i pravá strana:

$$\frac{|T'S|}{|SE|} = \frac{\dfrac{a-b}{2}}{\dfrac{c(a-b)}{2(a+b)}} = \frac{a+b}{c}.$$

Tím je důkaz tvrzení úlohy uzavřen.

Jiné řešení. Označme T' bod dotyku kružnice vepsané trojúhelníku DBC se stranou BD. To je, jak je známo, současně bod, v němž se strany BD dotýká kružnice k' připsaná trojúhelníku ABD. Označme ϱ poloměr kružnice k vepsané trojúhelníku ABD a ϱ' poloměr kružnice k'. Bod E leží na spojnici středů kružnic k a k' i na jejich společné tečně, je tedy středem stejnolehlosti obou kružnic. Proto platí rovnost

$$\frac{|ET'|}{|ET|} = \frac{\varrho'}{\varrho} = \frac{a+b+c}{a+b-c}.$$

Označíme-li $|ST'| = |ST| = x$ a $|SE| = y$, máme

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{a+b+c}{a+b-c} \quad \text{a odtud} \quad \frac{x}{y} = \frac{a+b}{c},$$

takže

$$\frac{|ET'|}{|ES|} = \frac{x+y}{y} = \frac{a+b+c}{c}.$$

Označíme-li v velikost výšky trojúhelníku ABD y vrcholu A, platí

$$\frac{|EA|}{|EO|} = \frac{v}{\varrho} = \frac{a+b+c}{c} = \frac{|ET'|}{|ES|}.$$

Tím je stejnolehlost trojúhelníků EAT' a EOS, a tedy i rovnoběžnost přímek AT' a OS dokázána.

Analytické řešení. Zvolme kartézskou soustavu souřadnic tak, aby $A = [0,0]$, $B = [1,0]$, $D = [a,b]$. Potom $C = [a+1,b]$, $S = \left[\frac{1}{2}(a+1), \frac{1}{2}b\right]$. Bod O má stejnou vzdálenost od stran trojúhelníku ABD, proto jeho souřadnice vyhovují soustavě rovnic

$$y = \frac{bx - ay}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{-bx + (a-1)y + b}{\sqrt{(a-1)^2+b^2}}.$$

Označíme-li $c = \sqrt{(a-1)^2+b^2}$, $d = \sqrt{a^2+b^2}$, dostaneme

$$O = \left[\frac{a+d}{c+d+1}, \frac{b}{c+d+1}\right].$$

Dále

$$T = B + \Big(1 - \frac{a+d}{c+d+1}\Big)\frac{D-B}{c} = \frac{1}{c+d+1}\Big[c+d+a-\frac{(1-a)^2}{c}, b\Big(\frac{1-a}{c}+1\Big)\Big].$$

Ověření lineární závislosti vektorů

$$S - O = \Big[\frac{a+1}{2} - \frac{a+d}{c+d+1}, \frac{b}{2}\Big(1 - \frac{2}{c+d+1}\Big)\Big]$$

a

$$C - T = \Big[a+1-\frac{c+d+a-(1-a)^2/c}{c+d+1}, b\Big(1 - \frac{(1-a)/c+1}{c+d+1}\Big)\Big]$$

čili rovnosti

$$\begin{aligned}&[(a+1)(c+d+1) - 2a - 2d]\Big(c+d-\frac{1-a}{c}\Big) = \\ &\quad = \Big[(a+1)(c+d+1) - c - d - a + \frac{(1-a)^2}{c}\Big](c+d-1)\end{aligned}$$

je už rutinní záležitostí.

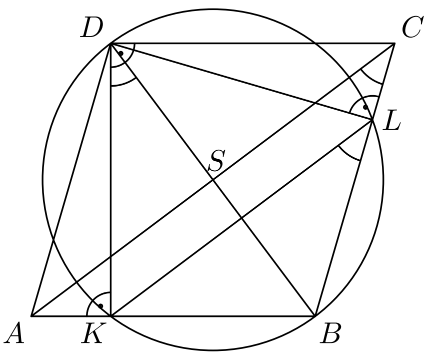
5. *Je dán rovnoběžník $ABCD$ takový, že paty K, L kolmic z bodu D po řadě ke stranám AB, BC jsou jejich vnitřními body. Dokažte, že $KL \parallel AC$, právě když*

$$|\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle BDA| + |\sphericalangle ACD|.$$

(Ján Mazák)

Řešení. Střídavé úhly ABD a CDB jsou shodné (obr. 2), proto $|\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle ABD| + |\sphericalangle BDA| + |\sphericalangle ACD| = 180°$. Rovnost $|\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle BDA| + |\sphericalangle ACD|$ tedy platí, právě když

$$|\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle ABD| = 90°. \tag{1}$$



Obr. 2

Body K a L leží na Thaletově kružnici s průměrem BD. Obvodový úhel BDK je tedy shodný s úhlem BLK, a proto (vzhledem k rovnosti střídavých úhlů ABD a CDB)

$$|\sphericalangle BLK| + |\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle BDK| + |\sphericalangle CDB| = 90°.$$

Přímky KL a BC jsou ovšem rovnoběžné, právě když $|\sphericalangle BLK| = |\sphericalangle BCA|$, což je podle předchozí rovnosti ekvivalentní rovnosti (1). Tím je požadovaná ekvivalence dokázána.

1. V obdélníku $ABCD$ o stranách $|AB| = 9$, $|BC| = 8$ leží vzájemně se dotýkající kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ tak, že k_1 se dotýká stran AD a CD, k_2 se dotýká stran AB a BC.

a) Dokažte, že $r_1 + r_2 = 5$.

b) Určete nejmenší a největší možnou hodnotu obsahu trojúhelníku AS_1S_2.

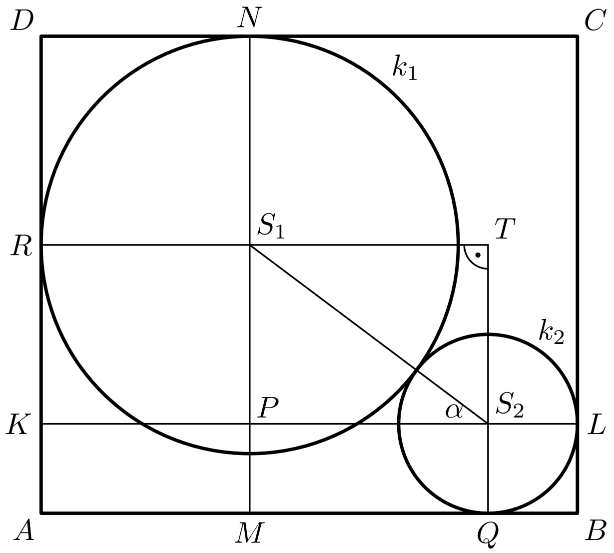
1. a) Bodem S_1 veďme rovnoběžku se stranou AD a její průsečíky se stranami AB a CD označme M a N. Podobně vedeme bodem S_2 rovnoběžku s AB a její průsečíky se stranami AD a BC označíme K a L; průsečík přímek KL a MN označme P (obr. 1). Podle Pythagorovy věty pro trojúhelník S_1PS_2 platí

$$(r_1 + r_2)^2 = (8 - r_1 - r_2)^2 + (9 - r_1 - r_2)^2 \tag{1}$$

a odtud

$$(r_1 + r_2)^2 - 34(r_1 + r_2) + 145 = 0,$$
$$(r_1 + r_2 - 5)(r_1 + r_2 - 29) = 0.$$

Protože $2r_1 \leqq 8$, $2r_2 \leqq 8$ (průměr kružnic, které podle zadání leží celé v daném obdélníku, nemůže být větší než délka strany AD), musí platit $r_1 + r_2 = 5$.



Obr. 1

b) Označme Q patu kolmice z bodu S_2 na stranu AB, R patu kolmice z bodu S_1 na stranu AD a T průsečík přímek QS_2 a RS_1 (obr. 1). Obsah S trojúhelníku AS_2S_1 vypočítáme tak, že od obsahu pravoúhelníku $AQTR$ odečteme součet obsahů pravoúhlých trojúhelníků AQS_2, AS_1R a S_1S_2T:

$$S = (9 - r_2)(8 - r_1) - \frac{1}{2}r_2(9 - r_2) - \frac{1}{2}r_1(8 - r_1) - \frac{1}{2}(9 - r_1 - r_2)(8 - r_1 - r_2) =$$
$$= 72 - 9r_1 - 8r_2 + r_1r_2 - \frac{9}{2}r_2 + \frac{1}{2}r_2^2 - 4r_1 + \frac{1}{2}r_1^2 - 36 + \frac{17}{2}(r_1 + r_2) - \frac{1}{2}(r_1 + r_2)^2 =$$
$$= 36 - \frac{9}{2}r_1 - 4r_2 = 36 - \frac{9}{2}r_1 - 4(5 - r_1) = 16 - \frac{1}{2}r_1,$$

kam jsme při poslední úpravě dosadili za r_2 z rovnosti $r_1 + r_2 = 5$. Z ní a z nerovností $2r_1 \leqq 8$, $2r_2 \leqq 8$ dále vyplývá, že oba poloměry r_1, r_2 leží v intervalu $\langle 1, 4\rangle$, a proto

$$S = 16 - \frac{1}{2}r_1 \in \left\langle 14, \frac{31}{2}\right\rangle;$$

obsah má nejmenší hodnotu 14, je-li $r_1 = 4$ a $r_2 = 1$, a největší hodnotu $\frac{31}{2}$, jestliže $r_1 = 1$ a $r_2 = 4$.

Jiné řešení. a) Označme α úhel PS_2S_1 (obr. 1). Z rovnosti $|AB| = |KP| + |PS_2| + |S_2L|$ plyne $r_1 + (r_1 + r_2)\cos\alpha + r_2 = 9$ čili

$$(1 + \cos\alpha)(r_1 + r_2) = 9. \tag{2}$$

Podobně z rovnosti $|AD| = |MP| + |PS_1| + |S_1N|$ vyplývá

$$(1 + \sin\alpha)(r_1 + r_2) = 8. \tag{3}$$

Z posledních dvou rovnic vychází

$$\begin{gathered} 8(1 + \cos\alpha) = 9(1 + \sin\alpha), \\ 8\cos\alpha = 1 + 9\sin\alpha. \end{gathered}$$

Umocněním této rovnice a využitím identity $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ dostáváme kvadratickou rovnici pro $\sin\alpha$,

$$\begin{gathered} 64(1 - \sin^2\alpha) = 1 + 18\sin\alpha + 81\sin^2\alpha, \\ 145\sin^2\alpha + 18\sin\alpha - 63 = 0. \end{gathered}$$

Ta má diskriminant $D = 18^2 + 4 \cdot 63 \cdot 145 = 9(36 + 28 \cdot 145) = 3^2 \cdot 2^{12}$ a dva reálné kořeny $-\frac{21}{29}$ a $\frac{3}{5}$. Protože α je vnitřní úhel trojúhelníku, dostáváme

$$\sin\alpha = \frac{3}{5},$$

a tudíž

$$r_1 + r_2 = \frac{8}{1 + \sin\alpha} = 5.$$

b) Obsah S trojúhelníku AS_2S_1 lze vypočítat pomocí vektorového součinu vektorů $S_2 - A$ a $S_1 - A$. Kartézskou soustavu souřadnic zvolme tak, aby platilo $A = [0, 0, 0]$, $B = [9, 0, 0]$, $D = [0, 8, 0]$. Potom $S_2 = [9 - r_2, r_2, 0]$, $S_1 = [r_1, 8 - r_1, 0]$ a zkoumaný obsah S je

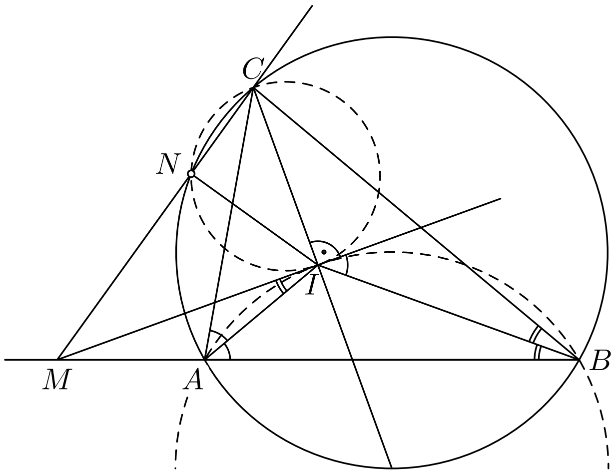
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}|(S_2 - A) \times (S_1 - A)| = \frac{1}{2}[(9 - r_2)(8 - r_1) - r_1r_2] = \frac{1}{2}(72 - 9r_1 - 8r_2) = \\ &= 36 - \frac{9}{2}r_1 - 4r_2. \end{aligned}$$

Dostali jsme stejný výraz jako v prvním řešení, a tak týmž postupem zjistíme, že zkoumaný obsah má nejmenší hodnotu 14 a největší hodnotu $\frac{31}{2}$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Jeden bod udělte za rovnici (1) nebo za soustavu (2), (3), další bod za určení součtu $r_1 + r_2$, tedy za část a) nejvýše dva body. Dva body dejte za vhodné vyjádření obsahu trojúhelníku AS_2S_1 a zbývající dva body za určení nejmenší a největší hodnoty obsahu využitím nerovností $1 \leqq r_1 \leqq 4$ či $1 \leqq r_2 \leqq 4$.

3. *Označme I střed kružnice vepsané danému trojúhelníku ABC. Předpokládejme, že kolmice na přímku CI vedená bodem I protne přímku AB v bodě M. Dokažte, že kružnice trojúhelníku ABC opsaná protne úsečku CM ve vnitřním bodě N a že přímky NI a MC jsou navzájem kolmé.*

Řešení. Ukážeme nejdříve dvěma způsoby, že přímka MI, tedy kolmice na přímku CI v bodě I, je tečnou ke kružnici ABI (tak budeme značit kružnice procházející třemi danými body). První postup založíme na známém poznatku, že AIC a BIC jsou tupé úhly velikostí $90° + \frac{1}{2}\beta$, resp. $90° + \frac{1}{2}\alpha$ (návodná úloha 1). Proto zkoumaná kolmice MI k přímce CI svírá s úsečkami AI a BI ostré úhly $\frac{1}{2}\beta$, resp. $\frac{1}{2}\alpha$,[1] tedy úhly shodné s obvodovými úhly IBA, resp. IAB v kružnici ABI (obr. 1). To již podle věty o shodnosti obvodových a úsekových úhlů znamená právě to, že přímka MI je tečnou kružnice ABI. Stejný závěr plyne ovšem okamžitě z poznatku, že středem kružnice ABI je střed toho oblouku AB kružnice ABC, který neobsahuje vrchol C a kterým prochází přímka CI (osa vnitřního úhlu při vrcholu C trojúhelníku ABC, návodná úloha 2).



Obr. 1

Z dokázaného dotyku přímky MI s kružnicí ABI vyplývá, že bod M leží na přímce AB vně úsečky AB a má ke kružnici ABI kladnou mocnost m, jež má dvojí vyjádření $m = |MI|^2 = |MA| \cdot |MB|$. Bod M tudíž leží i ve vnější oblasti kružnice ABC (neboť úsečka AB je její tětiva) a má k ní tutéž mocnost $m = |MA| \cdot |MB|$. Tatáž hodnota $m = |MI|^2$ je však menší než $|MC|^2$, jak plyne z pravoúhlého trojúhelníku CMI. Nerovnost $|MC|^2 > m$ tak znamená, že polopřímka MC má s kružnicí ABC kromě bodu C společný ještě jeden bod N, který navíc leží mezi body M a C (neboť z rovnosti $|MC| \cdot |MN| = m$ plyne nerovnost $|MN| < |MC|$). První část tvrzení úlohy je tak dokázána.

Naším druhým úkolem je ukázat, že úhel CNI je pravý. K tomu na dokázanou rovnost $|MC| \cdot |MN| = |MI|^2$ můžeme uplatnit následující „obrácení“ Eukleidovy věty o odvěsně MI pravoúhlého trojúhelníku CMI. Pata jeho výšky z vrcholu I na přeponu CM je takový bod X úsečky CM, jehož poloha je (díky Eukleidově větě) jednoznačně určena rovností $|MC| \cdot |MX| = |MI|^2$. Je proto $X = N$ a důkaz je hotov. Bez užití Eukleidovy věty lze argumentovat takto: Protože přímka MI se v bodě I dotýká Thaletovy kružnice sestrojené nad průměrem CI, má bod M i k této kružnici mocnost $m = |MI|^2$, a proto na ní — díky rovnosti $m = |MC| \cdot |MN|$ — leží i bod N, takže úhel CNI je podle Thaletovy věty skutečně pravý.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Pomocí vnitřních úhlů α, β, γ obecného trojúhelníku ABC s vepsanou kružnicí o středu I vyjádřete velikosti úhlů AIB, AIC, BIC. [Velikosti jsou po řadě $90^\circ + \frac{1}{2}\gamma$, $90^\circ + \frac{1}{2}\beta$, $90^\circ + \frac{1}{2}\alpha$. Plyne to ze součtů vnitřních úhlů v jednotlivých trojúhelnících

[1] Z určených úhlů mezi přímkou MI a úsečkami AI a BI plyne, že bod M (jehož existence se v zadání úlohy předpokládá) skutečně existuje, právě když platí $\frac{1}{2}\alpha \neq \frac{1}{2}\beta$ neboli $\alpha \neq \beta$. S ohledem na symetrii zadání můžeme předpokládat, že platí $\alpha > \beta$; bod M pak leží — jako na našem obrázku — na prodloužení strany AB za vrchol A a je $|\sphericalangle IMA| = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta$.

AIB, AIC, BIC, neboť polopřímky AI, BI a CI jsou osami vnitřních úhlů trojúhelníku ABC.]

Před řešením následující úlohy si zopakujte učebnicové poznatky o středových, obvodových a úsekových úhlech.

2. Pro obecný trojúhelník ABC s vepsanou kružnicí o středu I dokažte, že polopřímka CI protne oblouk AB kružnice opsané v takovém bodě S, který má od bodů A, B, I stejnou vzdálenost. [Rovnost $|SA| = |SB|$ plyne z rovnosti obvodových úhlů ACS a BCS; rovnost $|SA| = |SI|$ je důsledkem toho, že v trojúhelníku AIS mají oba vnitřní úhly u vrcholů A a I tutéž velikost rovnou $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\gamma$ neboli $90^\circ - \frac{1}{2}\beta$.]

   Zopakujte si dále učebnicový poznatek o všech sečnách dané kružnice procházejících daným bodem, který je vyjádřen veličinou zvanou *mocnost bodu ke kružnici.* Dobré poučení a řadu ukázek užití najdete v článku T. Nedevová: *Mocnost bodu ke kružnici*, Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 87 (2012), č. 2, str. 9–17.
3. V rovině je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB a pravým úhlem při vrcholu A. Označme k_1 kružnici sestrojenou nad stranou AD jako nad průměrem a k_2 kružnici procházející vrcholy B, C a dotýkající se přímky AB. Mají-li kružnice k_1, k_2 vnější dotyk v bodě P, je přímka BC tečnou kružnice opsané trojúhelníku CDP. Dokažte. [52–B–II–4]
4. Do kružnice k je vepsán čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčka BD není průměrem. Dokažte, že průsečík přímek, jež se kružnice k dotýkají v bodech B a D, leží na přímce AC, právě když platí $|AB| \cdot |CD| = |AD| \cdot |BC|$. [51–A–II–3]
5. Je dán rovnoběžník $ABCD$ s tupým úhlem ABC. Na jeho úhlopříčce AC v polorovině BDC zvolme bod P tak, aby platilo $|\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle ABC|$. Dokažte, že přímka CD je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku BCP, právě když úsečky AB a BD jsou shodné. [59–A–II–2]
6. V trojúhelníku ABC, který není rovnostranný, označme K průsečík osy vnitřního úhlu BAC se stranou BC a L průsečík osy vnitřního úhlu ABC se stranou AC. Dále označme S střed kružnice vepsané, O střed kružnice opsané a V průsečík výšek trojúhelníku ABC. Dokažte, že následující dvě tvrzení jsou ekvivalentní:
   a) Přímka KL se dotýká kružnic opsaných trojúhelníkům ALS, BVS a BKS.
   b) Body A, B, K, L a O leží na jedné kružnici. [55–A–III–3]
7. Jsou dány kružnice k, l, které se protínají v bodech A, B. Označme K, L po řadě dotykové body jejich společné tečny zvolené tak, že bod B je vnitřním bodem trojúhelníku AKL. Na kružnicích k a l zvolme po řadě body N a M tak, aby bod A byl vnitřním bodem úsečky MN. Dokažte, že čtyřúhelník $KLMN$ je tětivový, právě když přímka MN je tečnou kružnice opsané trojúhelníku AKL. [60–A–I–3]
8. Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Kružnice, která prochází vrcholem B a dotýká se přímky AI v bodě I, protíná strany AB, BC postupně v bodech P, Q. Průsečík přímky QI se stranou AC označme R. Dokažte, že platí

$$|AR| \cdot |BQ| = |PI|^2.$$

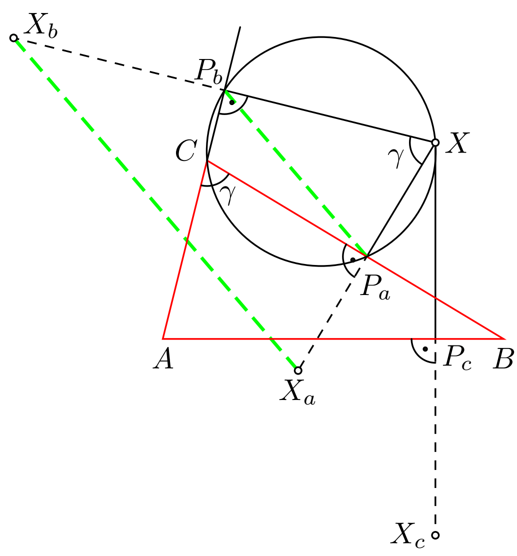
   [62–A–I–5]

6. *V rovině daného trojúhelníku ABC určete všechny body, jejichž obrazy v osových souměrnostech podle přímek AB, BC, CA tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku.*

Řešení. Vedeni zadáním úlohy, zvolíme jakýkoliv bod X roviny ABC a sestrojíme jeho obrazy X_a, X_b, X_c v osových souměrnostech podle přímek BC, CA, AB (obr. 6). Abychom mohli posoudit otázku, kdy dostaneme rovnostranný trojúhelník $X_aX_bX_c$, dokážeme nejprve, že pro vzájemné vzdálenosti jeho vrcholů platí obecně (tj. bez ohledu na volbu bodu X) vzorce

$$|X_aX_b| = 2|XC|\sin\gamma, \quad |X_aX_c| = 2|XB|\sin\beta, \quad |X_bX_c| = 2|XA|\sin\alpha, \tag{1}$$

ve kterých α, β, γ je obvyklé označení vnitřních úhlů trojúhelníku ABC.



Obr. 6

Jistě stačí dokázat pouze první rovnost v (1). Ta je zřejmá v případě $X = C$, neboť tehdy platí $X_a = X_b$ $(= X)$. V případě $X \neq C$ je XC průměrem Thaletovy kružnice z obr. 6, na níž leží vyznačené kolmé průměty P_a, P_b bodu X na přímky BC, CA. Protože tětivě P_aP_b přísluší obvodové úhly γ a $180^\circ - \gamma$, ze sinové věty plyne rovnost $|P_aP_b| = |XC| \sin\gamma$. S ohledem na to, že úsečka X_aX_b je zřejmě obrazem tětivy P_aP_b ve stejnolehlosti se středem v bodě X a koeficientem 2, platí $|X_aX_b| = 2|P_aP_b|$, čímž jsou rovnosti (1) dokázány.

Ze vzorců (1) vyplývá, že naší úlohou je najít právě ty body X roviny ABC, pro něž platí

$$2|XA| \sin\alpha = 2|XB| \sin\beta = 2|XC| \sin\gamma > 0$$

(právě tehdy je totiž trojúhelník $X_aX_bX_c$ rovnostranný). Jinak vyjádřeno, hledáme body X, jejichž vzdálenosti od vrcholů A, B, C jsou kladné a splňují úměru

$$|XA| : |XB| : |XC| = \frac{1}{\sin\alpha} : \frac{1}{\sin\beta} : \frac{1}{\sin\gamma} = \frac{1}{|BC|} : \frac{1}{|AC|} : \frac{1}{|AB|}$$

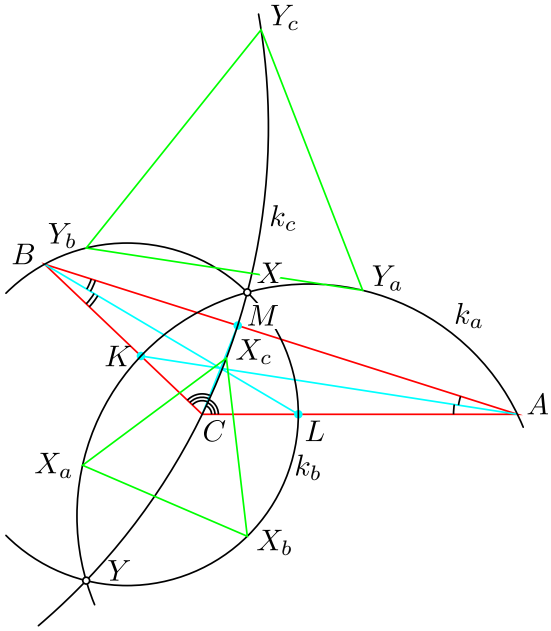
(kvůli dalšímu výkladu jsme využili sinovou větu a přešli od sinů úhlů k délkám protějších stran v $\triangle ABC$). Právě takové body X sestrojíme jako společné body následujících tří Apolloniových kružnic, přesněji množin bodů X zadaných rovnicemi

$$k_a\colon \frac{|XB|}{|XC|} = \frac{|AB|}{|AC|}, \quad k_b\colon \frac{|XA|}{|XC|} = \frac{|AB|}{|BC|}, \quad k_c\colon \frac{|XA|}{|XB|} = \frac{|AC|}{|BC|}; \tag{2}$$

přitom je zřejmé, že libovolným průsečíkem dvou těchto kružnic bude procházet i kružnice třetí.[4] Z rovností v (2) je patrné, že $A \in k_a$, $B \in k_b$ a $C \in k_c$. To usnadňuje praktickou konstrukci těchto tří kružnic: jsou-li AK, BL, CM příčky trojúhelníku ABC, na kterých leží osy jeho vnitřních úhlů (obr. 7), leží na kružnici k_a nejen bod A, ale i bod K (v důsledku dobře známé úměry $|KB| : |KC| = |AB| : |AC|$), takže střed kružnice k_a můžeme sestrojit jako průsečík osy úsečky AK s přímkou BC (není-li ovšem

[4] Některé z těchto množin (jedna nebo tři) mohou být přímkami namísto kružnicemi. Budeme se tomu věnovat později při diskusi o počtu řešení.

$|AB| = |AC|$, kdy k_a je osa strany BC). Podobně užitím os úseček BL, CM určíme středy kružnic k_b, k_c. Na obrázku 7 vidíme situaci, kdy kružnice k_a, k_b, k_c mají dva společné body X, Y, a naše úloha tak má dvě řešení.[5] Jsou na něm vykresleny i odpovídající rovnostranné trojúhelníky $X_aX_bX_c$ a $Y_aY_bY_c$. Není náhoda, že jejich vrcholy leží po jednom na odpovídajících kružnicích k_a, k_b a k_c, neboť středy těchto kružnic leží na osách dotyčných souměrností.



Obr. 7

I když je zadaná úloha *konstrukčně* vyřešena, musíme ještě posoudit otázku, kolik má úloha řešení, tedy otázku počtu společných bodů Apolloniových kružnic k_a, k_b, k_c (jak víme, stačí vzít dvě z nich). Odpověď podáme v následujícím oddílu; vypomůžeme si přitom opět poznatkem o existenci příček výchozího trojúhelníku ABC, jež jsou zároveň tětivami zkoumaných kružnic; zachováme i jejich označení AK, BL, CM z obrázku 7.

Diskuse.

a) Je-li trojúhelník ABC *rovnostranný*, jsou k_a, k_b, k_b osy jeho stran, a úloha tak má jediné řešení, kterým je střed daného rovnostranného trojúhelníku.

b) Je-li trojúhelník ABC *rovnoramenný* a platí-li například $|AB| \neq |AC| = |BC|$, je k_c osa jeho základny AB, která protne kružnici k_a ve dvou bodech, neboť protíná její tětivu AK, a tedy i oba její oblouky AK. Pro rovnoramenný trojúhelník ABC, který není rovnostranný, má tudíž úloha vždy dvě řešení.

c) Je-li trojúhelník ABC *různostranný* a je-li například AB jeho nejdelší strana (jako na obr. 7), mají kružnice k_a, k_b, jak ukážeme, dva společné body. Protože kružnice k_a je dána rovnicí $|XB|/|XC| = |AB|/|AC| > 1$, leží bod B v její vnější oblasti a bod C v její vnitřní oblasti. Proto ve vnitřní oblasti k_a leží i celá úsečka AC (s výjimkou bodu A), tedy i její vnitřní bod L. Kružnice k_a tak protíná tětivu BL kružnice k_b, a proto se protínají i obě kružnice. Pro různostranný trojúhelník ABC má tudíž úloha vždy dvě řešení.

[5] Jak uvidíme za okamžik, dvě řešení zadané úlohy budou existovat, kdykoliv výchozí trojúhelník ABC nebude rovnostranný. Netriviálnost tohoto poznatku nepřímo podporuje i skutečnost, že obě řešení X a Y na obr. 7 leží vně trojúhelníku ABC.

Návodné a doplňující úlohy:

Soutěžní úloha se vztahuje k studijnímu tématu tohoto ročníku MO kategorie A, kterým jsou *Apolloniovy kružnice*, neboli kružnice, jež spojujeme s následujícím tvrzením. *Předpokládejme, že v rovině π jsou dány dva různé body A, B a že je rovněž dáno kladné číslo $\lambda \neq 1$. Pak množina*

$$\mathsf{M} = \{X \in \pi;\ |AX| : |BX| = \lambda\}$$

je kružnice se středem na přímce AB. Právě tato množina M se nazývá Apolloniovou kružnicí (příslušnou daným bodům A a B a danému poměru λ).

Důkaz uvedeného tvrzení předkládáme níže jako návodnou úlohu 1 (opatřenou řešením). Dodejme ještě, že v případě poměru $\lambda = 1$ je M zřejmě osa úsečky AB. Pro podrobnější seznámení s tématem doporučujeme text na str. 11–14. brožurky L. Boček, J. Zhouf: *Máte rádi kružnice?*, Prometheus, Praha, 1995.

1. Dokažte výše uvedené tvrzení o množině M bodů v rovině. [Nejprve ukážeme, že pro libovolný bod $X \in \mathsf{M}$, který neleží na přímce AB, platí: *Osy vnitřního a vnějšího úhlu při vrcholu X trojúhelníku ABX protínají přímku AB po řadě v bodech P a Q, které nezávisí na výběru bodu X a které samy patří do množiny* M (jsou to jediné dva body z M, které na přímce AB leží). Skutečně, ze sinové věty pro trojúhelníky APX a BPX plyne $|AP| : |AX| = \sin\frac{1}{2}\gamma : \sin\varphi$ a $|BP| : |BX| = \sin\frac{1}{2}\gamma : \sin(180^\circ - \varphi)$, kde $\gamma = |\sphericalangle AXB|$ a $\varphi = |\sphericalangle APX|$, odkud $|AP| : |BP| = |AX| : |BX| = \lambda$. Podobně se odvodí i druhá úměra $|AQ| : |BQ| = \lambda$. Z dokázaného tvrzení o bodech P a Q vyplývá, že každý bod množiny M nutně leží na Thaletově kružnici sestrojené nad (fixním) průměrem PQ. Zbývá ukázat opačné tvrzení o tom, že každý bod X této kružnice patří do množiny M, že tedy splňuje úměru $|AX| : |BX| = \lambda$. K tomu podle předchozího stačí předpokládat, že X neleží na přímce AB, a dokázat rovnost velikostí úhlů $\gamma_1 = |\sphericalangle PXA|$ a $\gamma_2 = |\sphericalangle PXB|$. Provedeme to v případě $\lambda > 1$, kdy uvažované body leží na přímce v pořadí A, P, B, Q (případ $0 < \lambda < 1$ se posoudí analogicky, nebo se prohozením bodů A, B přejde od poměru λ k poměru $1/\lambda$.) Protože úhly AXQ, BXQ mají po řadě velikosti $90^\circ + \gamma_1$, $90^\circ - \gamma_2$, ze sinové věty plynou rovnosti
$$\lambda = \frac{|AP|}{|BP|} = \frac{|AX|\sin\gamma_1}{|BX|\sin\gamma_2} \quad \text{a} \quad \lambda = \frac{|AQ|}{|BQ|} = \frac{|AX|\cos\gamma_1}{|BX|\cos\gamma_2},$$
ze kterých vychází $\operatorname{tg}\gamma_1 = \operatorname{tg}\gamma_2$, neboli $\gamma_1 = \gamma_2$. Celý důkaz tvrzení o množině M je hotov.]
2. V rovině π jsou dány čtyři různé body A, B, C, D neležící na stejné přímce. Sestrojte všechny body $X \in \pi$, pro něž platí $\triangle ABX \sim \triangle CDX$. [Koeficient $\lambda = |AB| : |CD|$ kýžené podobnosti známe; proto hledané body X sestrojíme jako průsečíky dvou Apolloniových kružnic: první z nich přísluší bodům A, C a poměru λ, druhá bodům B, D a témuž poměru λ.]
3. V rovině π jsou dány čtyři různé body A, B, C, D ležící v tomto pořadí na jedné přímce. Sestrojte všechny body $X \in \pi$, pro něž jsou úhly AXB, BXC, CXD navzájem shodné. [Hledané body X jsou průsečíky dvou Apolloniových kružnic: první z nich přísluší bodům A, C a prochází bodem B (ten tedy určuje příslušný dělící poměr), druhá přísluší bodům B, D a prochází bodem C.]

2. V rovině jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$, kde $|S_1S_2| > r_1 + r_2$. Najděte množinu všech bodů X, které neleží na přímce S_1S_2 a mají tu vlastnost, že úsečky S_1X, S_2X protínají po řadě kružnice k_1, k_2 v bodech, jejichž vzdálenosti od přímky S_1S_2 se rovnají.

2. V první části řešení předpokládejme, že X je libovolný bod, který má požadovanou vlastnost. Zřejmě musí ležet ve vnější oblasti každé z obou kružnic. Body S_1, S_2 a X jsou pak vrcholy trojúhelníku, jehož strany S_1X, S_2X jsou proťaty po řadě kružnicemi k_1, k_2 v bodech Y_1 a Y_2, které leží na téže rovnoběžce s přímkou S_1S_2 (obr. 1). Proto i body Y_1, Y_2, X jsou vrcholy trojúhelníku, který je podobný trojúhelníku S_1S_2X podle věty *uu*, tudíž pro jejich strany platí úměra

$$\frac{|XY_1|}{|XS_1|} = \frac{|XY_2|}{|XS_2|}, \tag{1}$$

kterou díky rovnostem

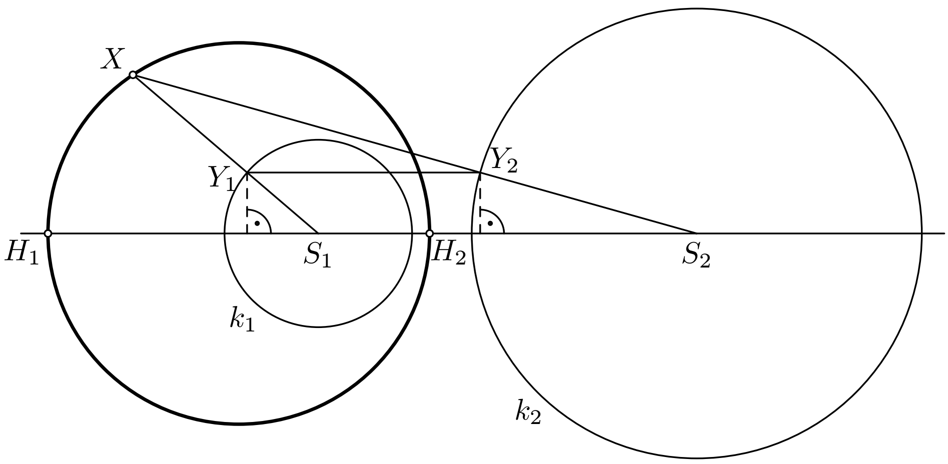
$$|XY_1| = |XS_1| - r_1 \quad \text{a} \quad |XY_2| = |XS_2| - r_2 \tag{2}$$

převedeme na úměru pro délky úseček XS_1 a XS_2:

$$\frac{|XS_1| - r_1}{|XS_1|} = \frac{|XS_2| - r_2}{|XS_2|},$$

takže

$$\frac{|XS_1|}{|XS_2|} = \frac{r_1}{r_2}. \tag{3}$$



Obr. 1

Množinu bodů v rovině s danými body S_1 a S_2, jež mají vlastnost (3), známe: pro $r_1 = r_2$ je to osa úsečky S_1S_2 a pro $r_1 \neq r_2$ je to *Apolloniova kružnice*. Ta je určena svým průměrem H_1H_2 na přímce S_1S_2, na níž jsou H_1 a H_2 jediné dva body X s vlastností (3). Z té navíc plyne, že jde o středy stejnolehlostí kružnic k_1 a k_2.

V druhé části řešení budeme naopak předpokládat, že bod X je libovolný bod Apolloniovy kružnice určené rovnicí (3), který je různý od jejích průsečíků H_1, H_2 s přímkou S_1S_2. Vzhledem k předpokladům úlohy leží body H_1, H_2 ve vnější oblasti obou kružnic, takže tam leží i příslušná Apolloniova kružnice, neboť její průměr obsahuje průměr jedné z daných kružnic (té s menším poloměrem) a s průměrem druhé kružnice je disjunktní.

Body S_1, S_2 a X jsou tak vrcholy trojúhelníku, přičemž $|XS_1| > r_1$ a $|XS_2| > > r_2$. Existují tudíž body $Y_1 \in k_1$, $Y_2 \in k_2$ ležící uvnitř stran S_1X, S_2X trojúhelníku S_1S_2X. Proto pro ně také platí rovnosti (2), díky nimž lze přejít tentokrát od rovnice (3) k rovnici (1). Její platnost znamená, že trojúhelníky S_1S_2X a Y_1Y_2X jsou podobné podle věty *sus*, a proto jsou úsečky S_1S_2 a Y_1Y_2 rovnoběžné. Body Y_1, Y_2 tak mají od přímky S_1S_2 stejné vzdálenosti, což dokazuje požadovanou vlastnost bodu X.

Odpověď: Hledanou množinou bodů X je Apolloniova kružnice určená rovnicí (3), z níž jsou vyloučeny oba její průsečíky s přímkou S_1S_2. V případě $r_1 = r_2$ je hledanou množinou osa úsečky S_1S_2 bez jejího středu.

Poznámka. Potřebnou vlastnost Apolloniovy kružnice lze odvodit přímo z rovnosti (3). Z rovnosti, která předchází rovnost (3) a která je s ní ve skutečnosti ekvivalentní, pro libovolný takový bod X plyne, že oba výrazy $|XS_1| - r_1$ a $|XS_2| - r_2$ mají stejné znaménko. A protože podle předpokladů úlohy je

$$(|XS_1| - r_1) + (|XS_2| - r_2) > |S_1S_2| - (r_1 + r_2) > 0,$$

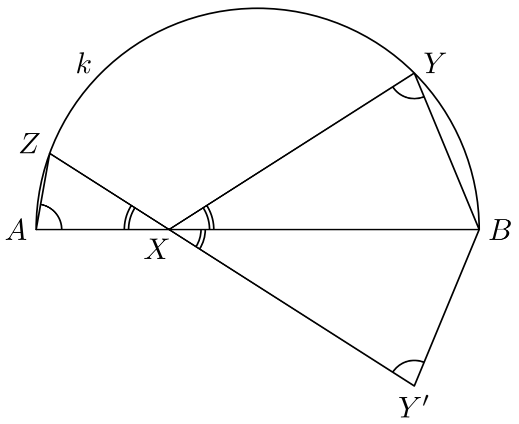
je $|XS_1| > r_1$ a $|XS_2| > r_2$, což znamená, že nalezená Apolloniova kružnice leží v průniku vnějších oblastí obou daných kružnic.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho za 4 body za důkaz, že každý vyhovující bod X leží na Apolloniově kružnici a 2 body za obrácené tvrzení. Ze zadání úlohy je ihned patrné, že všechny vyhovující body X musejí ležet v průniku vnějších oblastí obou kružnic k_1 a k_2. Poznatek, že v tomto průniku leží i nalezená Apolloniova kružnice, by neměl v úplném řešení chybět. Za absenci tohoto poznatku strhněte 1 bod. Rovněž strhněte 1 bod, pokud řešitel v průběhu řešení nebo v závěru opomene situaci, kdy $r_1 = r_2$.

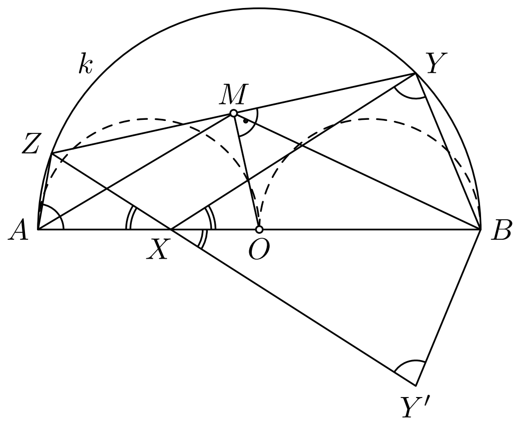
2. *V rovině, v níž je dána úsečka AB, uvažujme trojúhelníky XYZ takové, že X je vnitřním bodem úsečky AB, trojúhelníky XBY a XZA jsou podobné ($\triangle XBY \sim \sim \triangle XZA$) a body A, B, Y, Z leží v tomto pořadí na kružnici. Najděte množinu středů všech úseček YZ.* (Michal Rolínek, Jaroslav Švrček)

Řešení. Podle zadání leží body Y a Z ve stejné polorovině s hraniční přímkou AB. Sestrojme obraz Y' bodu Y v souměrnosti podle přímky AB. Vzhledem k předpokládané podobnosti jsou úhly XAZ a BYX shodné (obr. 1), takže je také $|\sphericalangle BAZ| = |\sphericalangle BY'Z|$. Z této rovnosti ovšem podle věty o obvodových úhlech plyne, že na kružnici k opsané trojúhelníku ABZ leží nejen bod Y, ale i bod Y'. Přímka AB jakožto osa tětivy YY' tak prochází středem O kružnice k, takže tětiva AB je její průměr. Kružnice $k = ABZ$

tedy na volbě bodu Z nezáleží. Střed M její tětivy YZ proto nutně leží ve vnitřní oblasti kružnice k. Z pravých úhlů OMZ a OMY (obr. 2) vidíme, že (menší) úhly AMO a BMO jsou ostré, takže bod M nutně leží v průniku vnějších oblastí Thaletových kružnic nad průměry AO a BO. Ukažme, že obě nutné podmínky na polohu bodu M už společně vymezují hledanou množinu.



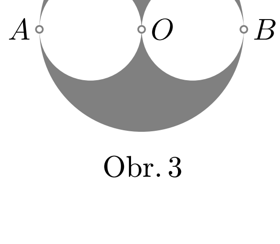
Obr. 1



Obr. 2

Nechť M je libovolný bod ve vnitřní oblasti kružnice k, pro nějž jsou oba úhly AMO a BMO ostré (tj. bod M leží vně obou kruhů s průměry AO a BO). Pak zřejmě kolmice k přímce OM v bodě M protne kružnici k v polorovině ABM, takže na jedné z Thaletových polokružnic nad průměrem AB vytne tětivu, jejíž krajní body můžeme označit Y a Z tak, aby A, B, Y, Z bylo pořadím bodů na kružnici k. Je-li Y' obraz bodu Y na druhé polokružnici v souměrnosti podle průměru AB, pak pro průsečík X úseček AB a $Y'Z$ platí, že trojúhelníky XBY a XZA jsou podobné podle věty uu. Důkaz je hotov.

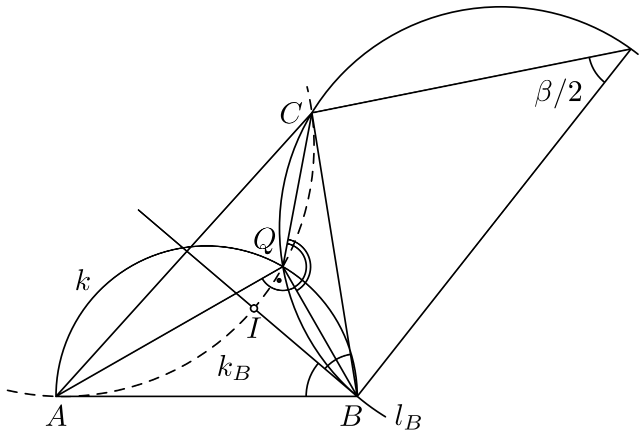
Závěr. Hledanou množinou je vnitřek kruhu s průměrem AB a středem O bez obou kruhů s průměry AO a BO (obr. 3).



Obr. 3

5. *Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Označme k kružnici s průměrem AB. Kružnice, která se dotýká osy úhlu BAC v bodě A a prochází bodem C, protíná kružnici k v bodě P, $P \neq A$. Kružnice, která se dotýká osy úhlu ABC v bodě B a prochází bodem C, protíná kružnici k v bodě Q, $Q \neq B$. Dokažte, že průsečík přímek AQ a BP leží na ose úhlu ACB.* (Peter Novotný)

Řešení. Uvažované kružnice APC a BQC označme po řadě l_A, l_B a všimněme si třeba druhé z nich (obr. 4, úhly trojúhelníku ABC značíme obvyklým způsobem).



Obr. 4

Vysvětleme, že skutečně platí, co na obrázku vidíme. Především bod Q zřejmě leží v polorovině BCA, neboť pro body X tamního oblouku BC kružnice l_B se úhel AXB zvětšuje od (ostrého) úhlu γ po (tupý) úhel $180° - \beta/2$, takže nabývá uvnitř oblouku hodnoty $90°$. Protože úsekový úhel příslušný tomuto oblouku BC kružnice l_B je roven $\beta/2$, je $|\sphericalangle BQC| = 180° - \beta/2$. Odtud $|\sphericalangle AQB| + |\sphericalangle BQC| = 270° - \beta/2 > 180°$. Proto bod Q leží v polorovině ACB, a tudíž i uvnitř trojúhelníku ABC, konvexní úhel AQC má tedy velikost $90° + \beta/2$. Označíme-li I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC, bude mít úhel AIC stejnou velikost, $|\sphericalangle AIC| = 180° - \alpha/2 - \gamma/2 = 90° + \beta/2$. To ovšem znamená, že bod Q leží na stejném oblouku AC kružnice $k_B = ACI$ jako bod I, takže přímka AQ je chordálou kružnic k a k_B.

Druhá uvažovaná přímka BP je analogicky chordálou kružnic k a $k_A = BCI$. Průsečík obou přímek AQ a BP má tedy stejnou mocnost ke kružnicím k_A a k_B, proto leží na jejich chordále, kterou je přímka CI, tedy osa úhlu ACB. Důkaz je hotov.

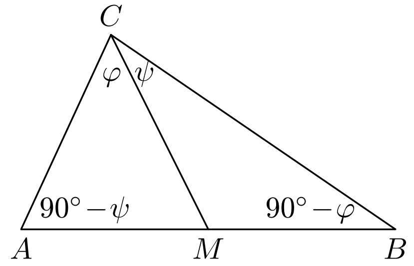
Poznámka. Ještě jedním způsobem vysvětlíme, proč bod Q leží v polorovině BCA. Průsečík Q kružnic k a l_B zřejmě musí ležet v polorovině ABC v úhlu omezeném tečnami obou kružnic v bodě B. Přitom vrchol C ostroúhlého trojúhelníku ABC i střed S_B kružnice l_B zřejmě leží vně kruhu omezeného kružnicí k. V trojúhelníku BS_BC leží sice část kružnice k, ale s výjimkou bodů B a C tam určitě neleží žádný jiný bod kružnice l_B. Z toho je patrné, že bod Q musí ležet v polorovině BCA.

2. Označme M střed strany AB libovolného trojúhelníku ABC. Dokažte, že rovnost $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ACM| = 90^\circ$ platí, právě když je trojúhelník ABC rovnoramenný se základnou AB nebo pravoúhlý s přeponou AB.

3. Délky stran pravoúhelníku jsou celá čísla x a y větší než 1. V pravoúhelníku vyznačíme rozdělení na $x \cdot y$ jednotkových čtverců a pak z něj svinutím a slepením dvou protějších stran zhotovíme plášť rotačního válce. Každé dva vrcholy jednotkových čtverců na plášti spojíme úsečkou. Kolik z těchto úseček prochází vnitřními body tohoto válce? V případě $x > y$ rozhodněte, kdy bude tento počet větší — bude-li obvod podstavy válce roven x, anebo y?

2. V první části řešení budeme předpokládat, že $|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ACM| = 90^\circ$. Při označení $\varphi = |\sphericalangle ACM|$ a $\psi = |\sphericalangle BCM|$ (obr. 1) je pak splněna nejen rovnost $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ - \varphi$, ale také rovnost $|\sphericalangle BAC| = 90^\circ - \psi$, jak plyne ze součtu úhlů v $\triangle ABC$:

$$\begin{aligned}|\sphericalangle BAC| &= 180^\circ - |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle ACB| = \\ &= 180^\circ - (90^\circ - \varphi) - (\varphi + \psi) = 90^\circ - \psi.\end{aligned}$$



Obr. 1

Ze sinové věty pro trojúhelníky ACM a BCM tak vyplývá

$$\frac{\sin(90^\circ - \psi)}{\sin\varphi} = \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{|CM|}{|BM|} = \frac{\sin(90^\circ - \varphi)}{\sin\psi}.$$

Z porovnání krajních zlomků s ohledem na vzorec $\sin(90^\circ - \omega) = \cos\omega$ plyne rovnost $\sin\varphi\cos\varphi = \sin\psi\cos\psi$ neboli $\sin 2\varphi = \sin 2\psi$. Protože úhly φ a ψ jsou ostré, oba úhly 2φ a 2ψ leží v intervalu od 0° do 180°. Podle známé vlastnosti funkce sinus rovnost $\sin 2\varphi = \sin 2\psi$ tak znamená, že je buď $2\varphi = 2\psi$, nebo $2\varphi + 2\psi = 180^\circ$. V prvním případě ($\varphi = \psi$) je trojúhelník ABC rovnoramenný se základnou AB, ve druhém případě ($\varphi + \psi = 90^\circ$) je pravoúhlý s přeponou AB. Tím je dokázána první (obtížnější) ze dvou implikací, z nichž je složena ekvivalence ze zadání úlohy.

Při důkazu druhé (snazší) implikace nejprve předpokládejme, že trojúhelník ABC je pravoúhlý s přeponou AB. Podle Thaletovy věty tehdy platí $|MB| = |MC|$, a tak jsou shodné úhly MCB a MBC (neboli ABC), odkud již plyne

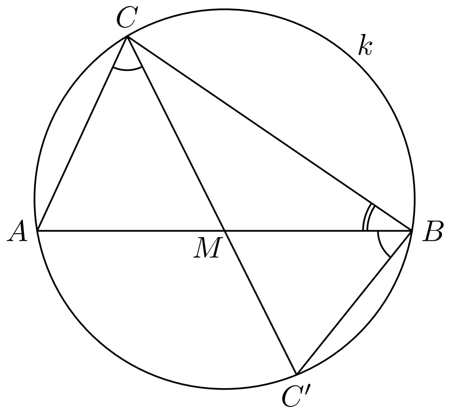
$$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ACM| = |\sphericalangle MCB| + |\sphericalangle ACM| = |\sphericalangle ACB| = 90^\circ.$$

Zbývá dokázat stejnou rovnost i za předpokladu, že trojúhelník ABC je rovnoramenný se základnou AB. Tehdy však jsou trojúhelníky ACM a BCM shodné a mají při vrcholu M pravý úhel, takže platí

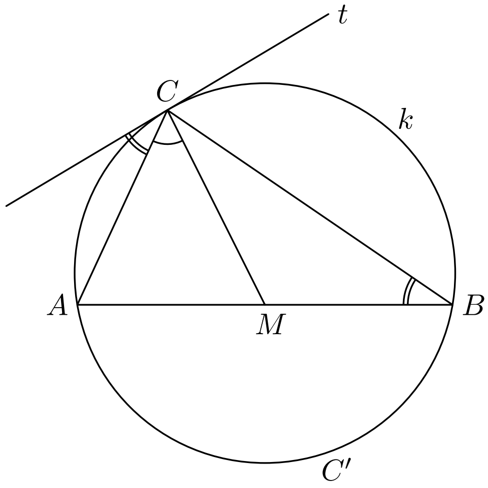
$$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle ACM| = |\sphericalangle MBC| + |\sphericalangle BCM| = 180^\circ - |\sphericalangle BMC| = 90^\circ.$$

Tím je i důkaz druhé implikace ukončen a celá úloha je vyřešena.

Jiné řešení. Sestrojme kružnici k opsanou danému trojúhelníku ABC a jeho těžnici CM prodlužme za bod M do tětivy CC' kružnice k (obr. 2). Ze shodnosti obvodového úhlu ABC' s obvodovým úhlem ACC' (neboli úhlem ACM) plyne, že součet úhlů ABC a ACM ze zadání úlohy má stejnou velikost jako úhel CBC'. Podle Thaletovy věty je tato velikost rovna 90°, právě když tětiva CC' kružnice k je jejím průměrem. To nastane, právě když střed S kružnice k bude ležet na polopřímce CM. Pro takovou situaci rozlišíme případy $S = M$ a $S \neq M$. První případ podle Thaletovy věty nastane, právě když bude trojúhelník ABC pravoúhlý s přeponou AB. Druhý případ (C, M a S jsou tři různé body ležící v přímce) nastane, právě když bude přímka MS, jež je osou úsečky AB, procházet bodem C, tedy právě když bude trojúhelník ABC rovnoramenný se základnou AB (a přitom úhel ACB nebude pravý). Tím je dokázána celá ekvivalence ze zadání úlohy.



Obr. 2



Obr. 3

Poznámka. V předchozím postupu bylo možné namísto tětivy CC' kružnice k využít její tečnu t v bodě C (obr. 3). Ze shodnosti obvodového úhlu ABC s vyznačeným úsekovým úhlem mezi tětivou AC a tečnou t totiž plyne, že součet úhlů ABC a ACM je roven $90°$, právě když je tečna t kolmá k polopřímce CM, tedy právě když na této polopřímce leží střed S kružnice k.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 5 bodů za první (obtížnější) implikaci a 1 bod za oba případy druhé (snazší) implikace.

3. Hledaný počet úseček, které procházejí vnitřními body válce, určíme tak, že od celkového počtu sestrojených úseček odečteme jednak počet těch úseček, které leží na plášti válce, jednak počet těch úseček, které leží v některé z obou podstav válce.

Výpočet provedeme pro případ válce s obvodem podstavy x a výškou y. Spojované body jsou tedy na válci rozloženy na x úsečkách po $y+1$ exemplářích, takže jejich počet je $x(y+1)$. Pro počet P_0 všech sestrojených úseček proto platí vzorec

$$P_0 = \binom{x(y+1)}{2} = \frac{x(y+1)(xy+x-1)}{2},$$

počet P_1 úseček ležících na plášti má vyjádření

$$P_1 = x \cdot \binom{y+1}{2} = \frac{x(y+1)y}{2}$$

a konečně počet P_2 úseček v obou podstavách je dán vzorcem

$$P_2 = 2 \cdot \binom{x}{2} = x(x-1).$$

Odtud již pro hledaný počet P úseček, které procházejí vnitřními body válce, dostaneme hledaný vzorec:

$$P = P_0 - P_1 - P_2 = \frac{x(y+1)(xy+x-1)}{2} - \frac{x(y+1)y}{2} - x(x-1) =$$
$$= \frac{x(x-1)(y^2+2y-1)}{2}.$$

Pro odpovídající počet Q úseček, které procházejí vnitřními body druhého válce s obvodem podstavy y a výškou x, zřejmě platí analogický vzorec

$$Q = \frac{y(y-1)(x^2+2x-1)}{2}.$$

Pro porovnání obou počtů P a Q upravíme jejich rozdíl $P - Q$ (s vědomím, že ten bude násobkem dvojčlenu $x - y$, neboť pro $x = y$ zřejmě platí $P = Q$):

$$\begin{aligned}
2(P-Q) &= (x^2-x)(y^2+2y-1) - (y^2-y)(x^2+2x-1) = \\
&= (x^2y^2 - xy^2 + 2x^2y - 2xy - x^2 + x) - \\
&\quad - (x^2y^2 - x^2y + 2xy^2 - 2xy - y^2 + y) = \\
&= 3xy(x-y) - (x-y)(x+y) + (x-y) = \\
&= (x-y)(3xy - x - y + 1).
\end{aligned}$$

V případě $x > y$ jako větší vyjde číslo P, neboť ukážeme, že výraz $3xy - x - y + 1$ je kladný: z $y \geqq 2$ máme $3xy \geqq 6x$, a proto

$$3xy - x - y - 1 \geqq 5x - y + 1 > 4x + 1 > 0.$$

Poznámka. Popišme kratší způsob určení hledaného počtu úseček, a to opět pro válec s obvodem podstavy x a výškou y.

Kolmým průmětem každé počítané úsečky do podstavy je jedna z $\frac{1}{2}x(x-1)$ úseček, které spojují x bodů na hraniční kružnici. Do jedné z těchto úseček se vždy promítne $(y+1)^2 - 2 = y^2 + 2y - 1$ počítaných úseček, neboť $y + 1$ je počet spojovaných bodů se stejným průmětem a od součinu $(y+1)(y+1)$ je třeba odečíst číslo 2 za dvě spojnice ležící v podstavách. Hledaný počet P je tedy roven

$$P = \frac{x(x-1)(y^2+2y-1)}{2}.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 4 body za určení počtu úseček s body uvnitř válce a další 2 body pak za zdůvodnění, který z obou počtů je větší. První 4 body lze částečně udělovat takto: po 1 bodu za určení čísel P_0, P_1, P_2 a 1 bod za správný výsledný dopočet P.

2. *V rovině je dána přímka q a bod A, který na ní neleží. Určete v této rovině množinu středů S všech čtverců $ABCD$ takových, že bod B leží na přímce q.*

Řešení. Uvažujme přímku p, která prochází bodem A a je kolmá na přímku q. Označme P patu kolmice p. S každým čtvercem daných vlastností lze uvažovat čtverec, který je s ním symetrický podle přímky p a rovněž vyhovuje podmínkám úlohy. Odtud plyne, že vyšetřovaná množina středů S všech čtverců $ABCD$ daných vlastností je rovinný útvar, který je symetrický podle přímky p. Uvažujme nyní takový čtverec, jehož vrcholy jsou označeny A, B, C, D proti směru chodu hodinových ručiček.

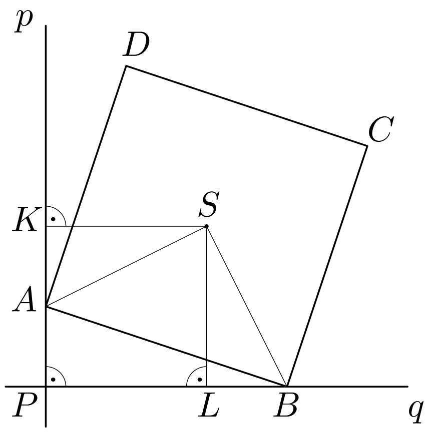
Dále rozlišíme tři případy polohy jeho vrcholů C, D v rovině:

a) oba vrcholy C, D leží v polorovině qA (obr. 2.1),

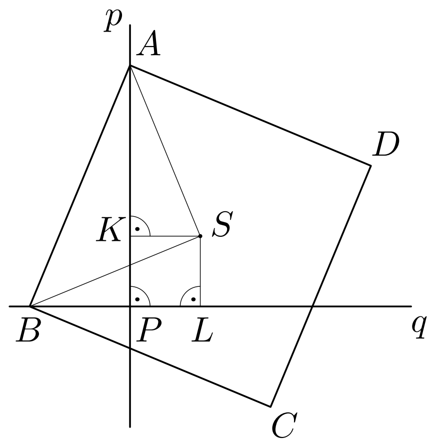
b) pouze vrchol D leží v polorovině qA (obr. 2.2),

c) žádný z vrcholů C, D neleží v polorovině qA (obr. 2.3).

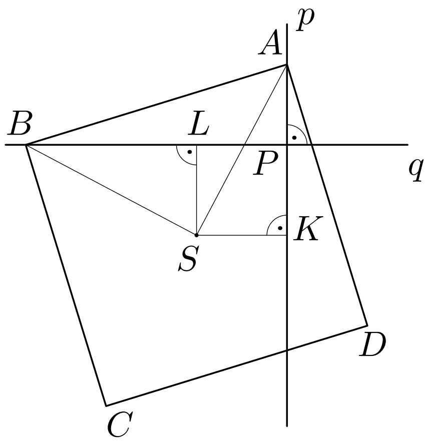
V případě a) označme K, L po řadě paty kolmic ze středu S uvažovaného čtverce $ABCD$ na přímky p, q. Vzhledem k tomu, že platí $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle KSL| = 90^\circ$, je pravoúhlý trojúhelník BSL obrazem pravoúhlého trojúhelníku ASK v otočení se středem S o úhel $+90^\circ$. Proto platí $|SK| = |SL|$. Stejný závěr



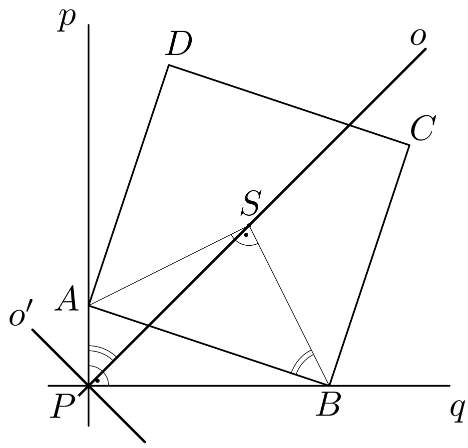
Obr. 2.1



Obr. 2.2



Obr. 2.3



Obr. 2.4

zdůvodníme obdobně i v případech b) a c) (obr. 2.2 a 2.3). Střed S uvažovaného čtverce $ABCD$ tudíž vždy leží na ose o úhlu KPL.

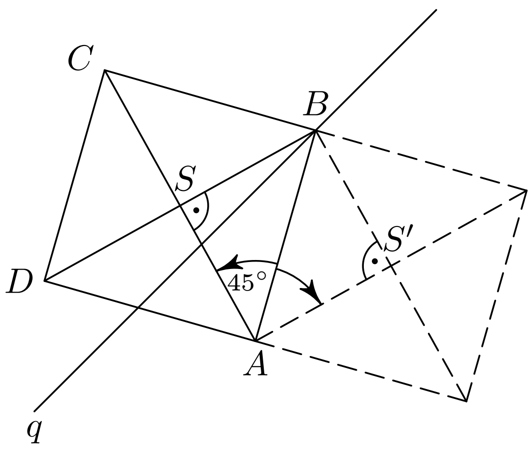
Naopak ke každému bodu S přímky o lze snadno sestrojit čtverec $ABCD$, jehož středem je bod S a jehož vrchol B leží na přímce q.

Závěr: Hledanou množinou bodů je dvojice vzájemně kolmých přímek o a o', které procházejí bodem P a svírají s přímkami p a q úhel $45°$ (obr. 2.4).

Jiné řešení. Využijeme vlastností obvodových úhlů, a to pro všechny tři výše popsané případy. I zde ukážeme řešení pouze pro případ z obr. 2.1.

Vzhledem k tomu, že platí $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle APB| = 90°$, je možno čtyřúhelníku $APBS$ opsat kružnici. Odtud na základě věty o obvodových úhlech dostáváme $|\sphericalangle APS| = |\sphericalangle ABS| = 45°$. Střed S uvažovaného čtyřúhelníku $ABCD$ leží tedy na ose úhlu APB.

Jiné řešení. Uvažujme libovolný bod B přímky p (obr. 2.5). Ke každému takovému bodu můžeme sestrojit čtverec $ABCD$ dvěma způsoby. Protože troj-



Obr. 2.5

úhelník ASB, resp. $AS'B$ je rovnoramenný pravoúhlý s úhlem 45° při vrcholu A, dostaneme střed S každého takového čtverce $ABCD$ složením otočení kolem středu A o úhel $\pm 45°$ a stejnolehlosti se středem A a koeficientem $\dfrac{|AS|}{|AB|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Středy S všech uvažovaných čtverců $ABCD$ tedy vyplní dvě (navzájem kolmé) přímky $q' = AS$ a $q'' = AS'$, které dostaneme jako obraz přímky q v popsaných zobrazeních.

Návodná úloha:
Je dán čtverec $ABCD$. Úhlopříčka čtverce $KLMN$ je shodná se stranou čtverce $ABCD$ a vrcholy K a M leží na obvodě čtverce $ABCD$. Určete množinu všech vrcholů L všech takových čtverců $KLMN$. [19. MO, B–I–5]

4. *Je dán čtyřstěn, v němž každé dvě protilehlé hrany jsou shodné. Uvnitř čtyřstěnu existuje bod M, který je stejně vzdálen od všech jeho stěn. Dokažte, že každá výška daného čtyřstěnu je rovna čtyřnásobku vzdálenosti bodu M od jeho stěn.*

Řešení. Uvažujme čtyřstěn $ABCD$, pro jehož délky hran podle zadání platí

$$|AB| = |CD| = p, \quad |BC| = |DA| = q, \quad |CA| = |BD| = r.$$

Stěny uvažovaného čtyřstěnu jsou tvořeny čtyřmi shodnými trojúhelníky (o stranách p, q, r), tudíž ze vzorce pro objem jehlanu plyne, že všechny čtyři tělesové výšky mají stejnou velikost v. Uvažujme dále uvnitř čtyřstěnu $ABCD$ bod M, který má od všech jeho stěn stejnou vzdálenost d. Vzhledem k tomu, že čtyřstěny $ABCM$, $ABDM$, $BCDM$ a $CADM$ mají shodné výšky z vrcholu M i odpovídající protilehlé stěny, mají i stejný objem, který se tudíž rovná čtvrtině objemu celého čtyřstěnu $ABCD$. Protože čtyřstěny $ABCD$ a $ABCM$ mají společnou stěnu ABC, musí platit $v = 4d$. Tím je důkaz ukončen.

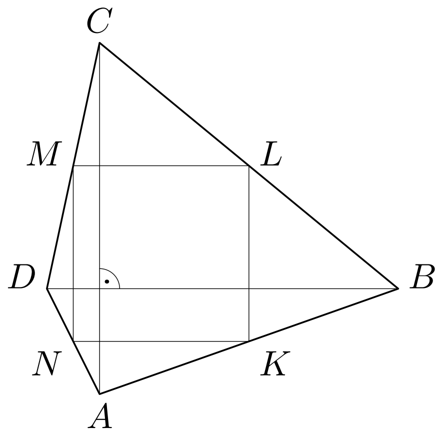
Pomocné úlohy:

1. Zopakujte se žáky vzorec pro výpočet objemu V jehlanu o podstavě s obsahem P a výškou v ($V = \frac{1}{3}Pv$). Jeho užitím řešte následující úlohy:
2. Nechť T je těžiště stěny ABC daného čtyřstěnu $ABCD$. Dokažte, že čtyřstěny $ABDT$, $BCDT$ a $CADT$ mají stejný objem.
3. Je dán pravidelný čtyřstěn o hraně délky h. Dokažte, že všechny jeho vnitřní body mají týž součet vzdáleností od všech stěn daného čtyřstěnu. Vyjádřete tento součet pomocí délky h.

6. *Jaký největší obsah může mít konvexní čtyřúhelník, v němž obě úsečky spojující středy protilehlých stran jsou shodné a mají danou délku d?*

Řešení. Označme $ABCD$ uvažovaný konvexní čtyřúhelník a K, L, M a N označme po řadě středy jeho stran AB, BC, CD a DA. Čtyřúhelník $KLMN$ je vždy rovnoběžník (někdy nazývaný Varignonův rovnoběžník čtyřúhelníku $ABCD$), neboť jeho strany KL, LM, MN, NK jsou po řadě středními příčkami v trojúhelnících ABC, BCD, CDA, DAB. Platí tedy $KL \parallel AC \parallel MN$ a $LM \parallel BD \parallel NK$. Mají-li obě úhlopříčky KM a LN v rovnoběžníku $KLMN$ tutéž délku d, je $KLMN$ pravoúhelník, v němž platí $KL \perp LM$, a je tudíž i $AC \perp BD$. Dokázali jsme, že úhlopříčky AC a BD čtyřúhelníku $ABCD$ jsou navzájem kolmé.

Obsah rovnoběžníku $KLMN$ je roven polovině obsahu čtyřúhelníku $ABCD$ (viz pomocnou úlohu 1), proto má čtyřúhelník $ABCD$ největší obsah, právě když má největší obsah příslušný pravoúhelník $KLMN$. Mezi všemi pravoúhelníky o dané úhlopříčce d má největší obsah čtverec, jehož obsah je $\frac{1}{2}d^2$. Největší možný obsah čtyřúhelníku $ABCD$ je tedy d^2. Takový obsah má každý uvažovaný čtyřúhelník, který má shodné a navzájem kolmé úhlopříčky délky $d\sqrt{2}$ (například ten na obr. 6.1).



Obr. 6.1

Pomocné úlohy:

1. Dokažte, že Varignonův rovnoběžník každého konvexního čtyřúhelníku má obsah rovný polovině obsahu celého čtyřúhelníku. [Dvojice trojúhelníků AKN, CML a BLK, DNM (obr. 6.1) mají dohromady obsah $\frac{1}{4}$ obsahu celého čtyřúhelníku (jak plyne z vlastností střední příčky trojúhelníku), takže celkem je obsah všech čtyř uvedených trojúhelníků roven polovině obsahu celého čtyřúhelníku.]
2. Ukažte, že mezi všemi pravoúhelníky o dané délce úhlopříčky má největší obsah čtverec.
3. Nechť kolmé průměty průsečíku úhlopříček daného konvexního čtyřúhelníku na jednotlivé jeho strany leží uvnitř těchto stran. Dokažte, že uvažované průměty leží na téže kružnici, právě když středy stran daného čtyřúhelníku leží na kružnici. [30. MO, B–II–2]

2. Popište konstrukci trojúhelníku ABC, v němž při obvyklém označení platí $t_a = 9\,\mathrm{cm}$, $t_b = 12\,\mathrm{cm}$ a $3c = 2t_c$.

4. V daném ostroúhlém trojúhelníku ABC označme A_1, B_1 paty výšek z vrcholů A, B. Určete velikosti jeho vnitřních úhlů při vrcholech B a C, je-li velikost úhlu BAC rovna $40°$ a jsou-li poloměry kružnic vepsaných trojúhelníkům A_1B_1C a ABC v poměru $1 : 2$.

2. Označme T těžiště uvažovaného trojúhelníku ABC, S střed jeho strany AB. Z podmínky $3c = 2t_c$ plyne $\frac{1}{3}t_c = \frac{1}{2}c$. Platí tedy $|SA| = |SB| = |ST| = \frac{1}{2}c$. To znamená, že bod S je středem kružnice opsané trojúhelníku ABT, která je Thaletovou kružnicí sestrojenou nad průměrem AB. Platí proto $|\sphericalangle ATB| = 90°$. Odtud již bezprostředně plyne konstrukce:

Nejprve podle věty *sus* sestrojíme trojúhelník ABT, v němž platí

$$|AT| = \frac{2}{3}t_a = 6\,\mathrm{cm}, \quad |BT| = \frac{2}{3}t_b = 8\,\mathrm{cm} \quad \text{a} \quad |\sphericalangle ATB| = 90°,$$

a dále už snadno sestrojíme trojúhelník ABC.

Úloha má právě jedno řešení.

Za úplné řešení a sestrojení trojúhelníku ABC udělte 6 bodů.

4. Označme α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC. Paty výšek A_1 a B_1 (obr. 3) leží na Thaletově kružnici s průměrem AB, čtyřúhelník ABA_1B_1 je tedy tětivový a pro jeho protější úhly platí $|\sphericalangle CAB| + |\sphericalangle BA_1B_1| = 180°$. Je tudíž $|\sphericalangle B_1A_1C| = \alpha$, takže trojúhelníky ABC a A_1B_1C jsou podobné podle věty *uu*.

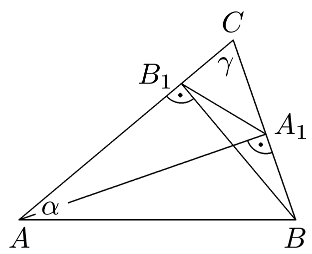
Označíme-li ϱ a ϱ_1 poloměry kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům ABC a A_1B_1C, plyne ze zmíněné podobnosti

$$\cos\gamma = \frac{|B_1C|}{|BC|} = \frac{|A_1C|}{|AC|} = \frac{\varrho_1}{\varrho} = \frac{1}{2},$$

takže $\gamma = 60°$. Vzhledem k tomu, že $\alpha = 40°$, dostáváme konečně $\beta = 80°$.

Tím je úloha vyřešena.

Za úplné vyřešení úlohy udělte 6 bodů, přitom za důkaz podobnosti podobnosti trojúhelníků ABC a A_1B_1C dejte 3 body.



Obr. 3

2. Nechť obě úsečky spojující středy protilehlých stran konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ mají stejnou délku. Dokažte, že úhlopříčky AC a BD jsou navzájem kolmé a že platí rovnost

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |BC|^2 + |DA|^2.$$

2. Označme K, L, M, N po řadě středy stran AB, BC, CD, DA uvažovaného konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Čtyřúhelník $KLMN$ je rovnoběžník, neboť každá z jeho stran je střední příčkou v jednom ze čtyř trojúhelníků ABC, BCD, CDA a DAB, na něž jednotlivé úhlopříčky daný čtyřúhelník rozdělí, takže $KL \parallel AC \parallel MN$ a $LM \parallel BD \parallel MK$ (bylo to využito i v úloze B–I–6). Mají-li navíc jeho úhlopříčky KM a LN tutéž délku, je

$KLMN$ pravoúhelník, a proto jsou úhlopříčky AC a BD daného konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ navzájem kolmé.

Označme P průsečík úhlopříček AC a BD čtyřúhelníku $ABCD$. Užijeme-li Pythagorovu větu postupně na pravoúhlé trojúhelníky ABP, BCP, CDP a DAP, dostaneme

$$\begin{aligned}
|PA|^2 + |PB|^2 &= |AB|^2,\\
|PB|^2 + |PC|^2 &= |BC|^2,\\
|PC|^2 + |PD|^2 &= |CD|^2,\\
|PD|^2 + |PA|^2 &= |DA|^2.
\end{aligned}$$

Součtem první a třetí, resp. druhé a čtvrté rovnosti vyjde

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 = |BC|^2 + |DA|^2,$$

což jsme měli dokázat.

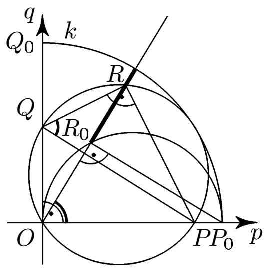
Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za důkaz kolmosti udělte 3 body, za důkaz uvedené rovnosti udělte 3 body, i když kolmost úhlopříček je pouze předpokládána (a ne dokázána).

2. *Uvažujme shodné polokružnice, které leží v daném pravém úhlu a jejichž koncové body leží každý na jiném jeho rameni. Určete množinu, kterou vyplní body všech těchto polokružnic.*

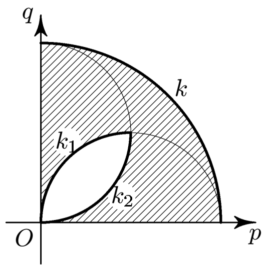
Řešení. Označme p, q ramena daného pravého úhlu, O jeho vrchol, P, Q příslušně koncové body průměru uvažované polokružnice a $|PQ| = 2r$. Zvolme pevně vnitřní bod R polokružnice a zkoumejme, jaký útvar body R vyplní. Trojúhelníky QPR a PQO jsou pravoúhlé, proto body O, P, Q, R leží na jedné kružnici (obr. 1). Odtud podle věty o obvodových úhlech plyne, že

$$|\sphericalangle RQP| = |\sphericalangle ROP|.$$

Jelikož je $|\sphericalangle RQP|$ pro pevný bod R konstantní, leží bod R na polopřímce s počátkem O, která svírá s polopřímkou p úhel o velikosti $|\sphericalangle RQP|$.



Obr. 1



Obr. 2

Pro vzdálenost $|OR|$ zřejmě platí $|OR| \leqq |PQ|$, protože OR je tětiva kružnice s průměrem PQ.

Vzhledem k tomu, že hledaná množina je zřejmě souměrná podle osy daného pravého úhlu, stačí vyšetřit případ, kdy $|\sphericalangle POR| \geqq 45°$. V tomto případě je $|\sphericalangle RQO| \geqq 90°$, takže $|OR| \geqq |QR|$. Označme P_0 bod polopřímky OP, pro který $|OP_0| = |PQ|$, R_0 jeho kolmý průmět na polopřímku OR (obr. 1). Protože trojúhelníky OP_0R_0 a QPR jsou shodné pravoúhlé trojúhelníky, je $|OR_0| = |QR|$. Pro vzdálenost $|OR|$ tedy platí $|OR_0| \leqq |OR| \leqq 2r$. Bod R tedy leží v té části polopřímky OR, která je omezena kružnicí k_1 nad průměrem OP_0 a čtvrtkružnicí k se středem O a poloměrem OP_0. Analogicky pro $|\sphericalangle POR| \leqq 45°$ vyjde, že hledané body R leží v části polopřímky OR, která je omezena kružnicí k_2 nad průměrem OQ_0 a čtvrtkružnicí k.

Zbývá ukázat, že celá množina vyšrafovaná na obr. 2 je hledanou množinou bodů R. K tomu stačí si uvědomit, že pokud bod R leží uvnitř čtvrtkružnice k a vně aspoň jedné z kružnic k_1, k_2, existuje aspoň jedna (případně dvě, leží-li bod vně obou kružnic k_1, k_2) kružnice s daným průměrem $2r$ procházející body O a R, jejíž střed leží uvnitř útvaru omezeného polopřímkami p, q a čtvrtkružnicí k. Tato kružnice se bude vnitřně dotýkat k a protne každou z úseček OP_0, OQ_0. Uvedené průsečíky budou krajními body hledané polokružnice obsahující uvažovaný bod R.

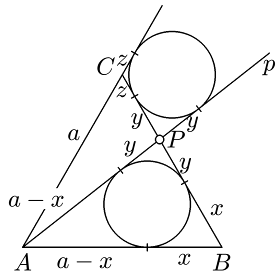
Závěr: Hledanou množinou bodů je útvar (včetně své hranice) vyšrafovaný na obr. 2, tj. čtvrtkruh se středem O a poloměrem $2r$ bez vnitřku „čočky" omezené dvěma čtvrtkružnicemi o poloměru r.

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Dokažte, že součet protějších vnitřních úhlů v konvexním čtyřúhelníku, jemuž lze opsat kružnici, je $180°$.
2. Určete množinu středů všech úseček konstantní délky d, jejichž jeden konec se pohybuje po jedné a druhý konec po druhé ze dvou vzájemně kolmých přímek. [Kružnice se středem v průsečíku přímek a poloměrem $\frac{1}{2}d$.]
3. Uvnitř pravého úhlu je dán bod B. Sestrojte polokružnici s daným průměrem d, která prochází bodem B, jeden její koncový bod leží na jednom rameni a druhý na druhém rameni pravého úhlu.
4. V rovině je dána úsečka AB. V jedné z polorovin vyťatých přímkou AB uvažujme všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC s přeponou AB. Označme X patu kolmice vedené bodem B na osu úhlu BCA. Dokažte, že osy všech takových úhlů BCA procházejí pevným bodem, a vyšetřete množinu všech bodů X. [21. roč. MO, C–P–3]
5. Je dán rovnostranný trojúhelník PQR. Určete množinu všech vrcholů A takových trojúhelníků ABC, jejichž strany AB, BC, CA obsahují v uvedeném pořadí vrcholy P, Q, R, a pro délky jejich stran platí $|AB| \geqq |AC| \geqq |BC|$. [21. roč. MO, C–II–1a]
6. Je dána kružnice k s průměrem AB. Na kružnici k zvolíme bod $X \neq A, B$ a na polopřímce AX sestrojíme bod Y tak, aby platilo $|AY| = |AX| + |XB|$. Vyšetřete množinu středů úseček AY pro všechny takové body X. [24. roč. MO, C–P–3]

4. *Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Na straně BC najděte bod P tak, aby kružnice vepsaná trojúhelníku ABP a kružnice připsaná straně PC trojúhelníku APC byly shodné.*

Řešení. Nechť a značí délku strany rovnostranného trojúhelníku ABC. Dále označme délky úseků tečen z bodů A, B, C a P k oběma uvažovaným kružnicím stejně jako na obr. 3. Poloměry obou shodných kružnic označme r. Z obrázku je patrné, že platí



Obr. 3

$$a + z = a - x + 2y, \qquad \text{odkud} \qquad x + z = 2y. \qquad (1)$$

Při vyjádření délky a strany BC obdržíme dále

$$x + 2y + z = a. \qquad (2)$$

Ze vztahů (1) a (2) bezprostředně plyne

$$x + z = 2y = \frac{a}{2}, \qquad \text{tedy} \qquad y = \frac{a}{4}.$$

Dále vidíme, že platí dvojice vztahů

$$x = r \operatorname{cotg} 30^\circ = r\sqrt{3} \qquad \text{a} \qquad z = r \operatorname{cotg} 60^\circ = r\frac{\sqrt{3}}{3},$$

z nichž plyne

$$x = 3z. \tag{3}$$

Dosazením (3) do (2) dostaneme po snadné úpravě

$$\frac{a}{2} = x + z = 3z + z = 4z, \qquad \text{odkud} \qquad z = \frac{a}{8}.$$

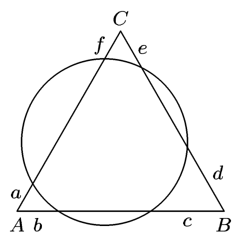
Celkově tedy

$$|BP| = x + y = 3z + y = \frac{3}{8}a + \frac{1}{4}a = \frac{5}{8}a, \quad |CP| = a - |BP| = \frac{3}{8}a.$$

Odtud již okamžitě plyne konstrukce bodu P.

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Konvexnímu čtyřúhelníku $ABCD$ lze vepsat kružnici, právě když pro jeho strany a, b, c, d platí $a + c = b + d$. Dokažte.
2. Určete délky stran pravoúhlého trojúhelníku ABC, je-li poloměr jeho opsané kružnice $r = 5\,\mathrm{cm}$ a poloměr jeho vepsané kružnice $\varrho = 2\,\mathrm{cm}$. [6 cm, 8 cm, 10 cm.]
3. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká strany AB v bodě U, kružnice vně připsaná straně AB se jí dotýká v bodě V. Dokažte, že při obvyklém značení platí:
$$|AU| : |BU| = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} : \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}, \quad |AV| : |BV| = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} : \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}.$$
4. Vzájemná poloha rovnostranného trojúhelníku ABC a kružnice k je znázorněna na obr. 4. Dokažte, že pro vyznačené délky platí
$$a + c + e = b + d + f.$$
5. V trojúhelníku ABC je sestrojena těžnice CC_1 a do trojúhelníků ACC_1 a BCC_1 jsou vepsány kružnice. Dokažte, že vzdálenost dotykových bodů těchto kružnic s těžnicí CC_1 je (při obvyklém označení stran trojúhelníku) $\frac{1}{2}(a - b)$.
6. Do lichoběžníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$) jsou vepsány kružnice k_1, k_2, které se v uvedeném pořadí dotýkají stran a, c, d, resp. a, c, b. Jestliže pro délky stran lichoběžníku platí $a + c > b + d$ a jeho výška má délku $\frac{1}{2}(a + c - b - d)$, pak mají kružnice k_1, k_2 vnější dotyk. Dokažte. [28. roč. MO, C–P–3]



Obr. 4

5. *Z koule o poloměru R je oddělena kulová úseč o výšce v ($v < R$). Této úseči je vepsána koule K o poloměru $\frac{1}{2}v$. Dále je do úseče vepsáno osm shodných menších koulí, z nichž každá se dotýká koule K. Žádné dvě z nich nemají společný vnitřní bod a každá z nich se dotýká právě dvou ostatních. Určete poměr $v : R$.*

Řešení. Označme S střed koule, z níž je úseč odříznuta, O střed koule K a Q střed jedné menší vepsané koule o poloměru r. Patu kolmice z bodu Q na přímku SO označme P. Obr. 5 představuje řez útvaru rovinou SOQ. Pro vyznačené úsečky platí

$$|QO| = \frac{v}{2} + r,\ |PO| = \frac{v}{2} - r,\ |QS| = R - r,\ |PS| = R + r - v.$$

Z pravoúhlých trojúhelníků OQP a QSP plynou rovnosti

$$\left(\frac{v}{2} + r\right)^2 - \left(\frac{v}{2} - r\right)^2 = |QP|^2 = (R - r)^2 - (R + r - v)^2,$$

odkud

$$|PQ|^2 = 2rv, \quad r = \frac{2Rv - v^2}{4R}. \tag{1}$$

Vzdálenost středu každé menší koule je od osy úseče je $|PQ|$, vzdálenost středů Q_1, Q_2 dvou sousedních menších koulí je $2r$. Použijeme-li kosinovou větu na trojúhelník Q_1Q_2P, dostaneme (obr. 6)

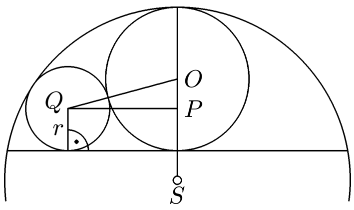
$$\cos\varphi = \frac{2|QP|^2 - 4r^2}{2|QP|^2} = 1 - \frac{r}{v}. \tag{2}$$

Jelikož menších koulí má být osm, je $\varphi = 45°$ a $\cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. vyjádříme-li z druhé rovnosti v (1)

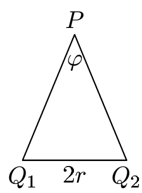
$$\frac{r}{v} = \frac{2R - v}{4R} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{v}{R},$$

plyne odtud podle (2)

$$\frac{v}{R} = 2\left(1 - 2\frac{r}{v}\right) = 2\bigl(2\cos\varphi - 1\bigr) = 2\bigl(\sqrt{2} - 1\bigr).$$



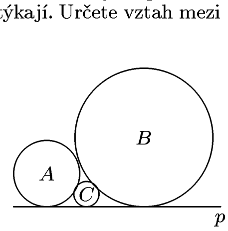
Obr. 5



Obr. 6

Návodné úlohy:

1. Do polokružnice k_1 o průměru $2R$ je vepsána kružnice k_2 o průměru R. Vypočtěte poloměr kružnice k_3, která se dotýká vně kružnice k_2 a zevnitř polokružnice k_1 i jejího průměru. [$\frac{1}{4}R$. Viz též 38. roč. MO, C–II–2.]
2. Do mezikruží o vnitřním poloměru r a vnějším poloměru R je vepsáno n kružnic „za sebou“ tak, že se každé dvě sousední dotýkají. Určete vztah mezi r, R a n. [$\dfrac{R}{r} = \dfrac{1+\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}$]
3. Kružnice se středy A, B, C a poloměry a, b, c se dotýkají navzájem i přímky p podle obr. 7. Vyjádřete poloměr c pomocí poloměrů a, b. [$c = \frac{ab}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$]
4. Dvě koule $k_1(A,a)$, $k_2(B,b)$ se vně dotýkají a obě se ještě dotýkají roviny a. Určete poloměr koule $k_3(C,c)$, která se vně dotýká koulí k_1 a k_2 a roviny a, přičemž rovina ABC je kolmá na rovinu a. [Řešení: Stejné jako v úloze 3.]



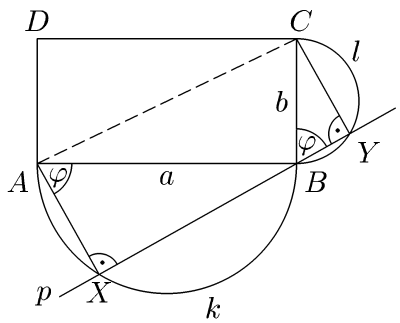
Obr. 7

2. Je dán pravouhlý trojúhelník ABC, nad jehož odvěsnami AB a BC (jako nad průměry) jsou vně trojúhelníku sestrojeny po řadě polokružnice k a l. Vrcholem B veďte přímku p, která protíná polokružnice k a l po řadě v bodech X a Y tak, aby čtyřúhelník $AXYC$ měl co největší obvod.

4. Nechť A a B jsou různé body roviny. Dále je dán orientovaný úhel ω $(0° < \omega < 90°)$. Pro libovolný bod X označme po řadě X_A, X_B obrazy bodu X v otočeních kolem středů A a B o úhel ω. Najděte všechny takové body X, pro něž je trojúhelník XX_AX_B rovnostranný.

2. Označme $|AB| = a$, $|BC| = b$ a φ velikost úhlu XAB ($0 < \varphi < 90°$, obr. 1). Zřejmě je také $|\sphericalangle CBY| = 90° - |\sphericalangle ABX| = |\sphericalangle XAB| = \varphi$. Protože délka strany AC čtyřúhelníku $AXYC$ na poloze bodů X, Y nezávisí, stačí vyšetřovat délku d lomené čáry $AXYC$, pro kterou platí

$$\begin{aligned} d &= |AX| + |XB| + |BY| + |YC| = \\ &= a\cos\varphi + a\sin\varphi + b\cos\varphi + b\sin\varphi = \\ &= (a+b)(\sin\varphi + \cos\varphi) = \\ &= \sqrt{2}(a+b)\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi\Big) = \\ &= \sqrt{2}(a+b)\sin(\varphi + 45°) \leqq \sqrt{2}(a+b). \end{aligned}$$



Obr. 1

Přitom v poslední nerovnosti nastane rovnost, právě když $\varphi + 45° = 90°$, tj. právě když $\varphi = 45°$.

Odtud jednoduše plyne konstrukce přímky p.

Poznámka. Hodnota d je maximální, právě když je maximální hodnota d^2, proto můžeme místo d vyšetřovat hodnotu d^2:

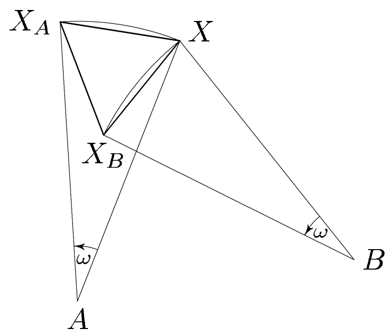
$$d^2 = (a+b)^2(\sin^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\varphi) = (a+b)^2(1 + \sin 2\varphi) \leqq 2(a+b)^2.$$

Odtud vychází, že $d \leqq \sqrt{2}(a+b)$, přičemž maximální hodnoty dosahuje d, právě když $\sin 2\varphi = 1$, tj. $\varphi = 45°$.

Jiné řešení. Jak jsme už zjistili výše, je $|\sphericalangle CBY| = |\sphericalangle XAB|$, takže oba pravoúhlé trojúhelníky BCY a ABX jsou podobné s koeficientem podobnosti $\lambda = |BC| : |AB| = b : a$. Pro délku d lomené čáry $AXYC$ tedy platí, že $d = (1+\lambda)(|AX| + |XB|)$ bude maximální, právě když bude maximální součet $|AX| + |XB|$. Z rovnosti $(|AX| + |XB|)^2 = a^2 + 2|AX||XB|$ plyne, že uvedený součet bude maximální, právě když bude maximální obsah $\frac{1}{2}|AX||XB|$ trojúhelníku ABX, tedy právě když bude trojúhelník ABX rovnoramenný, tj. $|AX| = |XB|$ a $\varphi = 45°$.

Za úplné řešení je 6 bodů. Konstrukce přímky p není nutná.

4. Předpokládejme, že bod X má požadovanou vlastnost, tj. že trojúhelník XX_AX_B je rovnostranný. Potom jsou trojúhelníky AXX_A a BXX_B shodné, neboť jsou rovnoramenné se shodným vrcholovým úhlem a shodnou základnou (obr. 2). Proto $|AX| = |BX|$. A protože $|\sphericalangle X_AXX_B| = 60°$, je trojúhelník BXX_B obrazem trojúhelníku AXX_A v otočení kolem vrcholu X o úhel $60°$. V tomto otočení je obrazem bodu A bod B, proto $|\sphericalangle AXB| = 60°$. To znamená, že trojúhelník ABX je rovnostranný. Takové body X existují v rovině právě dva.

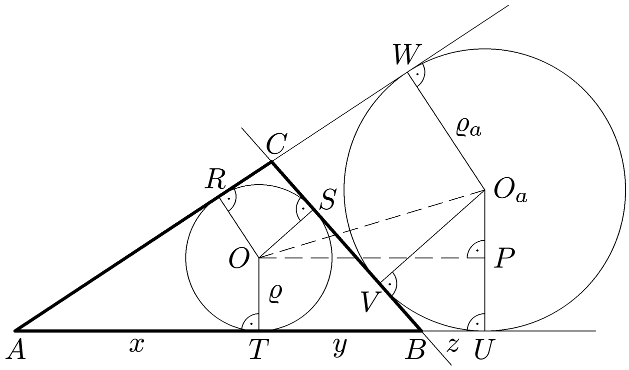


Obr. 2

Za úplné řešení je 6 bodů.

2. V trojúhelníku ABC známe $a = |BC|$, poloměr ϱ kružnice vepsané a poloměr ϱ_a kružnice vně připsané straně BC. Dokažte, že vzdálenost středů obou kružnic se rovná $\sqrt{a^2 + (\varrho_a - \varrho)^2}$.

2. Označme podle obr. 1 odpovídající úseky tečen k oběma vepsaným kružnicím



Obr. 1

$|AT| = |AR| = x$, $|BT| = |BS| = y$, $|BU| = |BV| = z$. Navíc ještě platí $|CR| = |CS|$, $|CW| = |CV|$, takže

$$|AW| = |AR| + |RC| + |CW| = |AR| + |RC| + |CS| + |SV| =$$
$$= x + 2|CS| + y - z$$

a zároveň

$$|AW| = |AU| = x + y + z.$$

Je tedy $|CS| = z$ a také

$$a = |CB| = z + y = |TU| = |OP|.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku OPO_a podle Pythagorovy věty pak plyne

$$|OO_a| = \sqrt{|OP|^2 + |PO_a|^2} = \sqrt{a^2 + (\varrho_a - \varrho)^2},$$

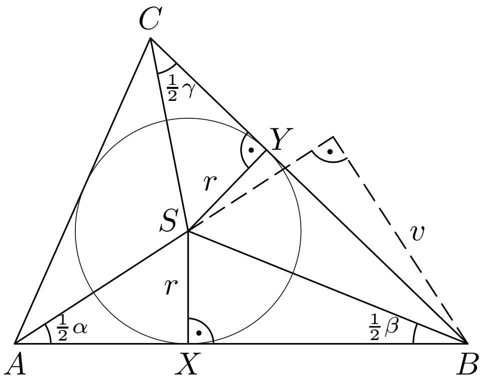
což bylo dokázati.

Za úplné řešení je 6 bodů. Za důkaz vztahu $|TU| = a$ dejte 4 body. Pokud řešitel přijde na to, že se úkol redukuje na důkaz rovnosti $|TU| = a$, tu ale nedokáže, udělte 2 body. Zbývající výpočet použitím Pythagorovy věty oceňte 2 body.

2. *Označme S střed kružnice vepsané libovolnému trojúhelníku ABC. Dokažte, že rovnost $|AS| \cdot |BS| = |CS| \cdot |AB|$ platí, právě když je úhel ACB pravý.*

Tato úloha patří mezi ty vděčné úlohy, které se dají řešit více způsoby. My uvedeme tři řešení.

Řešení 1. Úhly v obecném trojúhelníku ABC označme obvyklým způsobem, poloměr vepsané kružnice označme r a její dotykové body se stranami AB, BC označme po řadě X, Y (obr. 1).



Obr. 1

Úsečky AS a BS jsou stranami trojúhelníku ASB. Jeho obsah můžeme vyjádřit dvěma způsoby:

$$S(ASB) = \frac{1}{2}|AS|v = \frac{1}{2}|AB|r,$$

neboť výška na stranu AB tohoto trojúhelníku je r; pro výšku v na stranu AS přitom platí $v = |BS| \cos \frac{1}{2}\gamma$, protože vedlejší úhel při vrcholu S má velikost $\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta = 90° - \frac{1}{2}\gamma$. Je tedy

$$|AS| \cdot |BS| \cos \frac{\gamma}{2} = |AB|r$$

a následující rovnosti jsou ekvivalentní:

$$\begin{aligned} |AS| \cdot |BS| &= |CS| \cdot |AB|, \\ |AB|r &= |CS| \cdot |AB| \cos \frac{\gamma}{2}, \\ r &= |CS| \cos \frac{\gamma}{2}. \end{aligned} \tag{1}$$

V pravoúhlém trojúhelníku CSY však platí $\cos \dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{|CY|}{|CS|}$, takže rovnost (1) je ekvivalentní rovnosti

$$r = |CY|,$$

což znamená, že trojúhelník CSY je rovnoramenný pravoúhlý a $\frac{1}{2}\gamma = 45°$. Je tedy daná rovnost ekvivalentní tomu, že $\gamma = 90°$.

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Řešení 2. Napíšeme si daný vztah jako rovnost podílů tak, aby to byly poměry stran v trojúhelnících, a budeme se snažit použít podobnost nebo sinovou větu.

V našem případě vyjdeme z rovnosti $\dfrac{|AS|}{|CS|} = \dfrac{|AB|}{|BS|}$. Trojúhelníky ASC a BSC ale podobné nejsou, proto zkusíme sinovou větu:

V trojúhelníku ASC platí $\dfrac{|AS|}{|CS|} = \dfrac{\sin \frac{1}{2}\gamma}{\sin \frac{1}{2}\alpha}$ a v trojúhelníku ASB zase $\dfrac{|AB|}{|BS|} = \dfrac{\sin |\sphericalangle ASB|}{\sin \frac{1}{2}\alpha}$. Odtud dostáváme následující ekvivalentní rovnosti:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} &= \frac{\sin |\sphericalangle ASB|}{\sin \frac{\alpha}{2}},\\
\sin \frac{\gamma}{2} &= \sin |\sphericalangle ASB|,\\
\sin \frac{\gamma}{2} &= \sin\Big(90^\circ + \frac{\gamma}{2}\Big),\\
\frac{\gamma}{2} &= 180^\circ - \Big(90^\circ + \frac{\gamma}{2}\Big),\\
\gamma &= 90^\circ.
\end{aligned}$$

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Řešení 3. Zkusíme vypočítat délky úseček AS, BS, CS, AB pomocí některých prvků trojúhelníku. My si zvolíme úhly trojúhelníku a poloměr r.

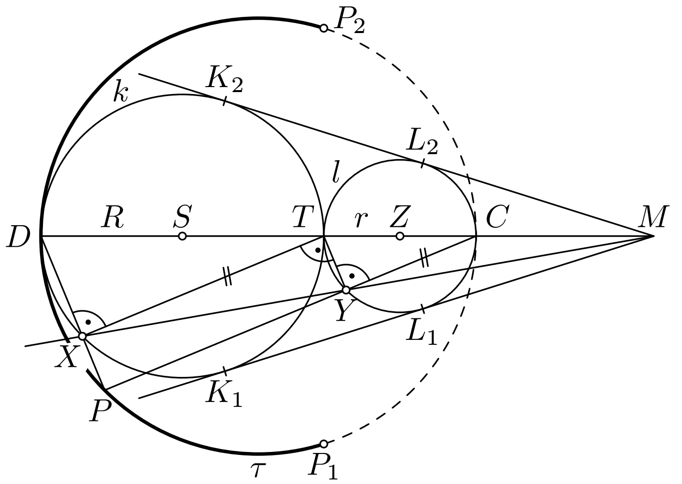
Zřejmě $|CS| = \dfrac{r}{\sin \frac{1}{2}\gamma}$, $|AS| = \dfrac{r}{\sin \frac{1}{2}\alpha}$, $|BS| = \dfrac{r}{\sin \frac{1}{2}\beta}$ a $|AB| = |AX| + |BX| = r \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha + r \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\beta$. Po dosazení dostaneme ekvivalentní rovnosti

$$\begin{aligned}
\frac{r}{\sin \frac{1}{2}\alpha} \cdot \frac{r}{\sin \frac{1}{2}\beta} &= \Big(r \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} + r \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2}\Big) \cdot \frac{r}{\sin \frac{1}{2}\gamma},\\
\sin \frac{\gamma}{2} &= \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} + \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2},\\
\sin \frac{\gamma}{2} &= \sin\Big(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\Big),\\
\sin \frac{\gamma}{2} &= \sin\Big(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\Big),\\
\sin \frac{\gamma}{2} &= \cos \frac{\gamma}{2},\\
\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} &= 1,\\
\gamma &= 90^\circ.
\end{aligned}$$

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

4. *Jsou dány kružnice k a l s různými poloměry, které se vně dotýkají v bodě T. Průsečíkem M jejich společných vnějších tečen veďme sečnu s obou kružnic. Označme X ten z obou průsečíků kružnice k se sečnou s, který je vzdálenější od bodu M. Podobně označme Y ten z obou průsečíků kružnice l se sečnou s, který je vzdálenější od bodu M. Nechť P je takový bod, že $XTYP$ je rovnoběžník. Určete množinu bodů P odpovídajících všem takovým sečnám s.*

Řešení. Označme S, Z středy obou kružnic k, l a R, r jejich poloměry (bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $r < R$). Označme dále C (D) od T různý průsečík kružnice l (k) s přímkou SZ a K_1, K_2, L_1, L_2 po řadě dotykové body obou společných vnějších tečen ke kružnicím k a l (obr. 2).



Obr. 2

Bod M je středem stejnolehlosti h obou kružnic s koeficientem R/r. Přitom je například $h(L_1) = K_1$, $h(Z) = S$, $h(C) = T$, $h(T) = D$, $h(Y) = X$. Odtud plyne, že přímky CY, TX jsou rovnoběžné ($h(CY) = TX$). Protože úhel CYT je pravý podle Thaletovy věty, je také $|\sphericalangle YTX| = 90°$ (TY je příčka rovnoběžek CY, TX). Rovnoběžník $XTYP$ je tedy vždy obdélník.

Zároveň je zřejmé, že body C, Y, P leží v přímce a podobně i body D, X, P leží v přímce. Je tudíž $|\sphericalangle CPD| = 90°$ a bod P leží na Thaletově kružnici τ nad průměrem CD. Leží na ní i vrcholy P_1, P_2 rovnoběžníků $K_1TL_1P_1$, $K_2TL_2P_2$, protože pro ně můžeme zopakovat předchozí úvahu (jako pro rovnoběžník $XTYP$).

Nyní už není problém ukázat, že hledanou množinou bodů je větší z oblouků P_1P_2 kružnice τ vyjma body P_1, P_2 a D (neboť body Y tvoří větší z oblouků L_1L_2 kružnice l vyjma body T, L_1, L_2).

Poznámka. V tomto období většina studentů asi ještě nebude mít probrané učivo o stejnolehlosti kružnic. Tuto překážku pomohou odstranit návodné úlohy na vlastnosti stejnolehlosti kružnic.

Ještě naznačíme hlavní myšlenky jiných dvou přístupů:

a) Abychom odhadli tvar hledané množiny, zvolíme několik význačných poloh přímky XY. Vhodné jsou následující polohy: a) $X = K_1$, $Y = L_1$ (PT je kolmé na

SZ), b) XS a YZ jsou kolmé na SZ (tehdy vyjde, že pata kolmice z bodu P na SZ leží ve středu J úsečky CD a $|JC| = |JP|$).

Z toho už se dá odhadnout, že bod P leží nejspíš na kružnici se středem J a poloměrem $\frac{1}{2}(R + r)$. Zbývá už jen dokázat (tedy obecně vypočítat), že vzdálenost $|PJ|$ je rovna $\frac{1}{2}(r + R)$. (Není to lehké.)

b) Pomocí shodných a podobných zobrazení je nejelegantnější následující postup: Pomocí souřadnic (bod M zvolíme za počátek souřadného systému) je $P = X + Y - T = Y + h(Y) - T = Y + \dfrac{R}{r}Y - T = \left(1 + \dfrac{R}{r}\right)Y - T$, bod P tedy vznikne z bodu Y (a všechny body Y tvoří větší z oblouků L_1L_2 kružnice l bez bodů T, L_1, L_2) složením stejnolehlosti se středem M a koeficientem $1 + \frac{R}{r}$ a posunutí o vektor $\boldsymbol{TM}$.

6. *Je dán rovnostranný trojúhelník XYZ s těžištěm T a stranou délky 5 cm. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$ s obsahem 8 cm^2 a stranou AB délky 2 cm tak, aby body X, Y, Z, T ležely po řadě na přímkách AB, BC, CD, DA.*

Podstatou řešení jsou následující dvě úlohy, jež mohou sloužit i jako úlohy návodné.

A. Jsou dány body K, L. Veďte jimi po řadě rovnoběžky k, l, je-li dána jejich vzdálenost d.

B. Jsou dány body K, L a přímka m. Veďte body K, L po řadě rovnoběžky k, l, které na přímce m vytínají úsečku dané délky d.

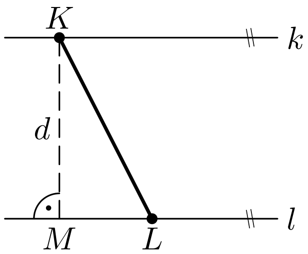
Řešení úlohy A (obr. 4). Nechť M je pata kolmice vedené z bodu K na přímku l. V trojúhelníku KLM s pravým úhlem při vrcholu M známe vrcholy K, L a délku odvěsny $|KM| = d$, vrchol M tedy umíme sestrojit (jako průsečík Thaletovy kružnice t nad průměrem KL s kružnicí $\kappa(K, d)$). Potom ML je přímka l.

Pokud bychom požadovali diskusi, víme, že počet řešení závisí na existenci průsečíku kružnic t a κ:

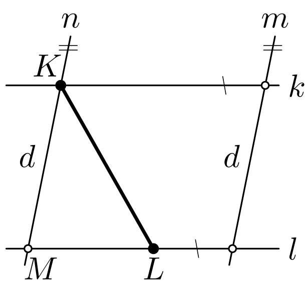
Pokud $|KL| < d$, nemá úloha řešení.

Pokud $|KL| = d$, má úloha jedno řešení (kolmice na KL).

Pokud $|KL| > d$, mají kružnice k a t dva průsečíky, takže úloha má dvě řešení.



Obr. 4



Obr. 5

Řešení úlohy B (obr. 5). Veďme bodem K rovnoběžku n s přímkou m a označme M její průsečík s přímkou l. Potom $|KM| = d$, takže konstrukce bodu M je zřejmá. Přímka l je pak určena body L a M.

Pokud bychom požadovali diskusi, snadno zjistíme, že na přímce n existují dva body M požadovaných vlastností, a počet řešení závisí na tom, zda $M = L$.

Pokud současně neplatí, že KL je rovnoběžná s m a $|KL| = d$, má úloha dvě řešení.

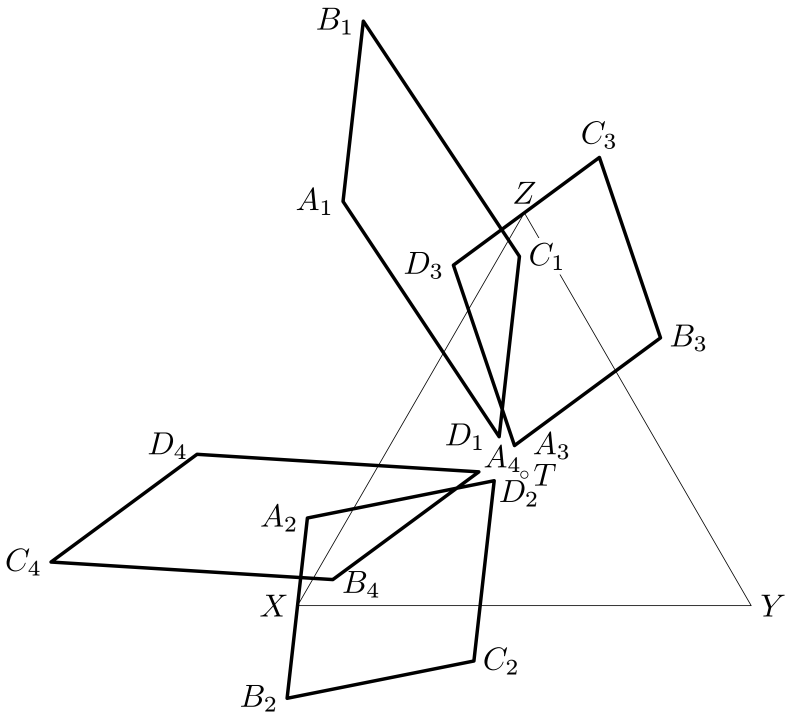
Pokud je KL rovnoběžná s m a $|KL| = d$, vznikne pro jednu z možných poloh bodu M v předcházejícím případě nekonečně mnoho řešení (za přímku l můžeme vzít libovolnou přímku procházející bodem L).

Řešení původní úlohy. Z obsahu rovnoběžníku $ABCD$ a délky strany AB snadno vypočítáme výšku v na stranu AB: je $v = 8\,\mathrm{cm}^2 : 2\,\mathrm{cm} = 4\,\mathrm{cm}$. Odtud plyne, že vzdálenost rovnoběžek AB a CD je 4 cm, přičemž známe bod X přímky AB a bod Z přímky CD. Podle úlohy A tedy umíme sestrojit přímky AB a CD.

V poloze, která je dána, má tato část dvě řešení.

Když už máme přímku AB, jsou AD a BC dvě neznámé rovnoběžky, které procházejí danými body T a Y a na (známé) přímce AB vytínají úsečku dané délky $|AB| = 2\,\text{cm}$. Proto můžeme rovnoběžky AD a BC sestrojit na základě úlohy B.

Je zřejmé, že speciální poloha daných bodů X, Y, Z a T nemá na postup řešení vliv, zaručuje nám však snadnou diskusi počtu řešení. Pro obě polohy přímky AB má úloha v dané situaci dvě řešení. Tím je rovnoběžník $ABCD$ sestrojen. (Přímkami AB, BC, CD a AD jsou vrcholy A, B, C, D určeny.) Úloha má 4 řešení (obr. 6).



Obr. 6

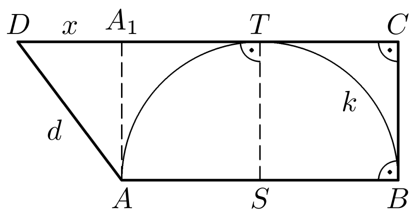
3. Je dán lichoběžník $ABCD$, v němž $|AB| = 8\,\text{cm}$ a $|\sphericalangle ABC| = 90°$. Jeho obvod je $28\,\text{cm}$. Polokružnice k s průměrem AB se dotýká strany CD. Vypočtěte délky zbývajících stran daného lichoběžníku, je-li strana AB jeho

a) základnou,

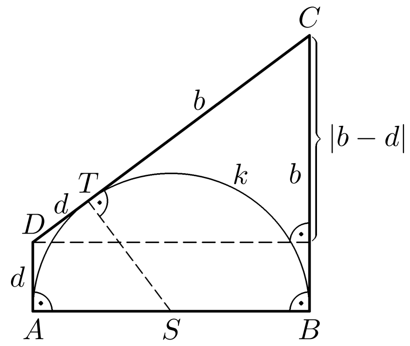
b) ramenem.

4. Je dán obdélník $KLMN$, $|KN| > |KL|$. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB délky $|KL|$ tak, aby jeho výška v_a obsahovala body K, N, výška v_b bod L a výška v_c bod M. (Výškami zde rozumíme přímky.)

3. Označme S střed strany AB a T bod dotyku polokružnice k se stranou CD. Jestliže je AB základnou daného lichoběžníku, je $CD \parallel AB$ a $|AB|+|BC|+|CT| = 2|AB| = 16$ cm (obr. 2). Označme A_1 kolmý průmět vrcholu A na přímku CD. Protože $|TD| + |DA| = 28\,\text{cm} - 16\,\text{cm} = 12\,\text{cm} > |AA_1| + |A_1T| = 8\,\text{cm}$, leží vrchol D na polopřímce TA_1 za bodem A_1. Označme velikost $|A_1D| = x$ cm, $|DA| = d$ cm. Pro čísla x, d dostáváme soustavu rovnic $d + x = 8$, $d^2 = x^2 + 4^2$ (Pythagorova věta pro trojúhelník AA_1D), kterou snadno upravíme na tvar $d + x = 8$, $(d - x)(d + x) = 16$, tj. $d + x = 8$, $d - x = 2$. Soustava má jediné řešení $d = 5$, $x = 3$. Zbývající strany daného lichoběžníku mají tedy velikosti 4 cm, 11 cm a 5 cm.



Obr. 2



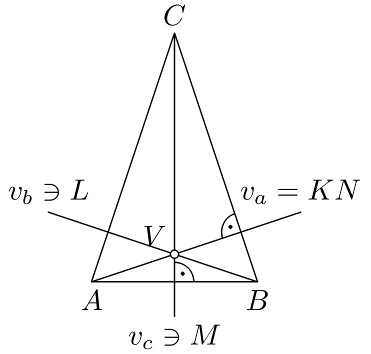
Obr. 3

Je-li AB ramenem daného lichoběžníku $ABCD$, je $AB \perp BC \parallel AD$ (obr. 3), takže obě základny BC a AD se dotýkají polokružnice k v odpovídajících vrcholech B a A. Označme b shodné úseky tečen z vrcholu C a d shodné úseky tečen z vrcholu D k polokružnici k. Ze znalosti obvodu tak dostáváme (v centimetrech) rovnost $28 = 8 + 2b + 2d$, neboli $b + d = 10$. Z rovnoběžnosti $BC \parallel AD$ plyne $|b - d| = \sqrt{(b + d)^2 - 8^2} = 6$. Vzhledem k souměrnosti podle osy dané polokružnice k stačí uvažovat jen jednu z možností, např. $b > d$. Soustava $b + d = 10$, $b - d = 6$ má jediné řešení $b = 8$, $d = 2$, takže zbývající strany daného lichoběžníku mají v tomto případě velikosti 8 cm, 10 cm a 2 cm, což platí i v případě $b < d$.

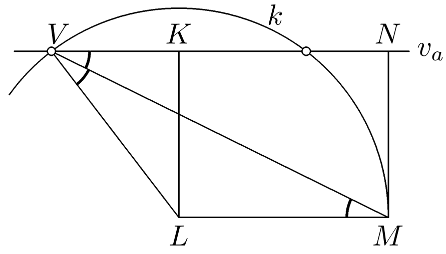
Za úplné řešení je 6 bodů, za každé správné řešení 3 body.

4. Podle zadání známe přímku KN, na níž leží výška v_a. Protože výška v_b je souměrně sdružená s v_a podle osy základny AB hledaného rovnoramenného trojúhelníku ABC, na níž zároveň leží jeho třetí výška v_c, pokusíme se najít průsečík V těchto výšek. Ten má tu vlastnost, že bod L leží na přímce souměrně sdružené s $v_a = KN$ podle $VM = v_c$ (obr. 4). Jakmile bod V najdeme, budeme zároveň znát polohu všech tří výšek trojúhelníku ABC, takže až na podobnost můžeme sestrojit i hledaný trojúhelník ABC.

Předpokládejme, že bod V na přímce KN má požadovanou vlastnost (obr. 5). Ze souměrnosti přímek VL a VN podle VM plyne rovnost vyznačených úhlů s vrcholem V. Z rovnoběžnosti přímek KN a LM dostáváme, že stejnou velikost má i úhel LMV, takže



Obr. 4

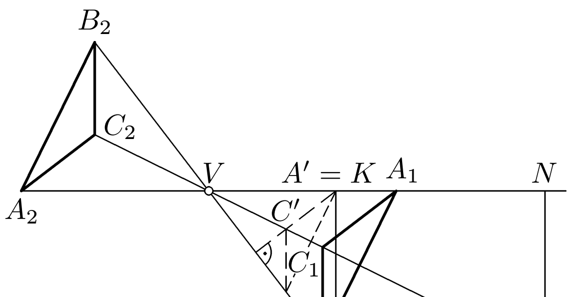


Obr. 5

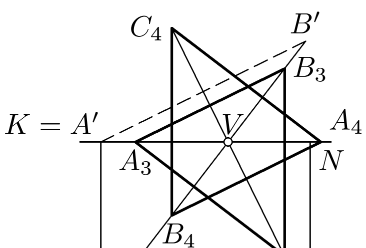
trojúhelník MVL je rovnoramenný se základnou MV. Je tudíž $|LV| = |LM|$ a bod V najdeme jako průsečík přímky KN s kružnicí $k = (L, |LM|)$. Protože dle předpokladu je $|KL| < |KN| = |LM|$, existují takové průsečíky dva.

Nyní dokončíme konstrukci trojúhelníku ABC. Nejprve sestrojíme pomocný trojúhelník $A'B'C'$, který bude stejnolehlý s hledaným trojúhelníkem ABC, a to tak, že na přímce KN libovolně zvolíme bod $A' \neq V$ (na obr. 6 je jako bod A' zvolen daný vrchol K), sestrojíme bod B' souměrně sdružený s bodem A' podle VM a vrchol C', v němž kolmice na $B'V$ vedená bodem A' protne přímku VM. Protože má platit $|AB| = |KL|$, trojúhelník ABC sestrojíme užitím té stejnolehlosti se středem V, která známou úsečku $A'B'$ převede na hledanou úsečku AB dané délky $|KL|$ (takové stejnolehlosti jsou dvě). Pro každý z možných bodů V tak bude mít úloha dvě řešení (na obr. 6 trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$, na obr. 7 trojúhelníky $A_3B_3C_3$ a $A_4B_4C_4$) středově souměrná podle příslušného průsečíku výšek.

Za úplné řešení je 6 bodů. Má-li řešitel z každé dvojice stejnolehlých řešení vždy jen jedno, strhněte dva body.

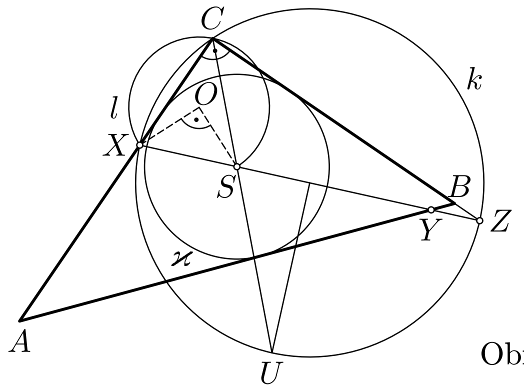


Obr. 6



Obr. 7

2. Je dána úsečka XZ délky 7 cm a její body S, Y tak, že $|XS| = 2\,\mathrm{cm}$, $|YZ| = 1\,\mathrm{cm}$. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB tak, aby bod S byl střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a body X, Y, Z ležely po řadě na přímkách AC, AB, BC.



Obr. 2

2. Předpokládejme, že trojúhelník ABC je řešením úlohy. Z daného pořadí bodů X, S, Y, Z na jedné přímce a z toho, že bod S je vnitřním bodem trojúhelníku ABC, vyplývá, že body X a Y jsou vnitřními body příslušných stran AC a AB, zatímco bod Z musí ležet na polopřímce opačné k polopřímce BC. Vrchol C neznámého trojúhelníku ABC budeme hledat jen v jedné z polorovin určených přímkou XZ, protože ke každému řešení existuje řešení souměrně sdružené podle osy XZ.

Vrchol C trojúhelníku ABC je vrcholem pravého úhlu XCZ (obr. 2), leží tedy na Thaletově kružnici k nad průměrem XZ. Protože bod S je středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC, leží na ose pravého úhlu, takže $|\sphericalangle SCX| = 45°$ a vrchol C leží zároveň na oblouku kružnice l určené tětivou SX a obvodovým úhlem $45°$. (Vzhledem k uvedené souměrnosti stačí uvažovat jen ten ze dvou souměrných oblouků, který leží ve zvolené polorovině.) Odtud už plyne konstrukce trojúhelníku ABC:

1. sestrojíme kružnici k nad průměrem XZ;
2. v jedné z polorovin určených přímkou XZ sestrojíme vrchol O rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku XSO, $|\sphericalangle SOX| = 90°$, a v téže polorovině narýsujeme oblouk SX kružnice $l(O, |OS|)$;
3. vrchol $C = k \cap \widehat{SX}$, $C \neq X$;
4. sestrojíme kružnici $\varkappa(S, \varrho)$, kde ϱ je vzdálenost bodu S od přímky CX (poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC);
5. bodem Y vedeme tečnu t ke kružnici $\varkappa$ tak, aby její bod dotyku ležel v polorovině opačné k polorovině XZC;
6. vrcholy A, B dostaneme jako průsečíky přímky t s přímkami XC, resp. ZC.

Z popsané konstrukce je zřejmé, že pro bod S ležící mezi body X a Z mají kružnice k a l právě jeden průsečík různý od bodu X. Abychom mohli sestrojit tečnu t, musí bod Y ležet vně kruhu omezeného kružnicí $\varkappa$, musí tedy být $|SY| \geqq \varrho$. Aby existoval průsečík tečny t s přímkou XC uvnitř úhlu XCZ, musí být dokonce $|YS| > |XS| > \varrho$. V našem případě je to splněno a úloha má dvě shodná řešení souměrně sdružená podle osy XZ.

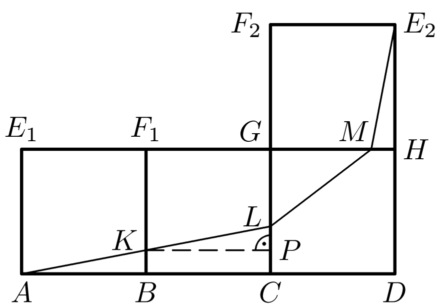
Úlohu bychom řešili stejně, i kdyby dané body X, S, Y, Z neležely na jedné přímce.

Poznámka. Bod C můžeme sestrojit i jiným postupem. Protože body X a Z leží po řadě na polopřímkách CA a CB, je pravý úhel XCZ totožný s pravým úhlem ACB. Osa tohoto úhlu prochází středem S kružnice vepsané trojúhelníku ABC; zároveň tato osa protne kružnici k opsanou trojúhelníku XCZ v takovém bodě $U \neq C$, že tětivy XU a UZ jsou shodné (tyto tětivy jsou totiž z bodu C vidět pod týmž úhlem (45 stupňů), obr. 2). Proto (aniž známe bod C) můžeme bod U sestrojit jako střed oblouku XZ kružnice k (oblouky XU a UZ jsou tedy čtvrtkružnice). Bod C pak určíme jako průsečík kružnice k s polopřímkou US.

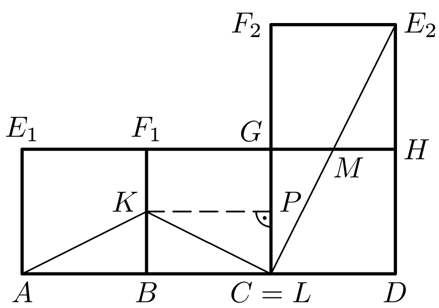
Za úplné řešení je 6 bodů. Plný počet bodů dejte i v případě, že soutěžící zapomene uvést souměrně sdružené řešení.

2. *Na povrchu krychle $ABCDEFGH$ je sestrojena lomená čára složená ze čtyř shodných úseček ve stěnách $ABFE$, $BCGF$, $CDHG$ a $GHEF$, která vychází z vrcholu A a končí ve vrcholu E. Určete, v jakém poměru dělí tato lomená čára hranu CG.*

Řešení. Označme K, L, M body dané lomené čáry, jež po řadě leží na úsečkách BF, CG, GH. Délku hrany krychle položme rovnu jedné a patu kolmice z bodu K na hranu CG označme P (obr. 1). Pravoúhlé trojúhelníky AKB, KLP a EMH se shodují v přeponách AK, KL a EM a v jednotkových odvěsnách AB, KP a EH. Jsou tedy podle věty Ssu shodné a platí $|BK| = |LP| = |MH| = u$. Z pravoúhlých trojúhelníků



Obr. 1



Obr. 2

LMG a ABK ($|GL| = 1 - 2u$, $|GM| = 1 - u$) vyjádříme pomocí Pythagorovy věty druhé mocniny délek jejich přepon a porovnáme je: $1 + u^2 = (1 - u)^2 + (1 - 2u)^2$.

Rovnice má jediný kořen menší než 1: $u = \frac{1}{4}(3 - \sqrt{5})$. Poměr $|CL| : |LG| = 2u : : (1 - 2u) = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ je roven poměru zlatého řezu.

Pro polohu bodu L na hraně CG je ještě jedna možnost, znázorněná na stejné části sítě krychle na obr. 2. Zřejmě jsou pak body C a L totožné a $u = |BK| = |GM| = = |MH| = \frac{1}{2}$, přičemž poměr $|CL| : |LG|$ vyjde nulový.

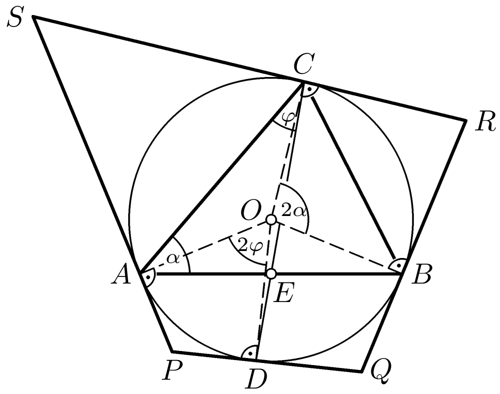
Doplňující úlohy:

1. Je dána krychle $ABCDEFGH$, U je střed její horní stěny $EFGH$, V je střed její přední stěny $ABFE$. Sestrojte na povrchu krychle lomenou čáru $VXYU$ složenou ze tří shodných úseček a procházející přes stěnu $BCGF$.
2. Je dán pravidelný čtyřstěn $ABCD$, P je těžiště trojúhelníku ABC, Q střed úsečky omezené vrcholem D a těžištěm trojúhelníku ABD. Určete délku nejkratší lomené čáry spojující po povrchu čtyřstěnu body P a Q, jestliže tato čára prochází a) přes stěny ABC, ABD, b) přes stěny ABC, BCD, ABD, c) přes stěny ABC, BCD, ACD, ABD. [Obě úlohy viz Hradecký, Koman, Vyšín: *Několik úloh z geometrie jednoduchých těles*, ŠMM 1, MF, Praha 1963, 1977.]

4. *Nechť k je kružnice opsaná trojúhelníku ABC, D je průsečík těžnice na stranu AB s kružnicí k. Tečny ke kružnici k v bodech A, B, C, D vytvářejí čtyřúhelník $PQRS$. Zjistěte, pro které trojúhelníky ABC je čtyřúhelník $PQRS$ tětivový.*

Řešení. Nechť O je střed kružnice opsané trojúhelníku ABC. Při označení podle obrázku 3 jsou úhly PAO a PDO pravé a velikost středového úhlu AOD je dvojnásobkem velikosti příslušného obvodového úhlu ACD. Ve čtyřúhelníku $APDO$ je tedy $|\sphericalangle APD| = 180° - 2|\sphericalangle ACD|$. Analogicky $|\sphericalangle BRC| = 180° - 2|\sphericalangle BAC|$. Čtyřúhelník $PQRS$ je tětivový, právě když $|\sphericalangle SPQ| + |\sphericalangle SRQ| = 180°$, tj. $180° - 2|\sphericalangle ACD| + 180° - 2|\sphericalangle BAC| = 180°$. Odtud vychází pro to, aby čtyřúhelník $PQRS$ byl tětivový, nutná a postačující podmínka $|\sphericalangle ACD| + |\sphericalangle BAC| = 90°$. Při označení podle obr. 3 to znamená

$|\sphericalangle ACE| + |\sphericalangle EAC| = 90°$, tj. těžnice CD je kolmá na AB, jak je vidět z trojúhelníku ACE. Je tedy $|AC| = |BC|$, protože trojúhelníky AEC a BEC jsou shodné podle věty *sus*.



Obr. 3

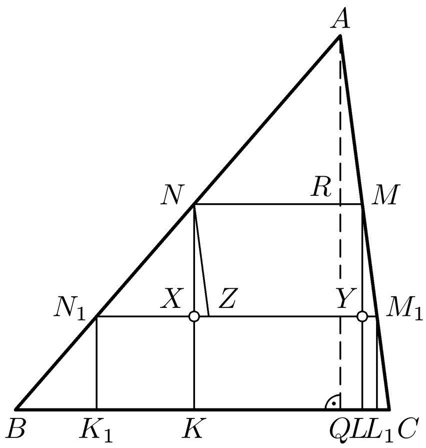
Závěr: Čtyřúhelník $PQRS$ je tětivový jen tehdy, je-li trojúhelník ABC rovnoramenný se základnou AB.

Pomocné úlohy:

1. Dokažte, že v trojúhelníku ABC je těžnice AS kolmá na stranu BC, právě když platí $|AB| = |AC|$. [Je-li AS kolmá na BC, jsou trojúhelníky ABS a ACS shodné podle věty *sus*, a proto $|AB| = |AC|$. Platí-li naopak $|AB| = |AC|$, jsou trojúhelníky ABS a ACS shodné podle věty *sss*. Pak ale $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle ASC|$ a $|\sphericalangle ASB| + |\sphericalangle ASC| = 180°$. Tedy $|\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle ASC| = 90°$.]
2. Dokažte, že obrazy ortocentra trojúhelníku v osových souměrnostech podle jeho stran leží na kružnici tomuto trojúhelníku opsané. [Nechť P a Q jsou po řadě paty výšek z vrcholů A a B v ostroúhlém trojúhelníku ABC, jehož ortocentrum je V. Ta tětiva kružnice opsané, která leží na stejné přímce jako úsečka AV, nechť je AD. S využitím vlastností obvodových úhlů a podobnosti pravoúhlých trojúhelníků ACP a BCQ dostáváme: $|\sphericalangle VBP| = |\sphericalangle QBC| = |\sphericalangle PAC| = |DAC| = |\sphericalangle DBC| = |\sphericalangle DBP|$. Trojúhelníky VBP a DBP se tedy shodují ve vnitřních úhlech při vrcholu B, v pravých úhlech při vrcholu P a ve společné odvěsně BP. Jsou tedy shodné a bod D je obrazem ortocentra V v souměrnosti podle přímky BC.
   V případě, kdy je například úhel BAC tupý, se postupuje podobně. Je však zapotřebí si uvědomit, že bod D může ležet uvnitř poloroviny ACB, nebo uvnitř poloroviny opačné, nebo mohou být body A, D totožné. Pro pravoúhlý trojúhelník ABC je důkaz zřejmý.]
3. Úhlopříčky daného tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ jsou navzájem kolmé a protínají se v bodě E. Označme M průsečík kolmice z bodu E na stranu AB s protilehlou stranou CD. Určete poměr obsahů trojúhelníků CME a MDE. [44–B–II–4]

6. *Sestrojte trojúhelník ABC s obsahem $18\ cm^2$ a následující vlastností: obvod každého pravoúhelníku $KLMN$, jehož vrcholy K, L leží na úsečce BC a body M, N po řadě na úsečkách AC, AB, je roven třem pětinám obvodu trojúhelníku ABC.*

Řešení. Uvažujme dva pravoúhelníky $KLMN$, $K_1L_1M_1N_1$ vepsané do trojúhelníku ABC uvedeným způsobem. Nechť $|KL| < |K_1L_1|$. Označme Z průsečík rovnoběžky s AC vedené bodem N s úsečkou N_1M_1, Q patu výšky z vrcholu A na stranu BC a X, Y průsečíky hranice pravoúhelníku $KLMN$ s úsečkou N_1M_1 (obr. 4). Obvody obou pravoúhelníků jsou si rovny, právě když $|N_1X| + |YM_1| = |NX|$. To je ekvivalentní s podmínkou $|NX| = |N_1Z|$, neboť $|XZ| = |YM_1|$. Trojúhelníky BCA, N_1ZN i NMA si jsou podobné, proto $a = v_a$. A protože $S = a \cdot \frac{1}{2}v_a = 18\,\mathrm{cm}^2$, plyne odtud rovnost $a = v_a = 6\,\mathrm{cm}$.



Obr. 4

Obvod pravoúhelníku $KLMN$ je $2|NM| + 2|KN| = 2|AR| + 2|RQ| = 2v_a = 2a = 12\,\mathrm{cm}$. Obvod $2s$ trojúhelníku ABC je proto $\frac{5}{3} \cdot 12\,\mathrm{cm} = 20\,\mathrm{cm}$. Odtud $b + c = 2s - a = 14\,\mathrm{cm}$.

Máme tedy sestrojit trojúhelník ABC, je-li dáno a, v_a, $b + c$.

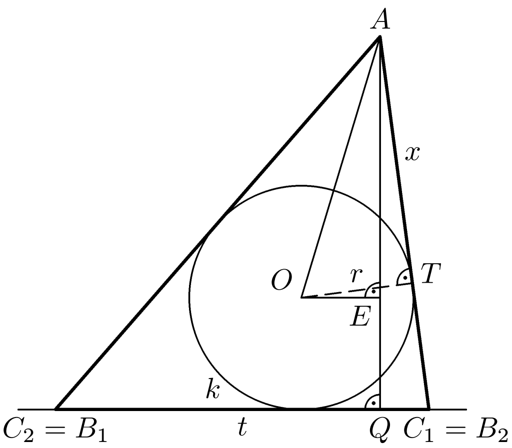
Uvedeme několik postupů řešení.

1. možnost: Snadno vypočteme $s = 10$ (cm), $s - a = 4$, $s - b = 10 - b$, $s - c = b - 4$. Po dosazení do Heronova vzorce pro obsah trojúhelníku ABC dostaneme $\sqrt{40 \cdot (10 - b) \cdot (b - 4)} = 18$, což vede po úpravě na kvadratickou rovnici $10b^2 - 140b + 481 = 0$. Vyřešením obdržíme

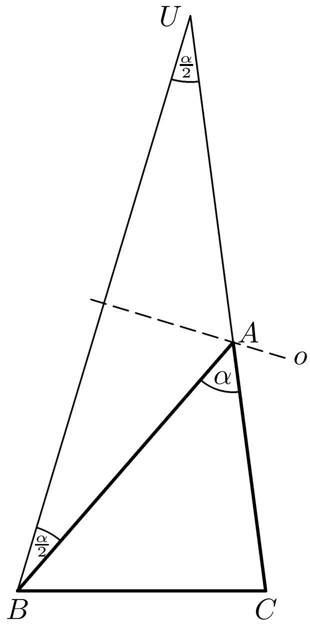
$$b = 7 + \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad c = 7 - \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \text{nebo} \quad b = 7 - \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad c = 7 + \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Obě řešení vyhovují a snadno je ze známých délek stran sestrojíme. Délku $d = 3/\sqrt{10}$ nalezneme eukleidovsky jako čtvrtou geometrickou úměrnou tak, že vztah přepíšeme na tvar $d : 1 = 3 : \sqrt{10}$. Nejdřív ovšem sestrojíme $\sqrt{10}$ např. pomocí Eukleidovy věty o výšce.

2. možnost: Nechť $k(O, r)$ je kružnice vepsaná trojúhelníku ABC a T její bod dotyku se stranou AC (obr. 5). Pravoúhlý trojúhelník AOT můžeme sestrojit, neboť známe délky jeho odvěsen $|AT| = x = s - a = 4\,\mathrm{cm}$, $|TO| = r = S/s = 1{,}8\,\mathrm{cm}$, dále kružnici $k(O, r)$ a nad přeponou AO ještě jeden pravoúhlý trojúhelník s odvěsnou AE délky $v_a - r = 4{,}2\,\mathrm{cm}$. (Tento trojúhelník zřejmě existuje — výpočtem délky přepony trojúhelníku AOT pomocí Pythagorovy věty lze ověřit, že $|AO| > v_a - r$.) Úsečku AE doplníme podle obrázku na úsečku AQ délky v_a. Kolmice na AQ v bodě Q je přímka t. Její průsečíky s tečnami z bodu A ke kružnici k jsou hledané vrcholy B, C. Úloha má dvě řešení. Vzhledem k jednoznačně sestrojenému trojúhelníku AOT nalezneme sice konstrukcí pomocí Thaletovy věty dva trojúhelníky AOE a AOE_1, každý z výsledných trojúhelníků AB_kC_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ se však v souhlasně označených prvcích shoduje s některým z překrývajících se trojúhelníků AB_1C_1, AB_2C_2 na obr. 5.



Obr. 5



Obr. 6

3. možnost: Úsečka CU na obr. 6 má délku $b + c$. Trojúhelník UBA je tedy rovnoramenný se základnou UB, a proto $|\sphericalangle BUC| = \frac{1}{2}\alpha$. Tento úhel umíme sestrojit podle předchozího postupu, neboť je to úhel OAT na obr. 5. Sestrojíme tedy nejprve trojúhelník CUB, ve kterém známe $|BC|$, $|CU|$ a $|\sphericalangle CUB|$. Bod A je pak průsečík úsečky CU s osou strany BU. Konstrukce vede opět na dvě řešení.

Pomocná úloha:

V trojúhelníku ABC známe výšku v z vrcholu A a délku strany BC. Určete obvod obdélníku $KLMN$, leží-li jeho strana KL na úsečce BC, vrcholy M, N na stranách AC, AB a platí

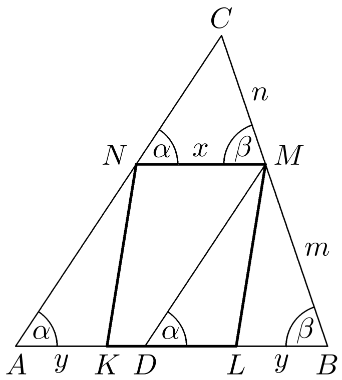
$$|KL| : |LM| = 3 : 2.$$

$[10av/(2a + 3v).]$

2. Je dán trojúhelník ABC. Sestrojte rovnoběžník $KLMN$ tak, aby jeho vrcholy K a L ležely na straně AB, vrchol M na straně BC, vrchol N na straně AC a aby trojúhelníky AKN, LBM a NMC měly stejné obsahy.

4. Najděte všechny ostroúhlé trojúhelníky ABC, jejichž těžiště T splývá s průsečíkem výšek trojúhelníku PQR, přičemž body P, Q, R jsou po řadě průsečíky polopřímek opačných k polopřímkám TA, TB, TC s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC.

2. Předpokládejme, že rovnoběžník $KLMN$ má požadované vlastnosti. V posunutí o vektor $\boldsymbol{NM}$ (obr. 1) je obrazem trojúhelníku AKN trojúhelník DLM. Vzniklý trojúhelník DBM má mít (dle zadání) dvakrát větší obsah než trojúhelník NMC a je tomuto trojúhelníku podobný (věta uu). Koeficient k podobnosti, která převádí trojúhelník DBM na trojúhelník NMC, je odmocninou z podílu obsahů těchto trojúhelníků a zároveň podílem délek libovolných dvou v podobnosti si odpovídajících úseček: $k = \sqrt{2} = \dfrac{|BM|}{|MC|}$. Z podmínky rovnosti obsahů trojúhelníků LBM, DLM a AKN, jejichž výšky na strany LB, DL a AK jsou shodné, navíc plyne $|LB| = |DL| = |AK|$.



Obr. 1

Odtud plyne *konstrukce*: Na úsečce BC sestrojíme bod M tak, aby $|BM| : |MC| = \sqrt{2} : 1$. Rovnoběžka s přímkou AC vedená bodem M protne úsečku AB v bodě D. Vrchol N nalezneme jako průsečík úsečky AC s přímkou, která prochází bodem M rovnoběžně s AB. Bod L sestrojíme jako střed úsečky DB, bod K je pak obrazem bodu L v posunutí o vektor $\boldsymbol{MN}$.

Výsledkem konstrukce je rovnoběžník $KLMN$ (jediný pro každý trojúhelník ABC), o němž se snadno přesvědčíme, že má požadované vlastnosti.

Jiné řešení. Z rovností obsahů trojúhelníků AKN a LBM se shodnými výškami na strany AK a LB plyne shodnost těchto stran. Označme (obr. 1) $|AB| = c$, $|NM| = |KL| = x$, $|BM| = m$ a $|MC| = n$ a $|LB| = |AK| = y$; zřejmě $c = 2y + x$, takže $y = \frac{1}{2}(c - x)$. Trojúhelníky NMC a LBM mají stejné obsahy, je tedy $\frac{1}{2}xn \sin\beta = \frac{1}{2}ym \sin\beta$ neboli $xn = ym$. Po dosazení za y a úpravě máme

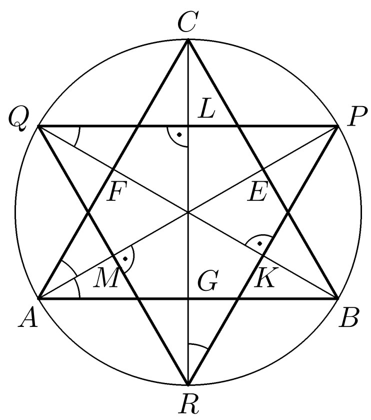
$$x(m + 2n) = mc. \tag{1}$$

Z podobnosti trojúhelníků NMC a ABC plyne úměra $x : c = n : (m + n)$ neboli

$$nc = x(m + n), \tag{2}$$

takže z rovnosti součinu levých a součinu pravých stran vztahů (1) a (2) dostaneme $m = n\sqrt{2}$, tj. $\dfrac{|BM|}{|MC|} = m : n = \sqrt{2}$. Odtud vyplývá *konstrukce* podobně jako v předchozím řešení.

4. Pravoúhlé trojúhelníky LRP a KQP na obr. 2 jsou podobné, protože mají společný ostrý úhel při vrcholu P. Využijeme-li navíc, že obvodové úhly příslušné témuž oblouku jsou shodné, dostáváme $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CRP| = |\sphericalangle LRP| = |\sphericalangle KQP| = |\sphericalangle BQP| = |\sphericalangle BAP|$. Bod E je střed úsečky BC, tětivy CP a BP příslušné shodným obvodovým úhlům ACP a BAP jsou shodné. Trojúhelník CEP je tedy shodný s trojúhelníkem BEP podle věty *sss*, tudíž úhly AEB a BEP stejně jako úhly AEB a AEC jsou shodné (a pravé). Odtud plyne i shodnost trojúhelníků AEC a AEB podle věty *sus*. Je tedy $|AC| = |AB|$. Analogicky zjistíme, že $|AB| = |BC|$.



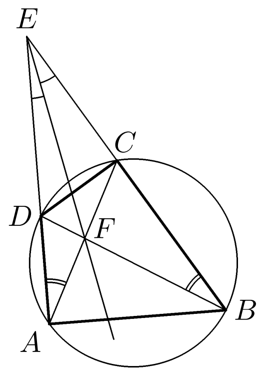
Obr. 2

Závěr: Daným podmínkám vyhovují jen rovnostranné trojúhelníky ABC.

Poznámka. Rovnost $|CP| = |BP|$ lze dokázat i jinak, například na základě poznatku, že obrazy ortocentra v souměrnostech podle stran trojúhelníku leží na kružnici trojúhelníku opsané (viz pomocnou úlohu 2 ke čtvrté úloze domácího kola). Těžiště T trojúhelníku ABC je zároveň ortocentrem trojúhelníku PQR. Proto jsou obrazem úsečky TP v osových souměrnostech podle přímek PQ a PR po řadě úsečky CP a BP, které jsou tudíž shodné.

2. Je dán tětivový čtyřúhelník $ABCD$. Označme E průsečík přímek BC a AD. Leží-li průsečík úhlopříček AC a BD na ose úhlu AEB, je trojúhelník ABE rovnoramenný. Dokažte.

2. Označme F průsečík úhlopříček AC a BD (obr. 1). Jestliže je přímka EF osou úhlu AEB, jsou úhly AEF a BEF shodné. Navíc jsou shodné i úhly EAF a EBF, neboť jsou to obvodové úhly příslušné téže tětivě CD. Trojúhelníky AFE a BFE se shodují ve společné straně EF, jsou tedy shodné podle věty *usu*, $|AE| = |BE|$ a trojúhelník ABE je tudíž rovnoramenný.



Obr. 1

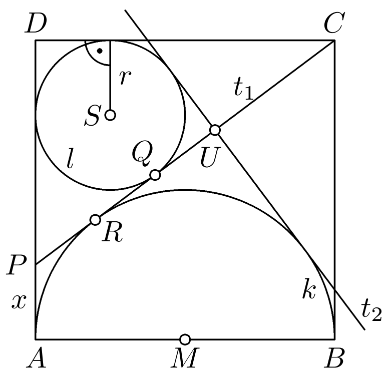
3. *Nechť k je polokružnice sestrojená nad průměrem AB, která leží ve čtverci $ABCD$. Uvažujme její tečnu t_1 z bodu C (různou od BC) a označme P její průsečík se stranou AD. Nechť t_2 je společná vnější tečna polokružnice k a kružnice vepsané trojúhelníku CDP (různá od AD). Dokažte, že přímky t_1 a t_2 jsou navzájem kolmé.*

Řešení. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že délka strany čtverce $ABCD$ je 1. Označme M střed strany AB a U průsečík přímek t_1, t_2 (obr. 7). Dále označme l kružnici vepsanou trojúhelníku CDP, S její střed a r poloměr. Dále nechť Q a R jsou postupně dotykové body přímky t_1 s kružnicí l a polokružnicí k. Položme $x = |AP|$. V řešení využijeme známý fakt, že vzdálenosti obou dotykových bodů od průsečíku tečen jsou stejné. Takto například dostáváme

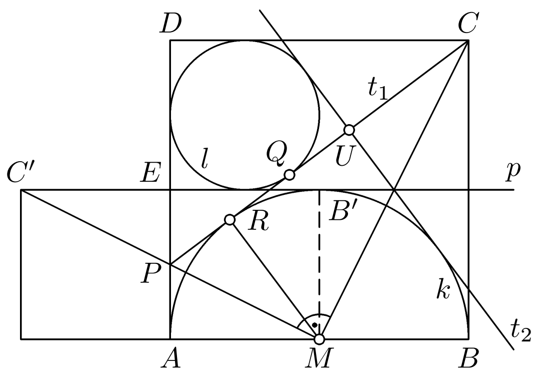
$$|CP| = |CR| + |RP| = |CB| + |AP| = 1 + x. \qquad (*)$$

Řešení provedeme ve třech krocích, přitom každý z nich vyplníme více způsoby:

1. krok. Výpočet délky x.
2. krok. Výpočet poloměru r.
3. krok. Důkaz kolmosti přímek t_1 a t_2.



Obr. 7



Obr. 8

1. krok, 1. způsob.

Uvažujme pravoúhlý trojúhelník CDP. Délka jeho přepony se podle $(*)$ rovná $1+x$ a délky odvěsen jsou 1 a $1 - x$ Z *Pythagorovy věty* tedy dostáváme

$$(1 + x)^2 = 1^2 + (1 - x)^2.$$

Řešením této (po úpravě lineární) rovnice je $x = \frac{1}{4}$.

1. krok, 2. způsob.

Označme C' bod, který vznikne otočením bodu C okolo středu M o $90°$ v kladném směru. Potom bod C' leží na přímce p, která je obrazem přímky BC v uvedeném otočení (obr. 8), přičemž rovnoběžné úsečky $C'E$ a AM mají tutéž délku $\frac{1}{2}$. Protože přímka MP je osou úhlu AMR a přímka MC osou úhlu BMR, jsou přímky MP a MC navzájem kolmé, takže bod C' leží na přímce MP. Trojúhelníky PAM' a PEC' jsou tedy souměrně sdružené podle středu P, a proto $x = |AP| = \frac{1}{2}|AE| = \frac{1}{4}$.

2. krok, 1. způsob.

Je-li ϱ poloměr kružnice vepsané trojúhelníku se stranami a, b, c, je jeho obsah roven $\frac{1}{2}(a+b+c)\varrho$. Pro pravoúhlý trojúhelník CDP, v němž známe délky všech stran, tak dostáváme (připomeňme, že $|PC| = 1 + x = \frac{5}{4}$)

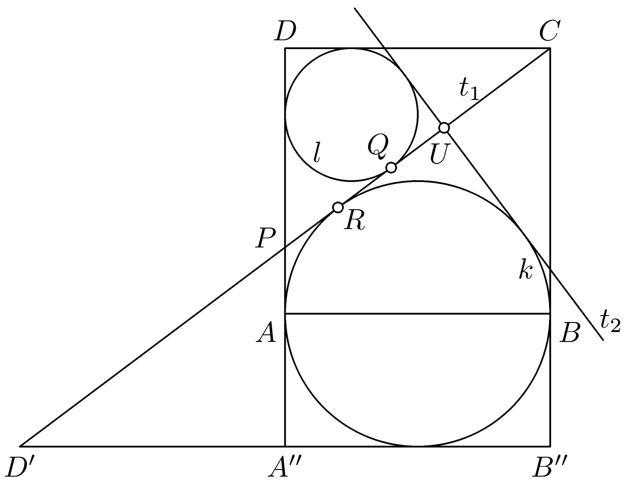
$$r = \frac{\frac{1}{2}|CD| \cdot |DP|}{\frac{1}{2}(|CD| + |DP| + |PC|)} = \frac{1}{4}.$$

2. krok, 2. způsob.

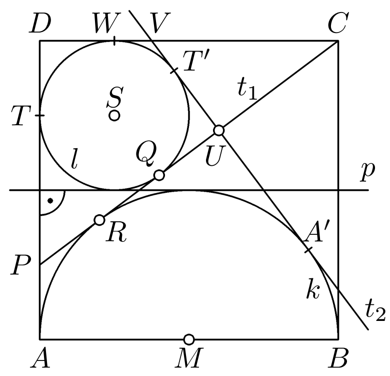
Nechť $A''B''$ je obraz úsečky AB v posunutí ve směru polopřímky CB o délku $\frac{1}{2}$ (obr. 9). Označme D' průsečík přímek $A''B''$ a t_1. Potom kružnice, jejíž částí je polokružnice k, je vepsána trojúhelníku $D'B''C$ a navíc jsou trojúhelníky $D'B''C$ a CDP podobné. Poměr poloměrů jejich vepsaných kružnic je tedy roven poměru jejich kratších odvěsen. To znamená, že $\frac{1}{2} : r = \frac{3}{2} : \frac{3}{4}$, neboli $r = \frac{1}{4}$.

3. krok, 1. způsob.

Podle 2. kroku víme, že průměr kružnice l je roven poloměru polokružnice k. Proto přímka p (osa úsečky AD) je společnou vnitřní tečnou polokružnice k a kružnice l (obr. 10). Přitom přímka p je kolmá na přímku AD, která je jejich vnější společnou tečnou. V osové souměrnosti podle středné SM obou kružnic je obrazem vnější tečny AD vnější tečna t_2 a obrazem vnitřní tečny p vnitřní tečna t_1. Jsou tedy navzájem kolmé i tečny t_1 a t_2.



Obr. 9



Obr. 10

3. krok, 2. způsob.

Označme V průsečík přímky t_2 se stranou CD. Protože délky obou společných *vnějších* tečen (pokud je bereme jako úsečky, jejichž krajními body jsou dotykové body) polokružnice k a kružnice l jsou stejné, tj. $|AT| = |A'T'|$, dostáváme na základě shodnosti délek tečen z bodu P ke kružnici l a shodnosti délek tečen z bodu U k polokružnici k

$$|AT| = |AP| + |PT| = |AP| + |PQ| = 2|AP| + |RQ|,$$
$$|A'T'| = |A'U| + |UT'| = |RU| + |UQ| = |RQ| + 2|UQ|,$$

což znamená, že $|UQ| = |AP| = \frac{1}{4}$. Dále z rovnosti délek tečen z bodu C k polokružnici k a kružnici l dostáváme $|RQ| = |CR| - |CQ| = |CB| - |CW| = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$. To znamená, že $|PU| = \frac{3}{4} = |PD|$, takže čtyřúhelník $PUVD$ je deltoid, a tedy $|\sphericalangle PUV| = |\sphericalangle PDV| = 90^\circ$, tj. přímky t_1 a t_2 jsou navzájem kolmé.

Tím je důkaz hotový.

6. *Je dán rovnostranný trojúhelník MPQ. Najděte množinu vrcholů C všech trojúhelníků ABC takových, že body P, Q jsou paty výšek z vrcholů A, B a bod M je střed strany AB.*

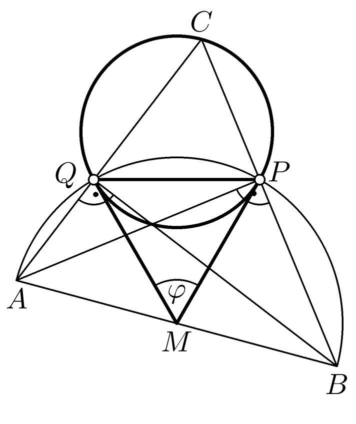
ŘEŠENÍ. Uvažujme trochu obecnější úlohu. Předpokládejme jen, že trojúhelník MPQ je rovnoramenný se základnou PQ, pričemž $|\sphericalangle PMQ| = \varphi$. Označme standardně α, β, γ vnitřní úhly trojúhelníku ABC. Body P, Q jsou paty výšek z bodů A, B, takže body A, B, P, Q leží na kružnici se středem M (jde o *Thaletovu kružnici* nad průměrem AB). To znamená, že $|MA| = |MB| = |MP| = |MQ|$, a tedy trojúhelník AMQ (pokud $A \neq Q$) je rovnoramenný; analogicky trojúhelník BMP. Potom platí

$$|\sphericalangle AMQ| = 180^\circ - 2|\sphericalangle MAQ|, \qquad |\sphericalangle BMP| = 180^\circ - 2|\sphericalangle MBP|, \qquad (1)$$
$$|\sphericalangle PCQ| = \gamma.$$

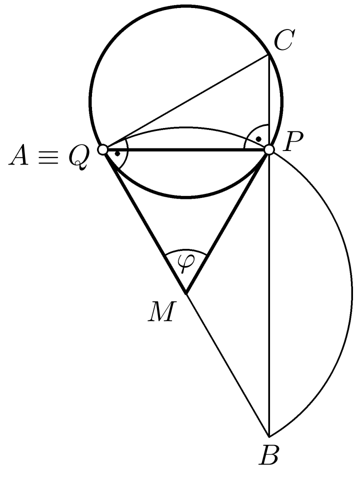
Dále rozeberme několik případů podle toho, zda má být trojúhelník ABC ostroúhlý, pravoúhlý, anebo tupoúhlý.

Případ 1. Trojúhelník ABC je ostroúhlý. Zřejmě body M a C leží v opačných polorovinách určených přímkou PQ. Navíc platí $|\sphericalangle MAQ| = \alpha$, $|\sphericalangle MBP| = \beta$ a $|\sphericalangle AMQ| + \varphi + |\sphericalangle BMP| = 180^\circ$, odkud po dosazení (1) dostáváme $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$.

Případ 2. Trojúhelník ABC má při vrcholu A pravý úhel. Zřejmě body M a C leží v opačných polorovinách určených přímkou PQ. Dále $A \equiv Q$ a $|\sphericalangle BMP| = 180^\circ - \varphi$. Z (1) potom vyplývá $\beta = |\sphericalangle MBP| = \frac{1}{2}\varphi$, a tedy $\gamma = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$. Pokud je pravý úhel při vrcholu B, analogicky dostaneme $\gamma = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$.



Obr. 11

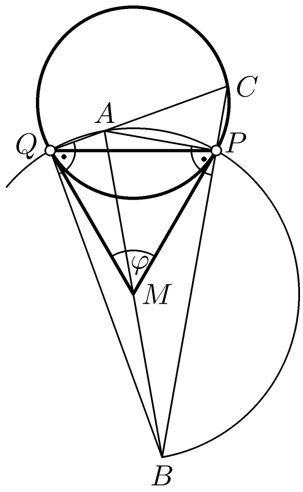


Obr. 12

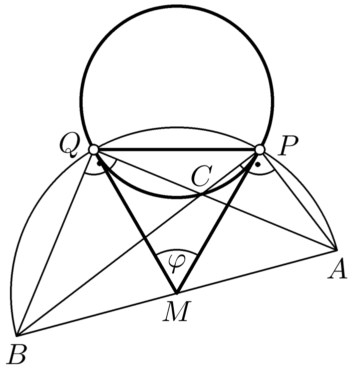
Případ 3. Trojúhelník ABC má při vrcholu A tupý úhel. Zřejmě body M a C leží v opačných polorovinách určených přímkou PQ. Přitom $|\sphericalangle MAQ| = 180^\circ - \alpha$, $|\sphericalangle MBP| = \beta$ a $\varphi - |\sphericalangle AMQ| + |\sphericalangle BMP| = 180^\circ$, odkud po dosazení (1) dostáváme $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$. Pokud je tupý úhel při vrcholu B, analogicky dostaneme $\gamma = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$.

Případ 4. Trojúhelník ABC má při vrcholu C tupý úhel. Zřejmě body M a C leží ve stejné polorovině určené přímkou PQ. Dále z pravoúhlých trojúhelníků ABQ a ABP

dostáváme $|\sphericalangle MAQ| = \alpha$, $|\sphericalangle MBP| = \beta$ a $|\sphericalangle AMQ| + |\sphericalangle BMP| = 180^\circ + \varphi$. Z (1) potom vyplývá $\gamma = 90^\circ + \frac{1}{2}\varphi$.



Obr. 13



Obr. 14

Zřejmě trojúhelník ABC nemůže mít při vrcholu C pravý úhel. Jinak by body C, P, Q splynuly. Celkově jsme tedy dostali, že pokud bod C leží v polorovině opačné k polorovině PQM, je $|\sphericalangle PCQ| = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$, a pokud bod C leží v polorovině PQM, je $|\sphericalangle PCQ| = 90^\circ + \frac{1}{2}\varphi$. Množinou všech takových bodů C je tedy kružnice, označme ji k, nad tětivou PQ s výjimkou bodů P, Q (kde větší oblouk kružnice k je částí množiny všech bodů X takových, že $|\sphericalangle PXQ| = 90 - \frac{1}{2}\varphi$).

Obráceně nechť $C \in k \setminus \{P, Q\}$ a MPQ je rovnoramenný trojúhelník se základnou PQ. Potom si snadno uvědomíme, jako bychom sestrojili body A, B. Bod A leží na přímce CQ a na přímce, která je kolmá na CP a prochází bodem P. Analogicky dostaneme bod B. V takovémto trojúhelníku ABC budou body P, Q patami výšek z vrcholů A, B. Stačí tedy dokázat, že M je střed AB. Označme N střed strany AB. Dokážeme, že $M \equiv N$. Označme $\psi = |\sphericalangle PNQ|$. Zřejmě bod N leží v polorovině PQM a je středem kružnice, na které leží body A, B, P, Q, takže trojúhelník NPQ je rovnoramenný se základnou PQ. Přitom z výše uvedených úvah vyplývá, že pokud bod C leží v polorovině opačné k polorovině PQM, je $\gamma = 90^\circ - \frac{1}{2}\psi$, a pokud bod C leží v polorovině PQM, je $\gamma = 90^\circ + \frac{1}{2}\psi$. To znamená, že $\psi = \varphi$. Navíc oba body M a N leží na ose úsečky PQ. Takže nutně $M \equiv N$, a tedy M je opravdu střed strany AB.

Odpověď. Hledanou množinou všech vrcholů C je kružnice k s výjimkou bodů P, Q. Speciálně pro $\varphi = 60^\circ$ je k kružnice souměrně sdružená s kružnicí opsanou trojúhelníku MPQ podle přímky PQ.

Jiné řešení. Uvažujme znovu obecnější úlohu jako v předcházejícím řešení. Opět si uvědomme, že body A, B, P, Q leží na kružnici se středem M. Vzhledem k tomu, že M je střed úsečky AB, leží aspoň jeden z bodů A, B nutně v polorovině PQM. Bez újmy na obecnosti nechť je to bod B. Potom z věty o obvodových úhlech vyplývá, že

$|\sphericalangle QBP| = \frac{1}{2}\varphi$. Dále

$$|\sphericalangle BCQ| = 90^\circ - |\sphericalangle QBC| = 90^\circ - |\sphericalangle QBP| = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}.$$

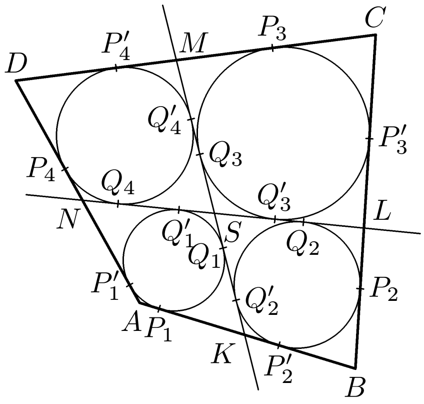
Pokud $\gamma < 90^\circ$, leží bod C v polorovině opačné k polorovině PQM a platí $\gamma = |\sphericalangle BCQ| = 90^\circ - \frac{1}{2}\varphi$. Pokud $\gamma > 90^\circ$, leží bod C v polorovině PQM a platí $\gamma = 180^\circ - |\sphericalangle BCQ| = 90^\circ + \frac{1}{2}\varphi$.

Další postup je už analogický jako v prvním řešení.

Diskusi případů v obou řešeních můžeme částečně obejít. Stačí si uvědomit několik faktů. Pokud V je průsečíkem výšek v trojúhelníku ABC, je bod C průsečíkem výšek v trojúhelníku ABV. Proto trojúhelník ABC má vlastnost ze zadání úlohy, právě když ji má trojúhelník ABC', kde $C' = V$. Znamená to, že množina vrcholů C všech vyhovujících trojúhelníků je totožná s množinou jejich průsečíků výšek V. Protože body C, V leží vždy v opačných polorovinách určených přímkou PQ a platí $|\sphericalangle PVQ| + |\sphericalangle PCQ| = 180^\circ$, stačí najít množinu vrcholů C jen v jedné ze zmíněných polorovin (jak už víme, je jí kružnicový oblouk), v druhé polorovině touto množinou pak musí být doplněk toho oblouku do celé kružnice.

3. Uvnitř stran AB, BC, CD a DA konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ jsou po řadě zvoleny body K, L, M a N. Označme S průsečík přímek KM a LN. Je-li možno vepsat kružnice čtyřúhelníkům $AKSN$, $BLSK$, $CMSL$ a $DNSM$, je možno vepsat kružnici i čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte.

3. Předpokládejme, že zmíněným čtyřem čtyřúhelníkům lze vepsat kružnice. Body dotyků těchto kružnic s příslušnými stranami čtyřúhelníků označme jako na obrázku. Ze sou-



měrnosti tečen sestrojených z jednoho bodu k téže kružnici plynou rovnosti

$$|AP_1| = |AP_1'|,\ |BP_2| = |BP_2'|,\ |CP_3| = |CP_3'|,\ |DP_4| = |DP_4'| \tag{1}$$

a

$$|SQ_1| = |SQ_1'|,\ |SQ_2| = |SQ_2'|,\ |SQ_3| = |SQ_3'|,\ |SQ_4| = |SQ_4'|. \tag{2}$$

Ze souměrnosti společných vnějších tečen dvou kružnic zase plynou rovnosti

$$|P_1P_2'| = |Q_1'Q_2|,\ |P_2P_3'| = |Q_2'Q_3|,\ |P_3P_4'| = |Q_3'Q_4|,\ |P_4P_1'| = |Q_4'Q_1|. \tag{3}$$

Podle známé poučky lze konvexnímu čtyřúhelníku $ABCD$ vepsat kružnici, právě když délky jeho stran splňují podmínku

$$|AB| + |CD| = |BC| + |DA|,$$

kterou lze s ohledem na (1) upravit do tvaru

$$|P_1P_2'| + |P_3P_4'| = |P_2P_3'| + |P_4P_1'|. \tag{4}$$

Všimněme si, že podle (2) a (3) platí rovnosti

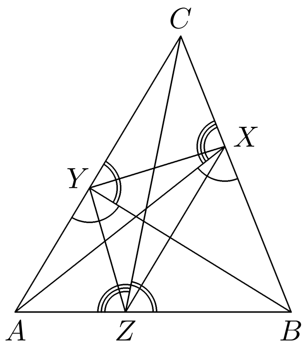
$$\begin{aligned}
|P_1P_2'| &= |Q_1'Q_2| = |Q_1'S| + |SQ_2| = |SQ_1| + |SQ_2|,\\
|P_2P_3'| &= |Q_2'Q_3| = |Q_2'S| + |SQ_3| = |SQ_2| + |SQ_3|,\\
|P_3P_4'| &= |Q_3'Q_4| = |Q_3'S| + |SQ_4| = |SQ_3| + |SQ_4|,\\
|P_4P_1'| &= |Q_4'Q_1| = |Q_4'S| + |SQ_1| = |SQ_4| + |SQ_1|.
\end{aligned}$$

Obě strany (4) se tudíž rovnají součtu $|SQ_1| + |SQ_2| + |SQ_3| + |SQ_4|$ a důkaz je hotov.

Za úplné řešení udělte 6 bodů.

2. Uvnitř stran BC, CA, AB daného ostroúhlého trojúhelníku ABC jsou po řadě vybrány body X, Y a Z tak, že každému ze čtyřúhelníků $ABXY$, $BCYZ$ a $CAZX$ lze opsat kružnici. Dokažte, že body X, Y, Z jsou paty výšek trojúhelníku ABC.

2. V tětivovém čtyřúhelníku $ABXY$ označme $\varphi = |\sphericalangle AXB| = |\sphericalangle AYB|$ velikost obou shodných obvodových úhlů nad společnou tětivou AB (obr. 1). Podobně označme



Obr. 1

$\psi = |\sphericalangle BZC| = |\sphericalangle BYC|$ a $\omega = |\sphericalangle CXA| = |\sphericalangle CZA|$ velikosti shodných obvodových úhlů nad tětivami BC a CA v tětivových čtyřúhelnících $BCYZ$ a $CAZX$. Zapíšeme-li postupně rovnosti pro každou ze tří dvojic vyznačených sousedních úhlů ve vrcholech X, Y a Z, dostaneme pro neznámé velikosti φ, ψ a ω soustavu tří lineárních rovnic

$$\begin{aligned} \varphi + \psi &= \pi, \\ \psi + \omega &= \pi, \\ \omega + \varphi &= \pi, \end{aligned}$$

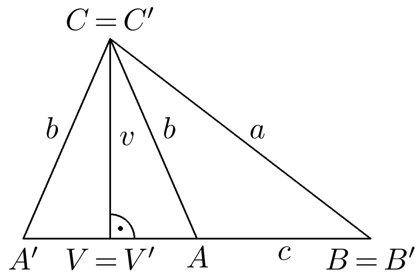
která má jediné řešení $\varphi = \psi = \omega = \frac{1}{2}\pi$, jak snadno zjistíme např. odečtením libovolných dvou rovnic a dosazením. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Poznámka. Jsou-li naopak body X, Y a Z paty výšek trojúhelníku ABC, jsou čtyřúhelníky $ABXY$, $BCYZ$ a $CAZX$ tětivové podle Thaletovy věty.

Za úplné řešení je 6 bodů.

3. *Je dán trojúhelník se stranami délek a, b, c a obsahem S. Dokažte, že rovnost $2c^2 = |a^2 - b^2|$ platí, právě když existuje trojúhelník se stranami délek a, b, $2c$ a obsahem $2S$.*

Řešení. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že platí $a \geqq b$. Jestliže je obsah trojúhelníku $A'B'C'$ se stranami délek a, b, $2c$ roven dvojnásobnému obsahu trojúhelníku ABC se stranami délek a, b, c, jsou výšky CV a $C'V'$ těchto trojúhelníků shodné. Trojúhelníky ACV a $A'C'V'$ jsou tedy shodné podle věty Ssu, proto můžeme oba trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ přemístit tak, aby platilo $B = B'$, $C = C'$ a $V = V'$; pak už ovšem nemůže platit $A = A'$. Jaká je poloha bodů A a A' na přímce BV? Protože $b = |AC| = |A'C|$, je trojúhelník $AA'C$ je rovnoramenný a jeho základna AA' má střed v bodě V (obr. 1). Předpoklad $a \geqq b$ znamená, že $|AC| = |A'C| \leqq |BC|$, takže bod B neleží na úsečce AA'; protože $|AB| = c$ a $|A'B| = 2c$, leží bod B na polopřímce opačné k AA' tak, že bod A je středem úsečky $A'B$.



Obr. 1

Z pravoúhlých trojúhelníků AVC a BVC vyplývá

$$v^2 = a^2 - \left(\frac{3}{2}c\right)^2,$$
$$v^2 = b^2 - \left(\frac{1}{2}c\right)^2.$$

Porovnáním pravých stran dostaneme po úpravě

$$a^2 - b^2 = 2c^2.$$

Ukázali jsme tak, že pokud k danému trojúhelníku ABC existuje trojúhelník se stranami $a, b, 2c$ a obsahem $2S$, pak pro délky a, b, c musí být splněna rovnost $|a^2 - b^2| = 2c^2$.

Předpokládejme naopak, že pro velikosti stran a, b, c trojúhelníku ABC platí $|a^2 - b^2| = 2c^2$. Nejprve ukážeme, že trojúhelník se stranami a, b, $2c$ existuje, tj. že platí trojúhelníková nerovnost

$$a + b > 2c > |a - b|.$$

Pro trojúhelník ABC platí trojúhelníková nerovnost $a + b > c > |a - b|$. Proto platí $2c > c > |a - b|$. Vynásobíme-li dále obě strany nerovnosti $c > |a - b|$ kladným výrazem $a + b$, obdržíme nerovnost

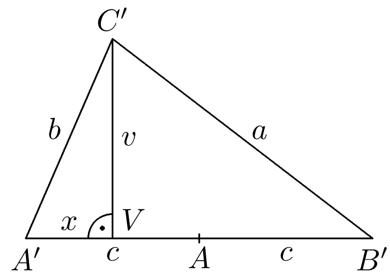
$$c(a + b) > |a^2 - b^2| = 2c^2,$$

z níž po dělení c vyplývá nerovnost

$$a + b > 2c.$$

Předpokládejme nyní, že v trojúhelníku $A'B'C'$ o stranách a, b, $2c$ platí rovnost $2c^2 = a^2 - b^2$ (opět bez újmy na obecnosti předpokládáme, že $a > b$ — zde nemůže být $a = b$, protože by bylo $c = 0$).

Vysvětlíme, proč pata V výšky z vrcholu C' na stranu $A'B'$ padne dovnitř této strany (a ne na její prodloužení). K tomu stačí ukázat, že trojúhelník $A'B'C'$ má ostré vnitřní úhly u vrcholů A' i B' (obr. 2). Úhel $A'B'C'$ je menší než úhel $B'A'C'$, neboť předpokládáme, že $a > b$. Úhel $B'A'C'$ je ostrý, právě když platí nerovnost $|B'C'|^2 < < |A'B'|^2 + |A'C'|^2$, neboli $a^2 < 4c^2 + b^2$. Poslední nerovnost je ale zaručena rovností $a^2 = b^2 + 2c^2$.



Obr. 2

Z pravoúhlých trojúhelníků $A'VC'$ a $B'VC'$ plyne, že pro délky $x = |A'V|$ a $v = |C'V|$ platí

$$v^2 = b^2 - x^2,$$
$$v^2 = a^2 - (2c - x)^2.$$

Porovnáním pravých stran dostaneme po úpravě

$$4cx = 4c^2 - (a^2 - b^2)$$

a dosazením za $a^2 - b^2$ vyjde

$$4cx = 4c^2 - 2c^2 = 2c^2, \qquad \text{tj. } x = \frac{1}{2}c.$$

Označíme-li A (ve shodě s první částí) střed strany $A'B'$, platí

$$|AC'| = |A'C'| = b,$$

tudíž trojúhelník $AB'C'$ má strany délek a, b, c a obsah rovný polovině obsahu trojúhelníku $A'B'C'$. Tím jsme dokázali opačnou implikaci.

Jiné řešení. Z Heronova vzorce pro obsah S_1 trojúhelníku ABC a pro obsah S_2 trojúhelníku $A'B'C'$ máme

$$S_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\big((a+b)^2 - c^2\big)\big(c^2 - (a-b)^2\big)},$$
$$S_2 = \frac{1}{4}\sqrt{\big((a+b)^2 - 4c^2\big)\big(4c^2 - (a-b)^2\big)}.$$

Z podmínky $S_2 = 2S_1$ plyne

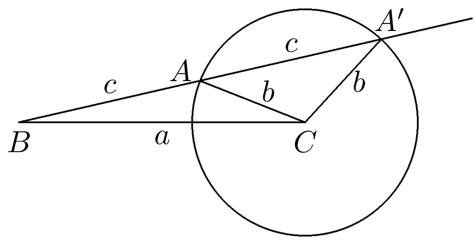
$$\big((a+b)^2 - 4c^2\big)\big(4c^2 - (a-b)^2\big) = 4\big((a+b)^2 - c^2\big)\big(c^2 - (a-b)^2\big).$$

Z této podmínky po úpravě dostaneme

$$(a^2 - b^2)^2 = 4c^4, \quad \text{tj. } \big|a^2 - b^2\big| = 2c^2.$$

Provedené úpravy jsou ekvivalentní, proto je možno celý postup obrátit. Z rovnosti $|a^2 - b^2| = 2c^2$ vyplývá, že trojúhelník $A'B'C'$ má dvakrát větší obsah než trojúhelník ABC. Existenci trojúhelníků lze dokázat stejným postupem jako v prvním řešení.

Jiné řešení. Uvažujme úsečku BC délky a ($a > b$) a kružnici k se středem v bodě C a poloměrem b (obr. 3).



Obr. 3

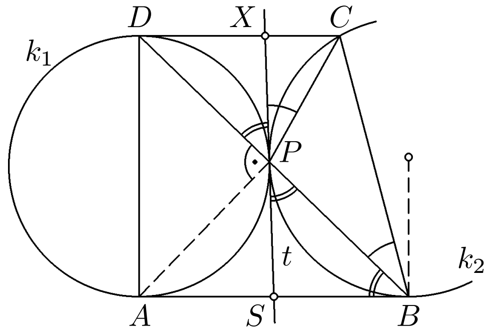
Ve stejné polorovině (s hraniční přímkou BC) uvažujme body A a A', pro něž platí $|AB| = c$, $|A'B| = 2c$. Leží-li body B, A a A' na téže přímce, potom obsah trojúhelníku $A'BC$ je dvojnásobkem obsahu trojúhelníku ABC. Z mocnosti bodu B ke kružnici k plyne

$$|BA| \cdot |BA'| = 2c^2 = a^2 - b^2.$$

Je-li naopak splněna poslední rovnost, protne polopřímka opačná k AB kružnici k v bodě, jehož vzdálenost od bodu B je rovna $2c$, tímto bodem je však A'. Odtud již plyne tvrzení pro obsahy trojúhelníků. Existenci trojúhelníků lze dokázat stejným postupem jako v prvním řešení.

5. *V rovině je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB a pravým úhlem při vrcholu A. Kružnice k_1 sestrojená nad stranou AD jako průměrem a kružnice k_2, která prochází vrcholy B, C a dotýká se přímky AB, mají vnější dotyk v bodě P. Dokažte, že úhly CPD a ABC jsou shodné.*

Řešení. Protože úsečka AD je průměrem kružnice k_1, je úhel APD pravý (obr. 4).



Obr. 4

Uvažujme společnou tečnu t obou kružnic procházející bodem P. Označme po řadě S a X průsečíky tečny t s úsečkami AB a CD. Přímka AB je však také společnou tečnou obou kružnic. Platí proto $|SA| = |SP| = |SB|$. Bod S je proto středem Thaletovy kružnice sestrojené na stranou AB jako průměrem. Úhel APB je tudíž stejně jako úhel APD pravý a bod P je tedy vnitřním bodem úsečky BD.

Trojúhelník BPS je rovnoramenný se základnou BP, pro jeho úhly tedy platí $|\sphericalangle SBP| = |\sphericalangle SPB|$. Úhel SPB má navíc stejnou velikost jako úhel DPX (dvojice vrcholových úhlů). Platí proto $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle DPX|$. Současně však je úhel XPC úhlem úsekovým pro tětivu CP kružnice k_2. Z rovnosti obvodového a úsekového úhlu máme $|\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle XPC|$.

Celkově dostáváme

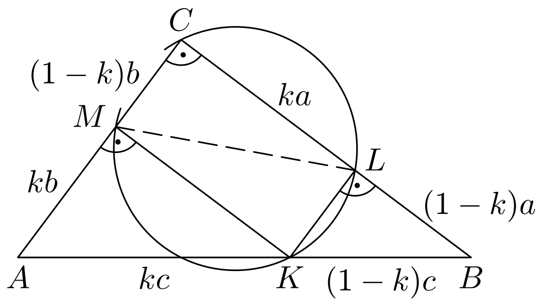
$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ABP| + |\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle DPX| + |\sphericalangle XPC| = |\sphericalangle DPC|,$$

což jsme chtěli dokázat.

2. V rovině je dán pravoúhlý trojúhelník ABC, na jehož přeponě AB uvažujeme libovolný bod K. Kružnice sestrojená nad úsečkou CK jako nad průměrem protne odvěsny BC a CA ve vnitřních bodech, které označíme po řadě L a M. Rozhodněte, pro který bod K má čtyřúhelník $ABLM$ nejmenší možný obsah.

4. V rovině je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB a pravým úhlem při vrcholu A. Označme k_1 kružnici sestrojenou nad stranou AD jako nad průměrem a k_2 kružnici procházející vrcholy B, C a dotýkající se přímky AB. Mají-li kružnice k_1, k_2 vnější dotyk v bodě P, je přímka BC tečnou kružnice opsané trojúhelníku CDP. Dokažte.

2. Protože úhly KLC, KMC a LCM jsou pravé (obr. 1), je čtyřúhelník $KLCM$ pravoúhelník a trojúhelníky AKM a KBL jsou podobné trojúhelníku ABC. Označme



Obr. 1

jako obvykle $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ a položme $|AK| = kc$, kde $0 < k < 1$. Pak ovšem $|KB| = (1 - k)c$ a ze zmíněné podobnosti trojúhelníků dostáváme vyjádření $|AM| = kb$, $|LC| = |KM| = ka$, $|BL| = (1 - k)a$ a $|MC| = |KL| = (1 - k)b$. Proto platí

$$\begin{aligned} S_{ABLM} = S_{ABC} - S_{LMC} &= \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2} \cdot ka \cdot (1-k)b = \\ &= \frac{1}{2}ab(1 - k + k^2) = \frac{1}{2}ab\left(\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) \geqq \\ &\geqq \frac{1}{2}ab \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}S_{ABC}, \end{aligned}$$

přičemž rovnost $S_{ABLM} = \frac{3}{4}S_{ABC}$ nastane, právě když $k = \frac{1}{2}$, tedy právě když je bod K středem přepony AB.

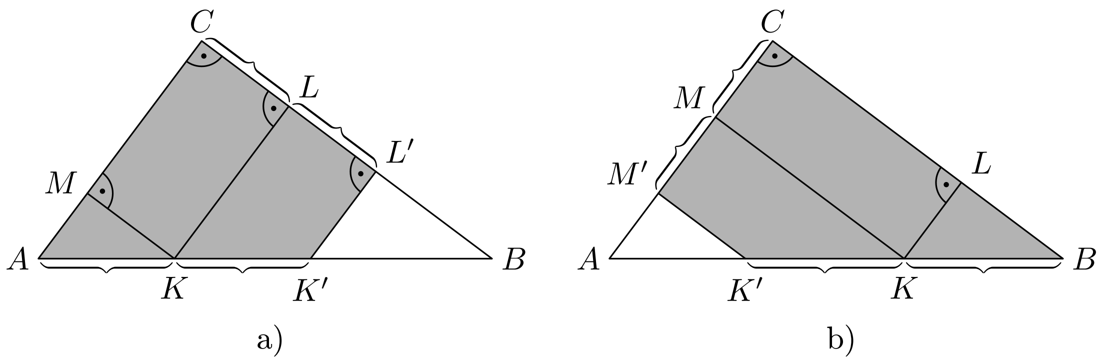
Jiné řešení. Čtyřúhelník $ABLM$ má minimální obsah, právě když má maximální obsah trojúhelník LMC, který je „polovinou" pravoúhelníku $KLCM$. Stačí proto ukázat, že obsah S_{KLCM} je maximální, právě když je bod K středem přepony AB (kdy zřejmě $S_{KLCM} = \frac{1}{2}S_{ABC}$). Je-li bod K vybrán tak, že $|AK| < \frac{1}{2}|AB|$, je úsečka KL střední příčkou lichoběžníku $AK'L'C$, který má o $S_{K'L'B}$ menší obsah než trojúhelník ABC (obr. 2a), takže platí

$$S_{KLCM} = \frac{1}{2}S_{AK'L'C} < \frac{1}{2}S_{ABC}.$$

Je-li naopak $|AK| > \frac{1}{2}|AB|$, využijeme obdobný lichoběžník $BK'M'C$ (obr. 2b) a usoudíme, že platí

$$S_{KLCM} = \frac{1}{2}S_{BK'M'C} < \frac{1}{2}S_{ABC}.$$

Tím je tvrzení o maximálním obsahu S_{KLCM} dokázáno.

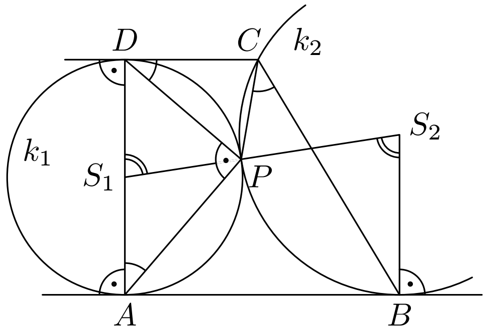


Obr. 2

Odpověď. Čtyřúhelník $ABLM$ má nejmenší možný obsah, právě když bod K leží uprostřed přepony AB.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Odvodí-li řešitel pouze funkční vyjádření jednoho z obsahů S_{ABLM}, S_{LMC}, S_{KLCM}, které by umožnilo nalézt jeho extrémní hodnotu, udělte 3 body. Udělte 1 bod, je-li správná odpověď pouze uhodnuta nebo zcela chybně zdůvodněna.

4. Označme S_1 a S_2 středy uvažovaných kružnic (obr. 4). Obě úsečky S_1A a S_2B jsou kolmé na přímku AB, jsou tudíž rovnoběžné a střídavé úhly PS_2B a PS_1D shodné. Podle



Obr. 4

věty o obvodových a střídavých úhlech proto platí

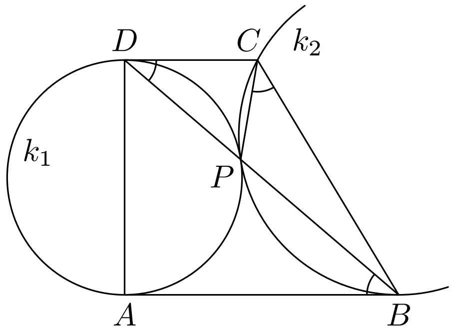
$$|\sphericalangle PCB| = \frac{1}{2}|\sphericalangle PS_2B| = \frac{1}{2}|\sphericalangle PS_1D| = |\sphericalangle PAD|.$$

Oba úhly APD a ADC jsou však pravé, tudíž

$$|\sphericalangle PAD| = 90^\circ - |\sphericalangle ADP| = |\sphericalangle CDP|.$$

Dohromady dostáváme, že úhly PCB a CDP jsou shodné, což podle věty o obvodovém a úsekovém úhlu znamená, že přímka BC je tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku CDP.

Jiné řešení. Ve stejnolehlosti se středem P, při které kružnice k_1 přejde v kružnici k_2, musí tečna CD kružnice k_1 přejít v rovnoběžnou tečnu AB kružnice k_2, přitom se bod dotyku D zobrazí do bodu dotyku B. Bod P tudíž leží na úhlopříčce BD (obr. 5).[1] Odtud plyne shodnost střídavých úhlů CDP a PBA (mezi rovnoběžkami AB a CD). Úhel PBA



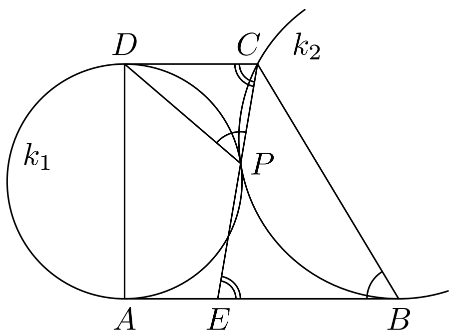
Obr. 5

je ale úsekový úhel mezi tětivou BP a tečnou AB kružnice k_2, je tedy shodný s příslušným

[1] Poznatek $P \in BD$ nemusí řešitelé dokazovat, když se odvolají na řešení úlohy domácího kola B–52–I–5, viz následnou Poznámku.

obvodovým úhlem PCB. Úhly CDP a PCB jsou proto shodné, což jsme potřebovali dokázat (viz závěr předchozího řešení).

Poznámka. Někteří řešitelé se možná odvolají na úlohu B–52–I–5, která se zabývala stejnou situací a podle které jsou shodné úhly ABC a CPD (obr. 6). Protože jsou shodné



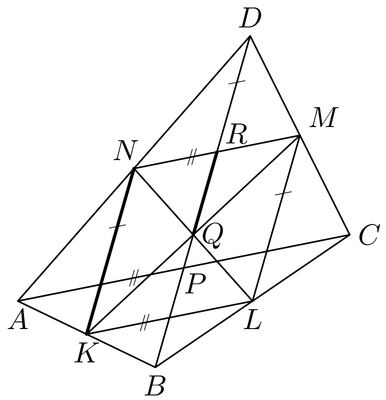
Obr. 6

i střídavé úhly PEB a PCD, kde E je průsečík polopřímky CP se stranou AB, lze kýženou shodnost úhlů CDP a PCB odvodit z trojúhelníků BCE a PDC. Řešení, která se odvolají na shodnost úhlů ABC a CPD na základě úlohy domácího kola, je nutno považovat za úplná.

Za úplné řešení je 6 bodů.

2. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Označme P průsečík jeho úhlopříček a Q průsečík spojnic středů jeho protějších stran. Leží-li bod Q na úhlopříčce BD, je bod P středem úhlopříčky AC. Dokažte.

2. Středy stran čtyřúhelníku $ABCD$ označme K, L, M, N podle obrázku. Protože úsečky KL a MN jsou střední příčky trojúhelníků ABC resp. ACD, platí $KL \parallel AC \parallel MN$.

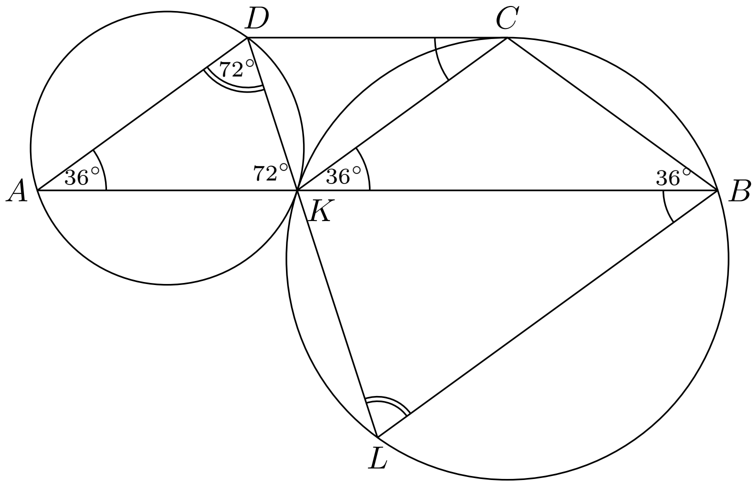


Obdobně platí $LM \parallel BD \parallel KN$, tudíž $KLMN$ je rovnoběžník a bod Q půlí úsečku KM. Všimněme si nyní trojúhelníku KMN. Středem Q jeho strany KM prochází podle předpokladu úlohy úhlopříčka BD, která je, jak víme, rovnoběžná s druhou stranou KN. Proto i střed R třetí strany MN leží na úhlopříčce BD. Protože úsečka MN je stejnolehlá s úsečkou CA podle středu D, půlí úhlopříčka BD nejen úsečku MN (v bodě R), ale i úsečku AC (v odpovídajícím bodě P).

Za úplné řešení je 6 bodů.

2. *V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ platí $|BC| = |CD| = |DA|$ a $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ABC| = 36°$. Na základně AB je dán bod K tak, že $|AK| = |AD|$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům AKD a KBC mají vnější dotyk.*

Řešení. V rovnoramenném trojúhelníku AKD známe úhel DAK proti základně KD. Můžeme dopočítat zbylé dva úhly při základně (obr. 1): $|\sphericalangle ADK| = |\sphericalangle AKD| = \frac{1}{2}(180° - |\sphericalangle DAK|) = 72°$. Čtyřúhelník $AKCD$ má protější strany AK a CD shodné a rovnoběžné, takže se jedná o rovnoběžník, tudíž přímky KC a AD jsou rovnoběžné. Úhly DAK a CKB jsou tedy souhlasné a úhly CKB a KCD střídavé, proto $|\sphericalangle CKB| = |\sphericalangle KCD| = 36°$. Úhel DKC doplňuje úhly AKD a CKB do přímého úhlu, jeho velikost je tedy $|\sphericalangle DKC| = 180° - 36° - 72° = 72°$.

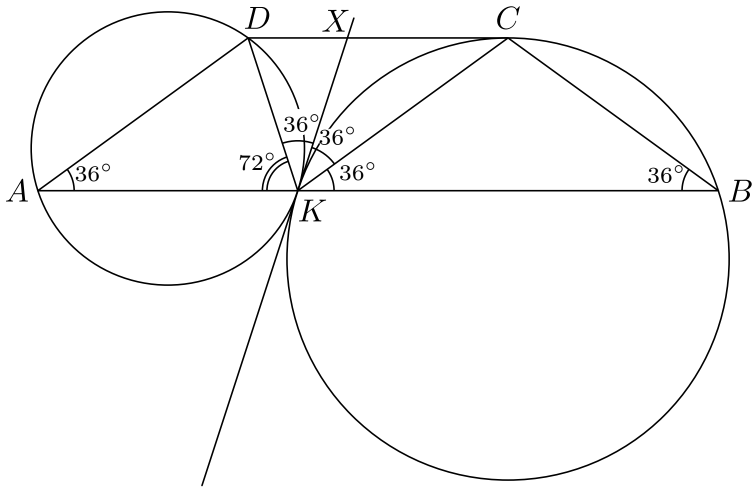


Obr. 1

Na polopřímce opačné k polopřímce KD zvolme bod L tak, že $|KL| = |AD|$. Potom $|\sphericalangle LKB| = |\sphericalangle AKD| = 72°$ a $|\sphericalangle CKL| = |\sphericalangle LKB| + |\sphericalangle CKB| = 108°$. Dopočítaním úhlů v lichoběžníku $ABCD$ dostáváme $|\sphericalangle BCD| = \frac{1}{2}(360° - 2 \cdot 36°) = 144°$ a můžeme vyjádřit velikost úhlu BCK: $|\sphericalangle BCK| = |\sphericalangle BCD| - |\sphericalangle KCD| = 144° - 36° = 108°$. Nyní již víme, že $|KL| = |CB|$ a $|\sphericalangle LKC| = |\sphericalangle KCB|$, což znamená, že $LBCK$ je rovnoramenný lichoběžník, a lze mu tedy opsat kružnici (shodnou s kružnicí opsanou trojúhelníku KBC). Dále můžeme z lichoběžníku $LBCK$ dopočítat $|\sphericalangle KLB| = \frac{1}{2}(360° - 2 \cdot 108°) = 72° = |\sphericalangle KDA|$. Z této rovnosti plyne, že $AD \parallel BL$, takže trojúhelníky ADK a BLK jsou vzájemně stejnolehlé podle středu K. Stejnolehlé jsou potom i kružnice jim opsané. Protože obě procházejí středem K zmíněné stejnolehlosti, mají v tomto bodě vnější dotyk.

Jiné řešení. Stejně jako v prvním řešení zjistíme, že $|AKD| = 72°$. Čtyřúhelník $AKCD$ je rovnoběžník (obr. 2), takže $|CK| = |AD|$. Z rovnosti $|CK| = |BC|$ v trojúhelníku KBC usoudíme, že $|\sphericalangle CKB| = |\sphericalangle KBC| = 36°$. Proto na základně CD existuje bod X tak, že $|AKX| = 108°$ (a $|\sphericalangle BKX| = 72°$). Pak $|\sphericalangle DKX| = |\sphericalangle AKX| - |\sphericalangle AKD| = 108° - 72° = 36°$, a tedy $|\sphericalangle DKX| = |\sphericalangle DAK|$, takže úhel DKX je úsekovým úhlem příslušným oblouku DAK v kružnici opsané trojúhelníku AKD, to znamená, že přímka KX je její tečnou. Podobně $|\sphericalangle CKX| = |\sphericalangle BKX| -$

$-\,|\sphericalangle BKC| = 72^\circ - 36^\circ = 36^\circ = |\sphericalangle KBC|$, takže KX je i tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku KBC. Kružnice opsané trojúhelníkům AKD a KBC mají tedy společnou tečnu KX procházející společným bodem K. Obě kružnice se tudíž v tomto bodě dotýkají.



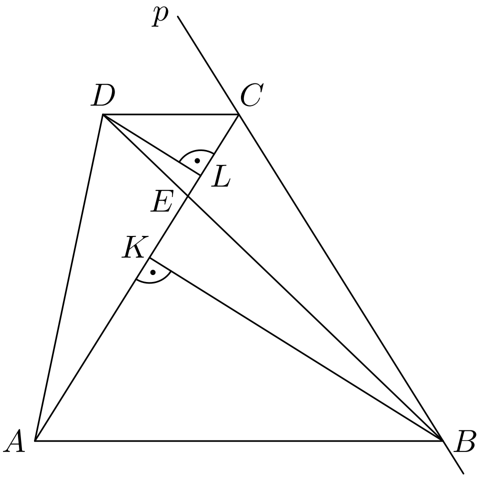
Obr. 2

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Procvičte definice a vlastnosti obvodových, středových a úsekových úhlů.
2. Dvě kružnice k_1 a k_2 se středy S_1 a S_2 se dotýkají v bodě A. Bodem A vedeme přímku, která protíná kružnici k_1 v bodě A_1 a kružnici k_2 v bodě A_2. Dokažte, že přímky S_1A_1 a S_2A_2 jsou rovnoběžné.
3. Tři kružnice k_1, k_2 a k_3 se navzájem dotýkají vně. Dokažte, že přímky spojující bod dotyku kružnic k_1 a k_2 se dvěma zbývajícími body dotyku protínají dále kružnici k_3 v bodech ležících na průměru této kružnice. [Využijte předchozí úlohu.]

5. *Je dána přímka p a mimo ni bod A. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ s minimálním obsahem a ramenem BC na přímce p tak, aby $|BC| = |AC|$ a průsečík E jeho úhlopříček splňoval vztah $|BE| = 3|DE|$.*

Řešení. Předpokládejme, že $ABCD$ je hledaný lichoběžník a K, L jsou paty kolmic z vrcholů B, D na přímku AC (obr. 3). Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků BKE

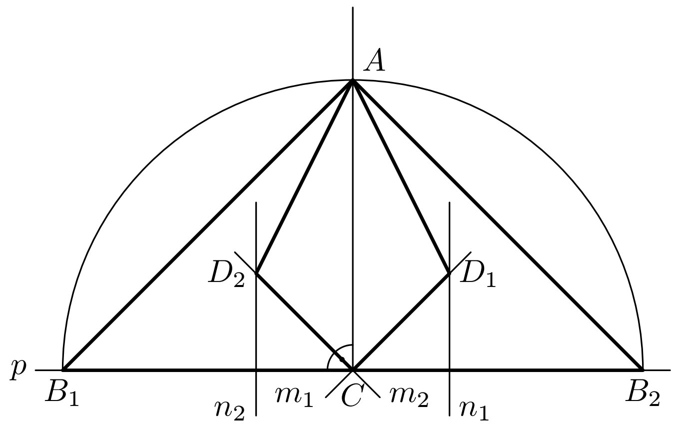


Obr. 3

a DLE plyne, že délky stran BK a DL, tedy odvěsen ve zmíněných trojúhelnících, jsou ve stejném poměru jako délky jejich přepon BE a DE, tedy $3:1$. BK a DL jsou však i výšky v trojúhelnících ABC a ACD, a to na společnou stranu AC. Obsahy těchto trojúhelníků jsou tedy také v poměru $3:1$, takže obsah lichoběžníku $ABCD$ je roven $\frac{4}{3}P$, kde P je obsah rovnoramenného trojúhelníku ABC. Výška tohoto trojúhelníku z bodu A na stranu BC je dána (vzdálenost bodu A od přímky p). Obsah trojúhelníku ABC bude tedy minimální, bude-li minimální délka strany BC, tedy i AC, tedy když úsečka AC bude kolmá na p.

Konstrukce. Nejprve sestrojíme bod C (pata kolmice z A na p). Vrchol B nalezneme jako průsečík přímky p s kružnicí $k(C, |AC|)$ (dvě možnosti). Vrchol D je průsečíkem přímky m, vedené bodem C rovnoběžně s AB, a přímky n rovnoběžné s AC ve vzdálenosti $\frac{4}{3}|BC|$ od vrcholu B uvnitř poloroviny opačné k ACB.

Úloha má celkem dvě řešení souměrně sdružená podle přímky $AC \perp p$ (obr. 4).



Obr. 4

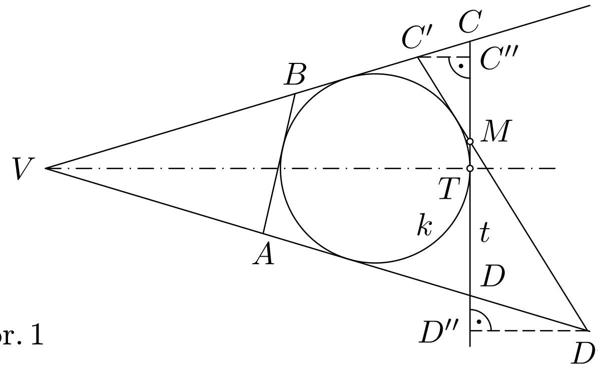
Návodné úlohy:

1. Z pravoúhlých trojúhelníků s danou délkou přepony určete ten s největším obsahem. [Rovnoramenný pravoúhlý.]
2. Dokažte, že z trojúhelníků ABC s daným úhlem při vrcholu A a pevným obsahem má nejmenší délku strany BC rovnoramenný trojúhelník se základnou BC. [Použijte kosinovou větu.]

4. Je dán ostroúhlý trojúhelník VBA. Sestrojte tečnový čtyřúhelník $ABCD$ s minimálním obsahem tak, aby jeho vrcholy C a D ležely po řadě na polopřímkách opačných k polopřímkám BV a AV.

4. Kružnice vepsaná hledanému čtyřúhelníku je kružnicí k připsanou straně AB trojúhelníku BAV. Ten ze dvou průsečíků osy úhlu AVB s kružnicí k, který je dál od vrcholu V, označme T (obr. 1). Hledané body C a D nalezneme jako průsečíky tečny t

v bodě T ke kružnici k po řadě s přímkami VB, VA. Dokažme, že takto sestrojený čtyřúhelník má ze všech čtyřúhelníků vyhovujících podmínkám úlohy nejmenší obsah.



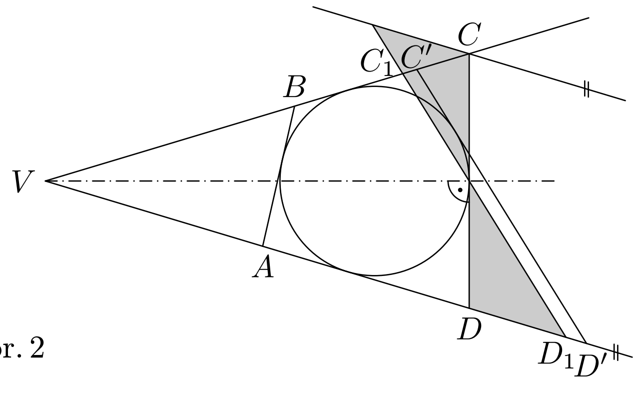
Obr. 1

Označme C', D' vrcholy jiného tečnového čtyřúhelníku s vepsanou kružnicí k (přímka $C'D'$ je tečnou kružnice k). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že průsečík M tečen t a $C'D'$ leží uvnitř úsečky TC. To znamená, že platí $|MD| > |MC|$ (obr. 1). Označme C'' a D'' odpovídající paty kolmic spuštěných z bodů C' a D' na přímku t; bod C'' leží uvnitř úsečky MC a D'' na polopřímce MD vně úsečky MD, takže $|MC''| < |MC| < < |MD| < |MD''|$ a z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků $MC'C''$ a $MD'D''$ plyne $|C'C''| < |D'D''|$. Trojúhelník DMD' má tudíž větší obsah než trojúhelník CMC'. Rozdíl jejich obsahů je však roven rozdílu obsahů čtyřúhelníků $ABC'D'$ a $ABCD$, tedy obsah čtyřúhelníku $ABC'D'$ je větší než obsah čtyřúhelníku $ABCD$.

Jiné řešení. Stejně jako v prvním řešení označme C, D průsečíky tečny t připsané kružnice k s rameny úhlu VB, VA. Jsou-li C', D' vrcholy jiného tečnového čtyřúhelníku s vepsanou kružnicí k, platí pro obsahy tečnových čtyřúhelníků $ABCD$ a $ABC'D'$

$$S(ABCD) = S(VCD) - S(VAB), \qquad S(ABC'D') = S(VC'D') - S(VAB).$$

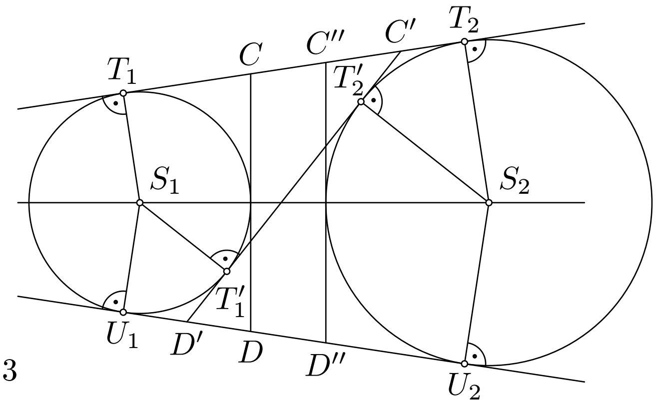
Stačí tedy ukázat, že pro libovolnou takovou tečnu $C'D'$, která není kolmá na osu úhlu AVB, platí $S(VC'D') > S(VCD)$. To je však zřejmé z obr. 2 (oba šedé trojúhelníky mají díky středové souměrnosti stejný obsah a přitom $S(VC'D') > S(VC_1D_1) > > S(VCD)$).



Obr. 2

Jiné řešení. Obsah tečnového čtyřúhelníku $ABCD$, jehož vepsaná kružnice má poloměr r, je $S = \frac{1}{2}r(|AB| + |BC| + |CD| + |DA|) = \frac{1}{2}r(2|AB| + 2|CD|) = r(|AB| + |CD|)$.

Obsah tečnového čtyřúhelníku $ABCD$ splňujícího podmínky úlohy bude tedy nejmenší, právě když bude nejkratší úsečka CD.



Obr. 3

Uvažujme kružnici připsanou straně $C'D'$ trojúhelníku $VC'D'$ (obr. 3). Z vlastností tečen postupně nahlédneme, že je $|T_1C| = \frac{1}{2}|CD|$, $|T_2C''| = \frac{1}{2}|C''D''|$ a také $|C'D'| = |T_1T_2|$. Poslední rovnost plyne ze známých vlastností vepsané a připsané kružnice, totiž že jejich body dotyku na společnou stranu jsou souměrně sdružené podle středu strany; důkaz ovšem vyžaduje trochu počítání:

$$|T_1T_2| = |T_1C'| + |C'T_2| = |T'_1C'| + |C'T'_2| = |T'_1T'_2| + 2|T'_2C'|,$$
$$|U_1U_2| = |U_1D'| + |D'U_2| = |T'_1D'| + |D'T'_2| = |T'_1T'_2| + 2|T'_1D'|.$$

Ze souměrnosti podle osy úhlu AVB plyne $|T_1T_2| = |U_1U_2|$, takže $|T'_2C'| = |T'_1D'|$. Je tedy $|C'D'| = |T'_1T'_2| + 2|T'_2C'| = |T_1T_2|$.

Protože obě kružnice jsou odděleny společnou tečnou $C'D'$, nemohou se dotýkat, takže $|CD| < |C''D''|$, neboli $|CT_1| < |C''T_2|$. To znamená, že je

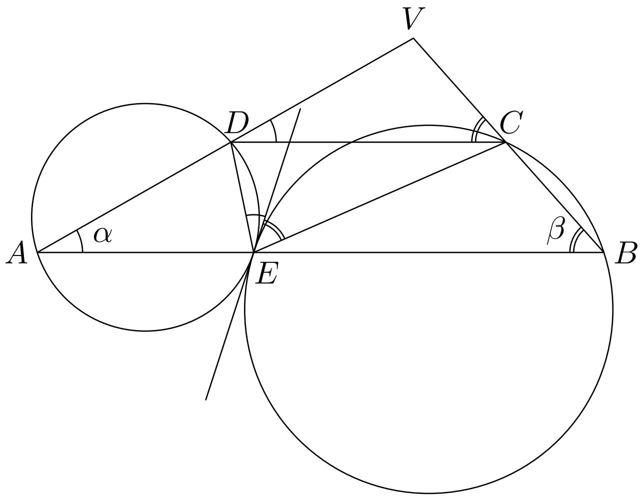
$$|CD| = 2|T_1C| < |T_1C| + |C''T_2| < |T_1T_2| = |C'D'|,$$

což jsme chtěli dokázat.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za určení kružnice vepsané všem vyhovujícím čtyřúhelníkům $ABCD$, další 1 bod za uhodnutí polohy hledané tečny CD a 3 body za důkaz, že při jiné poloze CD je obsah $ABCD$ větší.

3. Je dán lichoběžník $ABCD$ s ostrými úhly při základně AB. Na ní existuje bod E takový, že kružnice opsané trojúhelníkům AED a EBC mají vnější dotyk. Dokažte, že bod E leží na kružnici opsané trojúhelníku CDV, kde V je průsečík přímek AD a BC.

3. Označme α a β po řadě vnitřní úhly při vrcholech A a B (obr. 1). Bodem E prochází společná tečna obou uvažovaných kružnic, úhel DEC je tedy součtem úsekových úhlů příslušných tětivě DE v jedné kružnici (s obvodovým úhlem α) a tětivě EC v druhé kružnici (s obvodovým úhlem β). Jeho velikost je tudíž $\alpha+\beta$. A protože velikost úhlu CVD je $180° - (\alpha + \beta)$, zjišťujeme, že ve čtyřúhelníku $CVDE$ se úhly u protějších vrcholů E a V doplňují do $180°$. To, jak víme, znamená, že $CVDE$ je tětivový čtyřúhelník, tj. bod E leží na kružnici opsané trojúhelníku CDV.

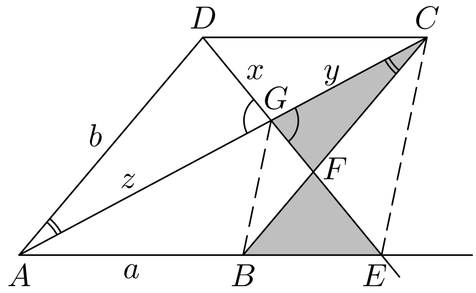


Obr. 1

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Většina řešitelů asi sáhne spíš k pracnějším výpočtům úhlů, protože s úsekovými úhly nemají mnoho zkušeností. V takovém případě doporučujeme je na vzorové řešení upozornit.

2. *Je dán rovnoběžník $ABCD$. Přímka vedená bodem D protíná úsečku AC v bodě G, úsečku BC v bodě F a polopřímku AB v bodě E tak, že trojúhelníky BEF a CGF mají stejný obsah. Určete poměr $|AG| : |GC|$.*

Řešení. Z obr. 1 je vidět, že trojúhelníky AGD a CGF jsou podobné podle věty



Obr. 1

uu. Příslušný poměr podobnosti k je roven hledanému poměru $|AG| : |GC|$. Označíme-li proto $b = |AD|$, $x = |DG|$ a $y = |CG|$, platí $|GF| = x/k$ a $|CF| = b/k$, odkud

$$|FB| = |BC| - |FB| = b - \frac{b}{k} = (k-1)\frac{b}{k}$$

a

$$|DF| = |DG| + |GF| = x + \frac{x}{k} = (k+1)\frac{x}{k}.$$

Z podobnosti trojúhelníků $BEF \sim CDF$ dostáváme

$$|EF| = \frac{|DF| \cdot |BF|}{|CF|} = \frac{k^2-1}{k} \cdot x.$$

Z rovnosti obsahů trojúhelníků BEF a CGF vyplývá

$$|FB| \cdot |FE| = |FC| \cdot |FG|,$$

odkud po dosazení vyjde

$$\frac{k-1}{k} \cdot b \cdot \frac{k^2-1}{k} \cdot x = \frac{b}{k} \cdot \frac{x}{k}.$$

Je tedy $k^3 - k^2 - k + 1 = 1$, a protože $k \neq 0$, dostáváme pro hledané k kvadratickou rovnici $k^2 - k - 1 = 0$. Úloze vyhovuje její kladný kořen $k = \frac{1}{2}\bigl(1 + \sqrt{5}\bigr)$.

Jiné řešení. Označme $|AG| = z$, $|GC| = y$. Protože trojúhelníky BEF a CGF mají stejný obsah, mají stejný obsah i trojúhelníky GBE a GBC. Proto platí $EC \parallel BG$. Z podobnosti trojúhelníků $ABG \sim AEC$, $DFC \sim EFB$, $CFE \sim BFG$ a $AEC \sim ABG$ postupně plyne

$$\frac{z}{y} = \frac{|AG|}{|GC|} = \frac{|AB|}{|BE|} = \frac{|DC|}{|BE|} = \frac{|FC|}{|BF|} = \frac{|CE|}{|BG|} = \frac{|AC|}{|AG|} = \frac{z+y}{z}.$$

Z výsledné rovnosti $z/y = 1 + y/z$ dostáváme

$$\left(\frac{z}{y}\right)^2 - \frac{z}{y} - 1 = 0,$$

a protože $z/y > 0$, je

$$\frac{z}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Návodné úlohy:

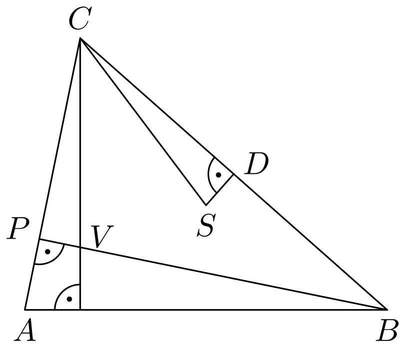
1. Označme P průsečík úhlopříček konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte, že trojúhelníky APD a CPB mají stejný obsah, právě když $AB \parallel CD$.
2. Označme P průsečík úhlopříček konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ a K, L průsečíky přímky vedené bodem P rovnoběžně se stranou AB. Dokažte, že rovnost $|KP| = |PL|$ platí, právě když $AB \parallel CD$.

4. *Označme V průsečík výšek a S střed kružnice opsané trojúhelníku ABC, který není rovnostranný. Pokud má úhel při vrcholu C velikost 60°, je osa úhlu ACB osou úsečky VS. Dokažte.*

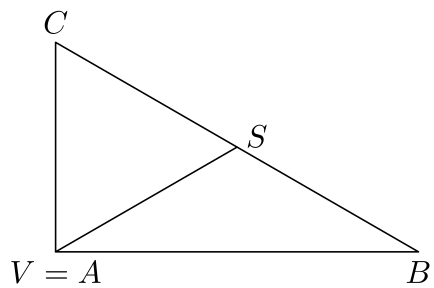
Řešení. Nechť například $|AC| < |BC|$. Předpokládejme nejprve, že trojúhelník ABC je ostroúhlý. Označme D střed strany BC a P patu výšky z vrcholu B na stranu AC (obr. 2). Platí $|CP| = |BC| \cdot \cos 60° = \frac{1}{2}|BC| = |CD|$, $|\sphericalangle CPV| = |\sphericalangle CDS| = 90°$, $|\sphericalangle CVP| = |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle CSD|$ (obvodový úhel a polovina středového). Ze shodnosti trojúhelníků CPV a CDS vyplývá $|CV| = |CS|$, $|\sphericalangle PCV| = |\sphericalangle DCS|$. Trojúhelník VSC je tedy rovnoramenný, a osa úhlu ACB je tak i osou úhlu VCS a současně osou strany VS.

Je-li trojúhelník ABC pravoúhlý (obr. 3), je trojúhelník VSC rovnostranný a osa úhlu VCS je i osou strany VS.

Je-li trojúhelník ABC tupoúhlý, dokážeme tvrzení úlohy stejně jako v případě ostroúhlého trojúhelníku s tím rozdílem, že bude $|\sphericalangle CVP| = |\sphericalangle CSD| = 180° - |\sphericalangle CAB|$.



Obr. 2



Obr. 3

Návodné úlohy:

1. Označme V průsečík výšek a S střed kružnice opsané trojúhelníku ABC. Vypočítejte velikost úhlu ACB, jestliže platí $|VC| = |SC|$.
2. Nechť V je průsečík výšek trojúhelníku ABC. Dokažte, že body souměrně sdružené s bodem V podle stran trojúhelníku ABC leží na kružnici opsané tomuto trojúhelníku.

6. *Do kružnice k o poloměru r jsou vepsány dvě kružnice k_1, k_2 o poloměru $\frac{1}{2}r$, jež se vzájemně dotýkají. Kružnice l se vně dotýká kružnic k_1, k_2 a s kružnicí k má vnitřní dotyk. Kružnice m má vnější dotyk s kružnicemi k_2 a l a vnitřní dotyk s kružnicí k. Vypočtěte poloměry kružnic l a m.*

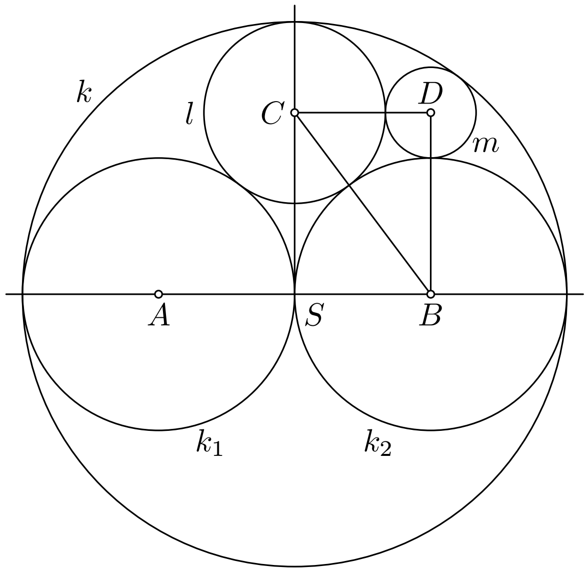
Řešení. Označme S, A, B, C, D středy kružnic k, k_1, k_2, l, m a x, y poloměry kružnic l a m. Bod C leží na přímce, která prochází bodem S a je kolmá na AB (obr. 4). Z pravoúhlého trojúhelníku BCS máme podle Pythagorovy věty

$$\left(\frac{r}{2}+x\right)^2=\left(\frac{r}{2}\right)^2+(r-x)^2$$

a odtud $x=\frac{1}{3}r$. Označme P, Q paty kolmic z bodu D na přímky AB a SC a $u=|SP|$, $v=|SQ|$. Jestliže $u\neq\frac{1}{2}r$, je BPD pravoúhlý trojúhelník a podle Pythagorovy věty

$$\left(\frac{r}{2}+y\right)^2=v^2+\left(u-\frac{r}{2}\right)^2. \tag{1}$$

Tato rovnice platí i v případě $u = \frac{1}{2}r$.



Obr. 4

Podobně z pravoúhlého trojúhelníku QCD (jestliže $Q \neq C$) anebo porovnáním protilehlých stran obdélníku (jestliže $Q = C$) dostaneme

$$\left(\frac{r}{3} + y\right)^2 = u^2 + \left(v - \frac{2r}{3}\right)^2. \tag{2}$$

Navíc z pravoúhlého trojúhelníku SPD máme

$$(r - y)^2 = u^2 + v^2. \tag{3}$$

Odečtením rovnic (3) a (2) dostaneme $\frac{4}{3}r^2 - \frac{8}{3}ry = \frac{4}{3}vr$, tedy $v = r - 2y$. Podobně odečtením rovnic (3) a (1) vyjde $r^2 - 3ry = ur$ a odtud $u = r - 3y$. Dosazením do (3) a úpravou postupně dostaneme

$$\begin{aligned}(r - y)^2 &= (r - 3y)^2 + (r - 2y)^2,\\ r^2 - 8ry + 12y^2 &= 0,\\ (r - 6y)(r - 2y) &= 0.\end{aligned}$$

Odtud plyne, že $y = \frac{1}{2}r$ nebo $y = \frac{1}{6}r$. Poloměr $\frac{1}{2}r$ má kružnice k_1, poloměr $\frac{1}{6}r$ kružnice m znázorněná na obr. 4. Každá z těchto dvou kružnic se dotýká kružnic k, k_2 a l požadovaným způsobem.

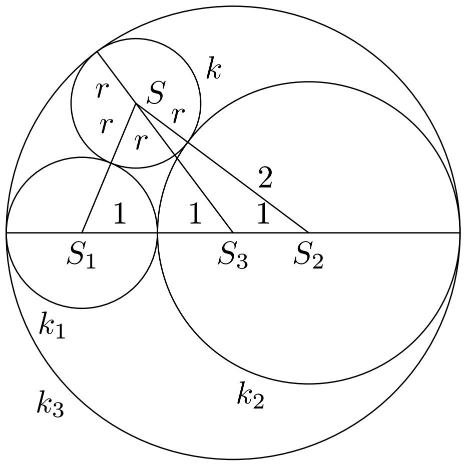
Návodné úlohy:

1. Kružnice k_2 o poloměru $\frac{1}{2}$ se dotýká zevnitř kružnice k_1 o poloměru 1. Přímka p prochází středy kružnic k_1 a k_2. Vypočítejte poloměr kružnice, která se dotýká přímky p a obou dvou kružnic k_1 a k_2. [$\frac{4}{9}$]
2. Každá z kružnic k_1, k_2, k_3 se dotýká vně dvou zbývajících. Kružnice k_1 a k_2 mají stejný poloměr r, kružnice k_3 má poloměr $\frac{8}{5}r$. Všechny kružnice k_1, k_2, k_3 mají vnitřní dotyk s kružnicí k o poloměru 1. Vypočtěte poloměr r. [$\frac{3}{8}$]
3. Každá z kružnic k_1, k_2, k_3 se dotýká vně dvou zbývajících. Kružnice k_1 má poloměr 1, kružnice k_2 má poloměr 2 a kružnice k_3 má poloměr 3. Vypočítejte poloměry kružnic, které se dotýkají všech třech kružnic k_1, k_2, k_3. [$\frac{6}{23}$ a 6]

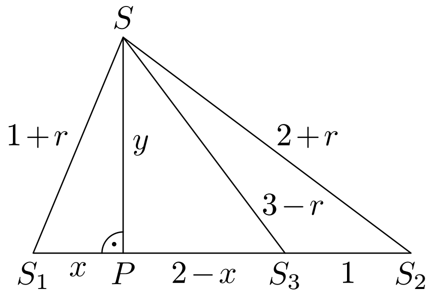
1. Kružnice k_1 o poloměru 1 má vnější dotyk s kružnicí k_2 o poloměru 2. Každá z kružnic k_1, k_2 má vnitřní dotyk s kružnicí k_3 o poloměru 3. Vypočítejte poloměr kružnice k, která má s kružnicemi k_1, k_2 vnější dotyk a s kružnicí k_3 vnitřní dotyk.

3. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník. Označme K a L paty výšek z vrcholů A a B, M střed strany AB a V průsečík výšek trojúhelníku ABC. Dokažte, že osa úhlu KML prochází středem úsečky VC.

1. Protože se součet průměrů kružnic k_1 a k_2 rovná průměru kružnice k_3, leží jejich středy S_1, S_2 a S_3 v přímce. Existují dvě shodné kružnice, které splňují podmínky úlohy, a jsou souměrně sdružené podle přímky S_1S_2. Označme k jednu z nich (obr. 1), S její střed a r odpovídající poloměr.



Obr. 1



Obr. 2

Pro velikosti stran trojúhelníku S_1S_2S platí: $|S_1S| = 1 + r$, $|S_2S| = 2 + r$, $|S_1S_2| = 3$ a $|S_3S| = 3 - r$ Pro bod S_3 zároveň platí, že $|S_3S_1| = 2$ a $|S_3S_2| = 1$. Označíme-li P pravoúhlý průmět bodu S na přímku S_1S_2 (obr. 2) a $x = |S_1P|$, $y = |SP|$, můžeme podle Pythagorovy věty psát

$$\begin{aligned}(1 + r)^2 &= x^2 + y^2,\\ (2 + r)^2 &= (3 - x)^2 + y^2,\\ (3 - r)^2 &= (2 - x)^2 + y^2.\end{aligned}$$

Odečtením první rovnice od druhé dostaneme $3+2r = 9-6x$ neboli $2r = 6-6x$, odečtením první od třetí $8 - 8r = 4 - 4x$ neboli $2r = 1 + x$. Porovnáním obou důsledků vyjde rovnice $6 - 6x = 1 + x$, odkud $x = \frac{5}{7}$, $r = 3 - 3x = \frac{6}{7}$.

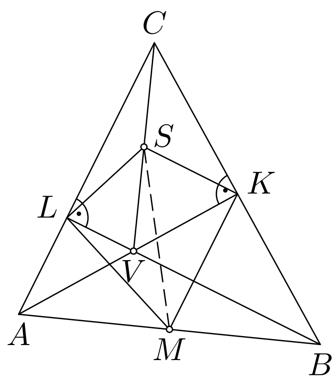
Poznámka. Se znalostí kosinové věty se obejdeme bez pomocného bodu P: stačí napsat kosinové věty pro trojúhelníky S_1S_3S a S_1S_2S. Dostaneme tak dvě rovnice

$$\begin{aligned}(3 - r)^2 &= 4 + (1 + r)^2 - 2 \cdot 2(1 + r)\cos\omega,\\ (2 + r)^2 &= 9 + (1 + r)^2 - 2 \cdot 3(1 + r)\cos\omega,\end{aligned}$$

kde $\omega = |\sphericalangle S_2S_1S|$. Po úpravě a vyjádření $(1 + r)\cos\omega$ z obou rovnic dostaneme pro r rovnici $2r - 1 = 1 - \frac{1}{3}r$, z níž plyne $r = \frac{6}{7}$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za zjištění, že středy kružnic k_1, k_2, k_3 leží v přímce, dejte 1 bod, sestavení kvadratických rovnic pro hledaný poloměr r oceňte 3 body, 2 body dejte za výpočet poloměru r.

3. Označme S střed úsečky CV (obr. 3). Body K a L leží na Thaletově kružnici s průměrem AB, takže $|ML| = |MK|$. Body K a L zároveň leží i na Thaletově kružnici s průměrem CV, takže $|SL| = |SK|$. Trojúhelníky SLM a SKM jsou tudíž shodné (sss), takže $|\sphericalangle SML| = |\sphericalangle SMK|$, neboli osa úhlu LMK prochází středem S úsečky VC.



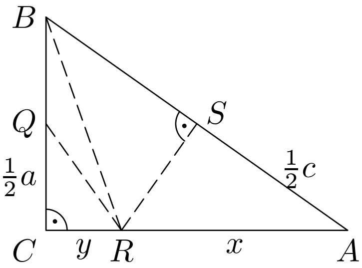
Obr. 3

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Po dvou bodech oceňte odvození každé z rovností $|ML| = |MK|$ a $|SL| = |SK|$, zbylé dva body dejte za dokončení důkazu (argumentovat lze např. také tím, že oba trojúhelníky LKM a LKS jsou rovnoramenné [a $LMKS$ je deltoid]).

2. Nechť ABC je pravoúhlý trojúhelník se stranami $a < b < c$. Označme Q střed odvěsny BC a S střed přepony AB. Průsečík osy úsečky AB s odvěsnou CA označme R. Dokažte, že $|RQ| = |RS|$, právě když

$$a^2 : b^2 : c^2 = 1 : 2 : 3.$$

2. Podle Pythagorovy věty je v pravoúhlém trojúhelníku rovnost $a^2 : b^2 = 1 : 2$ splněna, právě když $b^2 : c^2 = 2 : 3$. Stačí tedy dokázat požadovanou ekvivalenci jen pro jednu z rovností $a^2 : b^2 = 1 : 2$, $b^2 : c^2 = 2 : 3$.



Obr. 1

Trojúhelníky ASR a ACB (obr. 1) mají společný úhel při vrcholu A a shodují se v pravých úhlech ASR a ACB, takže jsou podobné (uu). Odtud vyplývá rovnost

$$\frac{|AR|}{|AS|} = \frac{|AB|}{|AC|},$$

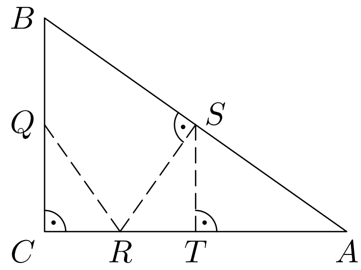
neboli

$$x = |AR| = \frac{|AB| \cdot |AS|}{|AC|} = \frac{c^2}{2b}. \tag{1}$$

Podle Pythagorovy věty je $|RS|^2 = |AR|^2 - |AS|^2 = x^2 - \frac{1}{4}c^2$ a $|RQ|^2 = |QC|^2 + |CR|^2 = \frac{1}{4}a^2 + (b-x)^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2 - 2bx + x^2$, takže $|RQ| = |RS|$, právě když $\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2 + b^2 = 2bx$, což po dosazení z (1) a $a^2 = c^2 - b^2$ po úpravě dává $\frac{3}{4}b^2 = \frac{1}{2}c^2$, neboli $b^2 : c^2 = 2 : 3$. Tím je požadovaná ekvivalence dokázána.

Jiné řešení. Podle Pythagorovy věty je (obr. 1) $|BR|^2 = |BC|^2 + |CR|^2 = a^2 + y^2$, $|RS|^2 = |BR|^2 - |BS|^2 = a^2 + y^2 - \frac{1}{4}c^2$, $|RQ|^2 = |QC|^2 + |CR|^2 = \frac{1}{4}a^2 + y^2$. Rovnost $|RQ| = |RS|$ tedy platí, právě když $a^2 + y^2 - \frac{1}{4}c^2 = \frac{1}{4}a^2 + y^2$, neboli $3a^2 = c^2$. V pravoúhlém trojúhelníku je tato rovnost ekvivalentní s rovností $3b^2 = 2c^2$, neboli $a^2 : b^2 : c^2 = 1 : 2 : 3$.

Jiné řešení. Označme T střed strany AC (obr. 2). Protože $|QC| = |ST|$ a $|\sphericalangle QCR| = |\sphericalangle STR| = 90°$, jsou trojúhelníky QCR a STR shodné, právě když $|RQ| = |RS|$ a zároveň právě když $|RC| = |RT|$. Rovnost $|RQ| = |RS|$ je tedy ekvivalentní s tím, že bod R je střed úsečky CT, tj. $x = |RA| = \frac{3}{4}b$. Z podobnosti trojúhelníků $ABC \sim ARS$ máme (stejně jako v prvním řešení)



Obr. 2

$$x = \frac{c^2}{2b},$$

takže $|RQ| = |RS|$, právě když

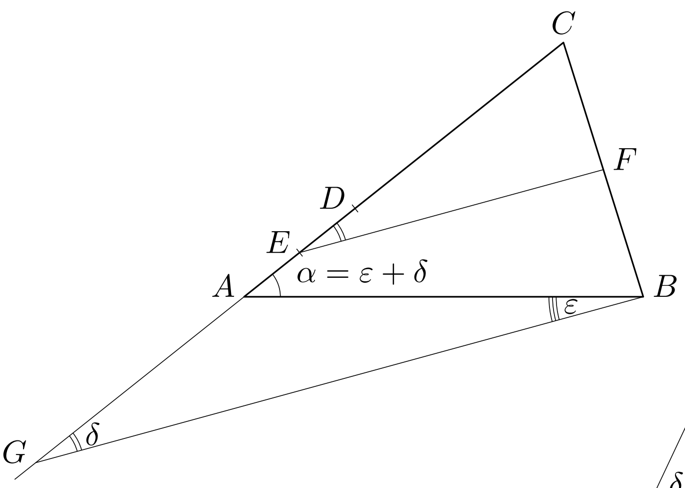
$$\frac{3b}{4} = \frac{c^2}{2b}, \quad \text{neboli} \quad 3b^2 = 2c^2.$$

V pravoúhlém trojúhelníku je to dle Pythagorovy věty ekvivalentní s rovností $3a^2 = c^2$, neboli $a^2 : b^2 : c^2 = 1 : 2 : 3$.

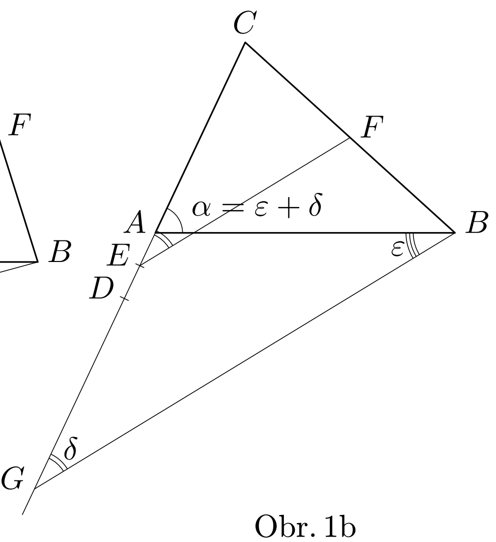
Za úplné řešení udělte 6 bodů. 1 bod udělte za zjištění, že stačí dokazovat jen jednu z rovností $a^2 : b^2 = 1 : 2$, $b^2 : c^2 = 2 : 3$, 3 body za vyjádření délek $|RQ|$, $|RS|$ pomocí stran trojúhelníku ABC. Zbývající 2 body udělte za dokončení ekvivalence.

2. *V daném trojúhelníku ABC označme D ten bod polopřímky CA, pro který platí $|CD| = |CB|$. Dále označme po řadě E, F středy úseček AD a BC. Dokažte, že $|\sphericalangle BAC| = 2|\sphericalangle CEF|$, právě když $|AB| = |BC|$.*

Řešení. Označme G ten bod polopřímky opačné k polopřímce AC, pro který platí $|AG| = |BC| = |CD|$ (obr. 1a pro situaci, kdy $|AC| > |BC|$, a obr. 1b pro situaci, kdy $|AC| < |BC|$ — sami nakreslete a rozmyslete situaci, kdy $|AC| = |BC|$). V trojúhelníku ABG označme ještě $\varepsilon = |\sphericalangle ABG|$ a $\delta = |\sphericalangle BGA|$. Protože $|EA| = |ED|$ a $|AG| = |CD|$, je bod E střed úsečky CG, tudíž úsečka EF je střední příčka trojúhelníku BCG. Platí proto $EF \parallel GB$ a z rovnosti souhlasných úhlů BGA a FEC dostáváme $|\sphericalangle FEC| = \delta$. Protože úhel BAC je vnějším úhlem trojúhelníku ABG, pro jeho velikost $\alpha = |\sphericalangle BAC|$



Obr. 1a



Obr. 1b

platí $\alpha = \varepsilon + \delta$. To znamená, že rovnost $\alpha = 2\delta$ ze zadání úlohy nastane, právě když $\varepsilon + \delta = 2\delta$, neboli $\varepsilon = \delta$. Z trojúhelníku ABG ovšem plyne, že rovnost $\varepsilon = \delta$ je splněna, právě když $|AB| = |AG|$, neboli $|AB| = |BC|$. Tím je ekvivalence rovností $\alpha = 2\delta$ a $|AB| = |BC|$ dokázána.

Jiné řešení. Místo „trikově“ zvoleného pomocného bodu G z prvního řešení sestrojíme osu o vnitřního úhlu BAC daného trojúhelníku ABC a její průsečík se stranou BC označíme H (obr. 2a a 2b pro situace $|AC| > |BC|$, resp. $|AC| < |BC|$). Význam osy o pro řešení naší úlohy je zřejmý: podle souhlasných úhlů CEF a CAH usoudíme, že rovnost $|\sphericalangle BAC| = 2|\sphericalangle CEF|$ ze zadání úlohy nastane, právě když budou úsečky AH a EF rovnoběžné, neboli trojúhelníky CAH a CEF podobné. Podle věty *sus* jsou trojúhelníky CAH a CEF podobné, právě když je splněna úměra

$$|AC| : |HC| = |EC| : |FC|. \qquad (*)$$

Rovnost $|\sphericalangle BAC| = 2|\sphericalangle CEF|$ je tedy ekvivalentní s podmínkou $(*)$, kterou nyní prozkoumáme.

Délky úseček zastoupených v $(*)$ nejprve vyjádříme pomocí délek

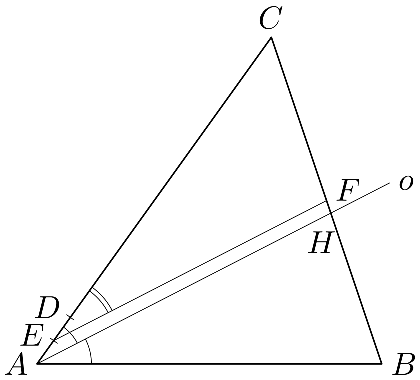
$$a = |BC|, \quad b = |AC|, \quad c = |AB|$$

stran výchozího trojúhelníku ABC. Protože bod F je střed úsečky BC a bod E střed úsečky AD, platí $|FC| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}a$ a

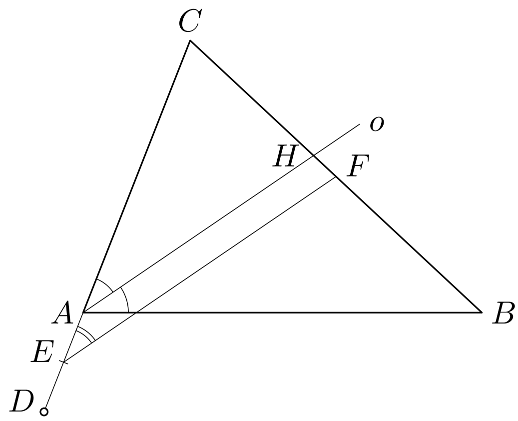
$$|EC| = \frac{|AC| + |DC|}{2} = \frac{|AC| + |BC|}{2} = \frac{b + a}{2}.$$

Zbývá vyjádřit délku úsečky HC. Z rovností

$$|HC| + |HB| = a, \quad |HC| : |HB| = b : c$$



Obr. 2a



Obr. 2b

(první z nich je triviální, druhá vyjadřuje známý fakt o poměru, ve kterém osa vnitřního úhlu dělí protější stranu trojúhelníku, viz 3. návodnou úlohu) dostaneme po snadném výpočtu vyjádření

$$|HC| = \frac{ab}{b+c}.$$

Dosaďme nyní všechny určené délky do rovnosti $(*)$ a pak ji dále ekvivalentně upravujme:

$$\begin{aligned} b : \frac{ab}{b+c} &= \frac{a+b}{2} : \frac{a}{2}, \\ \frac{b+c}{a} &= \frac{a+b}{a}, \\ b+c &= a+b, \\ c &= a. \end{aligned}$$

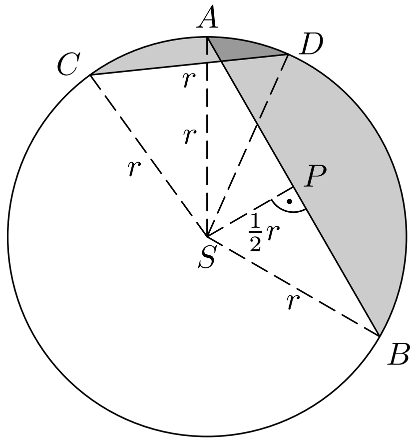
Dokázali jsme potřebné: podmínka $(*)$ platí, právě když $c = a$, neboli $|AB| = |BC|$.

Návodné a doplňující úlohy:

1. K libovolnému trojúhelníku ABC sestrojíme ten bod D polopřímky CA, pro který platí $|CD| = |CB|$. Vyjádřete velikost úhlu ABD pomocí velikostí $\alpha = |\sphericalangle BAC|$ a $\beta = |\sphericalangle ABC|$. [$|\sphericalangle ABD| = \frac{1}{2}|\alpha - \beta|$. Uvažte, že CBD je úhel při základně BD rovnoramenného trojúhelníku BCD.]
2. Označme obvyklým způsobem α, β, γ vnitřní úhly trojúhelníku ABC a pro střed D strany AC uvažujme ještě úhly $\delta = |\sphericalangle ADB|$ a $\varepsilon = |\sphericalangle BDC|$. Dokažte, že rovnosti $\delta = 2\gamma$, $\varepsilon = 2\alpha$ a $\beta = 90°$ jsou navzájem ekvivalentní. [Každá ze tří rovností je ekvivalentní s tím, že $|AD| = |BD| = |CD|$.]
3. Dokažte, že osa vnitřního úhlu BAC protne protější stranu BC obecného trojúhelníku ABC v bodě H, pro nějž platí $|HB| : |HC| = |AB| : |AC|$. [Dvojím způsobem vyjádřete poměr obsahů trojúhelníků ABH a ACH se shodnými výškami z každého ze společných vrcholů A a H.]

5. *Kruh o středu S a poloměru r je rozdělen na čtyři části dvěma tětivami, z nichž jedna má délku r a druhá má od středu S vzdálenost $\frac{1}{2}r$. Dokažte, že absolutní hodnota rozdílu obsahů těch dvou částí, které mají společný právě jeden bod, a přitom žádná z nich neobsahuje střed S, je rovna jedné šestině obsahu kruhu.*

Řešení. Označme dané tětivy AB a CD jako na obr. 3, kde je rovněž vyznačen střed P tětivy AB, takže podle zadání platí $|SP| = \frac{1}{2}r$ a $|CD| = r$. Zkoumaný rozdíl



Obr. 3

obsahů dvou světle vybarvených částí kruhu se nezmění, když ke každé z nich připojíme tutéž (třetí) část kruhu, jež má s jeho hraniční kružnicí společný oblouk AC a je na obr. 3 vybarvena tmavě. Tak vzniknou dvě kruhové úseče, jedna nad tětivou AB, druhá nad tětivou CD. Jejich obsahy jsou určeny velikostmi úhlů ASB a CSD. Z rovnostranného trojúhelníku CSD ihned máme $|\sphericalangle CSD| = 60°$, takže obsah S_1 úseče nad tětivou CD je roven

$$S_1 = \frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}.$$

V pravoúhlém trojúhelníku APS platí $|AS| : |SP| = 2 : 1$, tudíž $|\sphericalangle ASP| = 60°$, $|\sphericalangle ASB| = 2|\sphericalangle ASP| = 120°$, $|AB| = r\sqrt{3}$ a obsah S_2 úseče nad tětivou AB je roven

$$S_2 = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}.$$

Nyní již snadno určíme rozdíl $S_2 - S_1$:

$$S_2 - S_1 = \left(\frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) - \left(\frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi r^2}{6},$$

což je právě šestina obsahu celého kruhu.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Nechť P je průsečík úhlopříček konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte, že trojúhelníky ADP a BCP mají stejný obsah, právě když $AB \parallel CD$. [Rozdíl obsahů trojúhelníků

ADP a BCP je stejný jako rozdíl obsahů trojúhelníků ABD a ABC, které mají společnou stranu AB, takže mají stejný obsah, právě když mají shodné výšky z protilehlých vrcholů D a C.]

2. Vypočtěte obsah průniku kruhů $K_1(S_1, r)$ a $K_2(S_2, r\sqrt{3})$, je-li $|S_1S_2| = 2r$. [$\frac{5}{6}\pi r^2 - r^2\sqrt{3}$]
3. Kruhy K_1, K_2, K_3 a K_4 se shodným poloměrem r mají středy ve vrcholech čtverce C o straně $r\sqrt{2}$. Kruh K o poloměru $2r$ má střed v průsečíku úhlopříček čtverce C. Vypočítejte obsah rovinné množiny $K - (K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4)$. [$(2\pi - 4)r^2$]

3. V lichoběžníku $ABCD$, jehož základna AB má dvakrát větší délku než základna CD, označme E střed ramene BC. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku CDE prochází středem úhlopříčky AC, právě když strany AB a BC jsou navzájem kolmé.

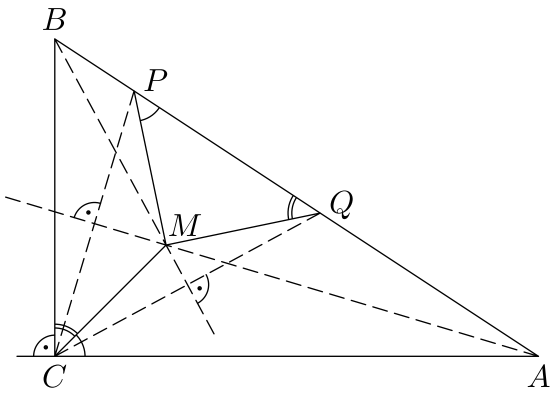
3. Označme S střed úhlopříčky AC. Úsečka SE je střední příčka trojúhelníku ABC, takže $|SE| = \frac{1}{2}|AB| = |DC|$. Navíc je $SE \parallel AB \parallel DC$. Úsečky SE a DC jsou rovnoběžné a shodné, proto je $SECD$ rovnoběžník.

Kružnice opsaná trojúhelníku CDE prochází bodem S právě tehdy, je-li rovnoběžník $SECD$ tětivový. Čtyřúhelník je tětivový, právě když je součet velikostí jeho protilehlých úhlů $180°$. V rovnoběžníku jsou ale protilehlé úhly shodné, takže je tětivový, právě když to je pravoúhelník, neboli když úhel ECD, a tedy i úhel ABC je pravý.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, 3 body za důkaz toho, že $SECD$ je rovnoběžník a další 3 body za důkaz kolmosti.

2. Na přeponě AB pravoúhlého trojúhelníku ABC uvažujme body P a Q takové, že $|AP| = |AC|$ a $|BQ| = |BC|$. Označme M průsečík kolmice z vrcholu A na přímku CP a kolmice z vrcholu B na přímku CQ. Dokažte, že přímky PM a QM jsou navzájem kolmé.

2. Podle zadání je trojúhelník APC rovnoramenný, přímka AM prochází jeho hlavním vrcholem A kolmo k základně CP, je tudíž osou vnitřního úhlu CAP (obr. 1). Body C a P



Obr. 1

jsou proto souměrně sdružené podle přímky AM, takže úhly APM a ACM jsou shodné. (Jinými slovy trojúhelníky APM a ACM jsou shodné podle věty *sus*: odpovídající si strany AC a AP svírají se společnou stranou AM týž úhel díky tomu, že AM je osou úhlu CAP.) Podobně z rovnoramenného trojúhelníku BQC odvodíme, že BM je osou úhlu CBQ, takže i úhly BQM a BCM jsou shodné.

Rovnosti $|\sphericalangle APM| = |\sphericalangle ACM|$ a $|\sphericalangle BQM| = |\sphericalangle BCM|$ znamenají, že pro vnitřní úhly trojúhelníku PQM při vrcholech P, Q platí

$$\begin{aligned}|\sphericalangle QPM| + |\sphericalangle PQM| &= |\sphericalangle APM| + |\sphericalangle BQM| = \\ &= |\sphericalangle ACM| + |\sphericalangle BCM| = |\sphericalangle ACB| = 90^\circ,\end{aligned}$$

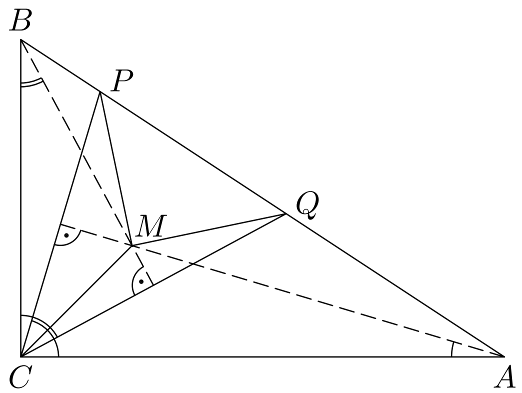
tudíž vnitřní úhel u třetího vrcholu M je pravý.

Jiný postup. Bod M jako průsečík os úhlů CAB a CBA leží i na ose pravého úhlu ACB. Proto úhly ACM a BCM mají oba velikost 45°, takže $|\sphericalangle APM| = |\sphericalangle ACM| = 45^\circ$, $|\sphericalangle BQM| = |\sphericalangle BCM| = 45^\circ$ a trojúhelník PQM je rovnoramenný pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu M.

Jiný postup. Ze souměrnosti bodů P a C podle přímky AM plyne $|PM| = |CM|$, ze souměrnosti bodů Q a C podle BM plyne $|QM| = |CM|$. Je tudíž $|PM| = |QM| = |CM|$ a bod M je tak středem kružnice opsané trojúhelníku PQC. Přitom označíme-li α a β úhly při vrcholech A a B (obr. 2), je $\alpha + \beta = 90^\circ$ a

$$(90^\circ - \tfrac{1}{2}\alpha) + (90^\circ - \tfrac{1}{2}\beta) - |\sphericalangle PCQ| = 90^\circ,$$

takže $|\sphericalangle PCQ| = 45^\circ$. To je velikost obvodového úhlu nad tětivou PQ zmíněné kružnice. Velikost odpovídajícího středového úhlu PMQ je tudíž 90°.



Obr. 2

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za zdůvodnění, že bod M je průsečíkem os vnitřních úhlů trojúhelníku ABC.

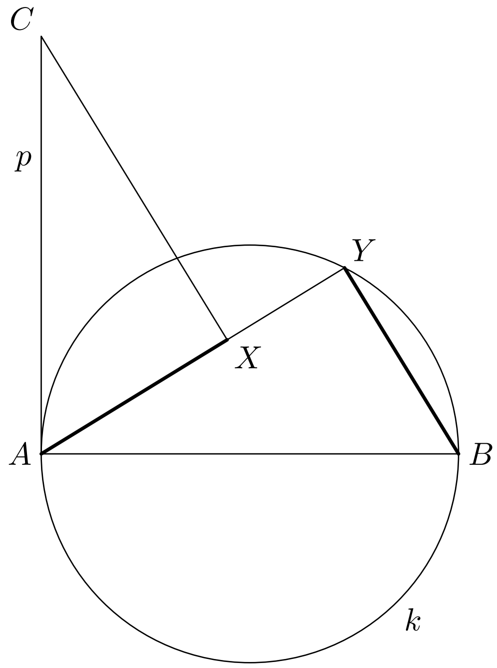
2. *Je dána kružnice k s průměrem AB. K libovolnému bodu Y kružnice k, $Y \neq A$, sestrojme na polopřímce AY bod X, pro který platí $|AX| = |YB|$. Určete množinu všech takových bodů X.*

Řešení. Jestliže $Y = B$, potom $X = A$.

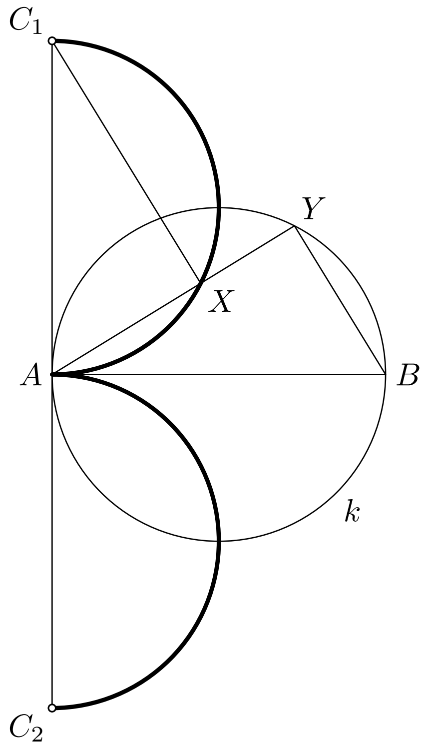
Nechť $Y \neq B$. Označme p přímku procházející bodem A a kolmou na AB a C ten bod přímky p ležící v polorovině ABY, pro nějž platí $|AC| = |AB|$ (obr. 1). Podle zadání platí $|AX| = |BY|$. Úhel AYB je podle Thaletovy věty pravý, proto $|\sphericalangle ABY| = 90^\circ - |\sphericalangle YAB| = |\sphericalangle CAX|$. Trojúhelníky ABY a CAX jsou tedy shodné podle věty *sus*. Odtud vyplývá, že $|\sphericalangle CXA| = |\sphericalangle AYB| = 90^\circ$. Bod X proto leží na Thaletově půlkružnici nad průměrem AC.

Nechť naopak X je libovolný vnitřní bod této půlkružnice a Y průsečík přímky AX s kružnicí k ($Y \neq A$). Trojúhelníky CAX a ABY jsou shodné podle věty *usu*, a proto $|AX| = |BY|$. Bod X tedy patří do hledané množiny.

Hledanou množinou všech bodů X je sjednocení dvou půlkružnic nad průměry AC_1 a AC_2 ležících v téže polorovině jako bod B; C_1 a C_2 jsou body ležící na kolmici vedené bodem A k přímce AB, přičemž $|AC_1| = |AC_2| = |AB|$ (obr. 2). Bod A do hledané množiny patří, body C_1 a C_2 nikoliv.



Obr. 1



Obr. 2

Návodné a doplňující úlohy:

1. Uvnitř strany BC čtverce $ABCD$ zvolme libovolně bod X. Označme P, Q paty kolmic z bodů B a D na přímku AX. Dokažte, že trojúhelníky ABP a DAQ jsou shodné.
2. Je dán obdélník $ABCD$. Dokažte, že průsečík P kružnic sestrojených nad průměry AB a AD ($P \neq A$) leží na úsečce BD.

4. *V libovolném trojúhelníku ABC označme T těžiště, D střed strany AC a E střed strany BC. Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC s přeponou AB, pro něž je čtyřúhelník $CDTE$ tečnový.*

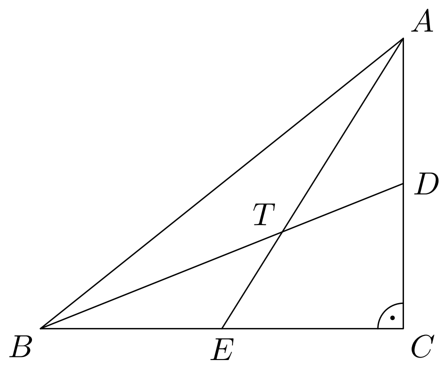
Řešení. Konvexní čtyřúhelník je tečnový, právě když součty délek jeho protilehlých stran jsou stejné.

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB označme $a = |BC|$, $b = |AC|$ (obr. 3). Podle Pythagorovy věty platí

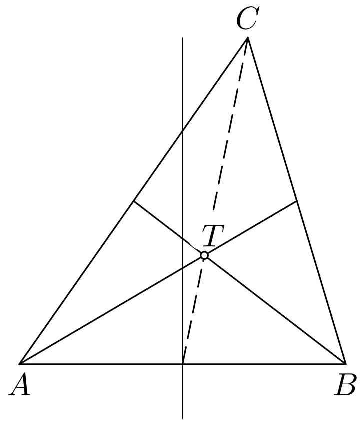
$$|BD| = \sqrt{|BC|^2 + |CD|^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}, \quad |AE| = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

Protože těžiště trojúhelníku dělí těžnici v poměru $1:2$, je

$$|TD| = \frac{1}{3}|BD| = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}, \quad |TE| = \frac{1}{3}|AE| = \frac{1}{3}\sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$



Obr. 3



Obr. 4

Čtyřúhelník $CDTE$ je tečnový, právě když $|CD|+|TE| = |EC|+|TD|$, tedy právě když

$$\frac{b}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{a}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{a^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Je-li $a = b$, rovnost zřejmě platí.

Je-li $a > b$, je $a^2 + \frac{1}{4}b^2 > b^2 + \frac{1}{4}a^2$, takže

$$\frac{b}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}<\frac{a}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{a^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Podobně je-li $a < b$, je

$$\frac{b}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{b^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}>\frac{a}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{a^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Čtyřúhelník $CDTE$ je tedy tečnový, právě když je trojúhelník ABC rovnoramenný.

Jiné řešení. Označíme-li běžným způsobem a, b, c strany daného trojúhelníku a t_a, t_b, t_c délky jeho těžnic, bude čtyřúhelník $CDTE$ tečnový, právě když

$$\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}t_b=\frac{1}{2}b+\frac{1}{3}t_a \quad \text{neboli} \quad \frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{3}(t_a-t_b). \tag{1}$$

Ukážeme, že uvedená rovnost platí, právě když $a = b$.

V libovolném trojúhelníku ABC totiž platí

$$a<b, \quad \text{právě když} \quad t_a>t_b. \tag{2}$$

To je zřejmé z toho, že těžiště T uvažovaného trojúhelníku leží ve stejné polorovině určené osou strany AB jako vrchol C (obr. 4), přičemž $|TA| = \frac{2}{3}t_a$, $|TB| = \frac{2}{3}t_b$.

Je-li $a = b$, rovnost (1) platí. Naopak je-li např. $a < b$, je podle (1) a (2)

$$0>\frac{1}{2}(a-b)=\frac{1}{3}(t_a-t_b)>0,$$

což nelze. Proto $a = b$.

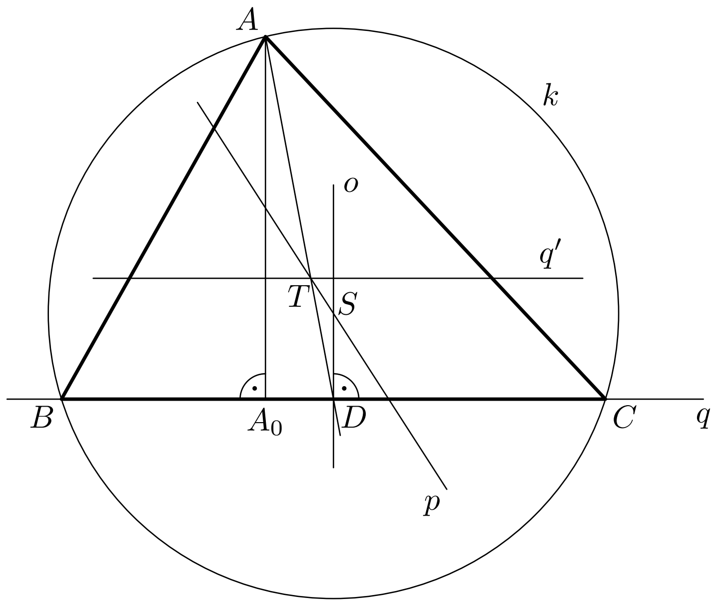
Čtyřúhelník $CDTE$ je tečnový, právě když je (pravoúhlý) trojúhelník ABC rovnoramenný.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dokažte, že konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je tečnový, právě když $|AB|+|CD|=|BC|+$ $+|DA|$.
2. Dokažte, že v trojúhelníku ABC platí $v_a < v_b$, právě když $t_a < t_b$. [Obě nerovnosti jsou ekvivalentní s $a > b$.]
3. V rovnoramenném trojúhelníku ABC má základna AB délku $c = 4$ a rameno AC délku 7. Vypočítejte délky těžnic. [$t_a = t_b = \frac{9}{2}$, $t_c = \sqrt{45}$]

6. *Je dána úsečka AA_0 a přímka p. Sestrojte trojúhelník s vrcholem A a výškou AA_0, jehož těžiště a střed kružnice opsané leží na přímce p.*

Řešení. Předpokládejme, že ABC je hledaným trojúhelníkem. Jeho strana BC leží na přímce q, která prochází bodem A_0 a je kolmá na úsečku AA_0. Na této přímce leží i střed D strany BC. Těžiště T je obrazem bodu D ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem $\frac{2}{3}$, leží proto na přímce q', která je obrazem přímky q ve zmíněné stejnolehlosti. Střed S opsané kružnice leží na ose o strany BC čili na přímce, která prochází bodem D a je rovnoběžná s úsečkou AA_0 (obr. 5).



Obr. 5

Konstrukce: Bodem A_0 vedeme přímku q kolmou na úsečku AA_0. Sestrojíme obraz q' přímky q ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem $\frac{2}{3}$. Označíme T průsečík přímky q' s přímkou p a D průsečík přímky AT s přímkou q. Bodem D vedeme rovnoběžku o s AA_0 a její průsečík s přímkou p označíme S. Průsečíky kružnice k se středem S a poloměrem $|SA|$ s přímkou q jsou vrcholy B a C hledaného trojúhelníku.

Důkaz: Úsečka AA_0 je kolmá na stranu BC, je to tedy výška trojúhelníku ABC. Bod S ležící na přímce p je středem kružnice opsané trojúhelníku ABC. Ze shodnosti trojúhelníků BDS a CDS (Ssu) vyplývá, že D je střed strany BC. Proto je AD těžnice a T těžiště trojúhelníku ABC (platí totiž $|AT| = \frac{2}{3}|AD|$).

Diskuse: Není-li přímka p rovnoběžná s úsečkou AA_0 ani na ni kolmá, jsou body T a S jednoznačně určeny. V tom případě má úloha právě jedno řešení (až na označení bodů B a C), pokud kružnice k protíná přímku q ve dvou různých bodech; neprotíná-li k přímku p ve dvou různých bodech, nemá úloha řešení.

Je-li úsečka AA_0 částí přímky p, není bod S jednoznačně určen; vyhovují všechny rovnoramenné trojúhelníky se základnou BC, která má střed v bodě A_0. Je-li úsečka AA_0 rovnoběžná s přímkou p, ale neleží na ní, nemá úloha řešení.

Je-li přímka p kolmá na úsečku AA_0, má úloha řešení pouze tehdy, jsou-li přímky q' a p totožné. To nastane, jestliže přímka p protíná úsečku AA_0 v bodě V, pro nějž platí $|AV| = 2|A_0V|$. V takovém případě můžeme bod T zvolit na p kdekoliv a úloha má nekonečně mnoho řešení.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dokažte, že v každém nerovnostranném trojúhelníku leží ortocentrum V, těžiště T a střed S opsané kružnice na jedné přímce, přičemž T leží mezi V a S a platí $|TV| = 2|ST|$. (Přímka, na níž leží body S, T a V, se nazývá *Eulerova přímka.*)
2. Jsou dány body A, D a V. Sestrojte trojúhelník ABC, v němž D je střed strany BC a V průsečík výšek.

2. Je dán trojúhelník ABC se stranou BC délky $22\,\mathrm{cm}$ a stranou AC délky $19\,\mathrm{cm}$, jehož těžnice t_a, t_b jsou navzájem kolmé. Vypočítejte délku strany AB.

4. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Pro libovolný bod L jeho strany AB označme K, M paty kolmic z bodu L na strany AC, BC. Zjistěte, pro kterou polohu bodu L je úsečka KM nejkratší.

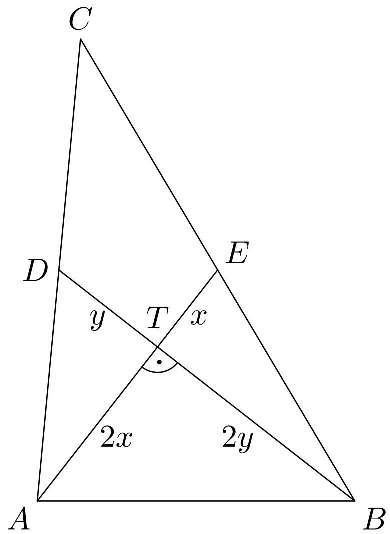
2. Označme D střed strany AC, E střed strany BC a T těžiště trojúhelníku ABC (obr. 1). Označíme-li dále $3x$ a $3y$ délky těžnic t_a a t_b, máme $|AT| = 2x$, $|ET| = x$, $|BT| = 2y$, $|DT| = y$. Ze zadání plyne, že trojúhelníky ATD, BET, ABT jsou pravoúhlé, takže podle Pythagorovy věty platí

$$(2x)^2 + y^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

$$x^2 + (2y)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

$$(2x)^2 + (2y)^2 = c^2.$$

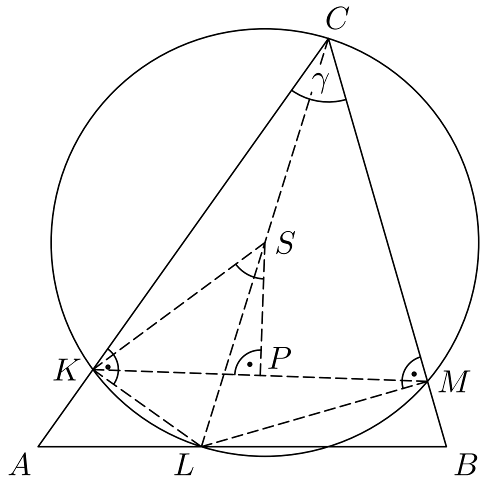
Sečtením prvních dvou rovnic dostaneme $5(x^2 + y^2) = \frac{1}{4}(a^2 + b^2)$ a po dosazení do třetí rovnice máme $c^2 = 4(x^2+y^2) = \frac{1}{5}(a^2+b^2)$. Numericky pak vzhledem k tomu, že $\frac{1}{5}(22^2 + 19^2) = 169$, vychází $c = 13\,\mathrm{cm}$.



Obr. 1

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Jeden bod dejte za využití toho, že těžiště dělí těžnici v poměru 1 : 2, po jednom bodu za použití Pythagorovy věty pro trojúhelníky ATD, BET, ABT a dva body za výpočet délky strany AB.

4. Protože jsou úhly LKC a LMC pravé, leží body K a M na Thaletově kružnici nad průměrem CL (obr. 2). Podle věty o obvodovém úhlu přísluší tětivě KM středový



Obr. 2

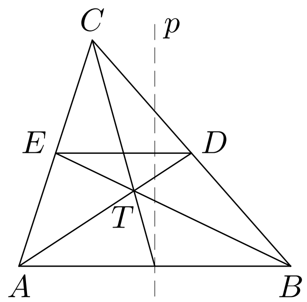
úhel velikosti 2γ, proto $|KM| = |CL| \sin\gamma$ (v pravoúhlém trojúhelníku KPS, kde P je střed úsečky KM a S střed úsečky CL, je totiž $|KS| = \frac{1}{2}|CL|$, $|\sphericalangle KSP| = \gamma$). Úsečka KM je tedy nejkratší, právě když je nejkratší úsečka CL; to nastává právě tehdy, je-li L pata výšky z vrcholu C na stranu AB.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Dva body dejte za poznatek, že body K a M leží na Thaletově kružnici nad průměrem CL, dva body za důkaz rovnosti $|KM| = |CL| \sin\gamma$ a dva body za určení polohy bodu L.

2. V trojúhelníku ABC označme D střed strany BC, E střed strany AC a T těžiště. Je-li strana BC delší než strana AC, má kružnice vepsaná trojúhelníku BDT menší poloměr než kružnice vepsaná trojúhelníku ATE. Dokažte.

2. Poloměr kružnice vepsané trojúhelníku je podílem jeho obsahu a polovičního obvodu.

Trojúhelníky ADE a BDE mají zřejmě stejný obsah, protože mají společnou stranu DE a shodnou výšku na ni (AB je rovnoběžné s DE). Stejný obsah tedy mají i trojúhelníky ATE a BDT, protože obsahy obou trojúhelníků se od obsahu zmíněných trojúhelníků liší právě o obsah „společného“ trojúhelníku DET (obr. 1).



Obr. 1

Označme p osu úsečky AB. Je-li strana BC delší než strana AC, leží bod C v téže polorovině s hraniční přímkou p jako bod A. Proto v této polorovině leží i těžiště T. Jeho vzdálenost od bodu A rovná $\frac{2}{3}t_a$ je tedy menší než jeho vzdálenost od bodu B rovná $\frac{2}{3}t_b$. To znamená, že $t_a < t_b$. Trojúhelník ATE má obvod $o_1 = \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}t_b + \frac{2}{3}t_a$, trojúhelník BDT má obvod $o_2 = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}t_a + \frac{2}{3}t_b$. Z nerovností $b < a$ a $t_a < t_b$ proto vyplývá

$$o_2 - o_1 = \frac{1}{2}(a - b) + \frac{1}{3}(t_b - t_a) > 0,$$

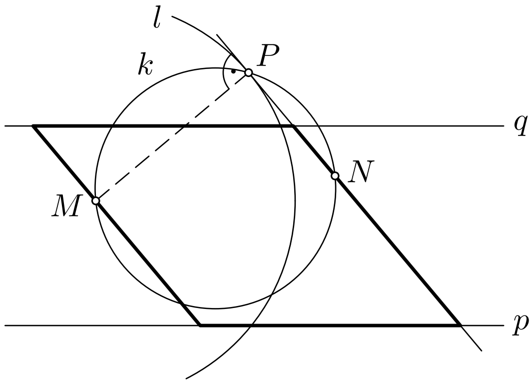
neboli $o_1 < o_2$.

Trojúhelníky AET a BDT mají stejný obsah a první z nich má menší obvod, proto má kružnice vepsaná trojúhelníku AET větší poloměr než kružnice vepsaná trojúhelníku BDT.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. 1 bod udělte za vyjádření poloměru vepsané kružnice pomocí obsahu a obvodu trojúhelníku, 2 body za důkaz rovnosti obsahů trojúhelníků AET a BDT, 2 body za důkaz nerovnosti $o_1 < o_2$ a 1 bod za odvození nerovnosti mezi poloměry.

2. *V pásu mezi rovnoběžkami p, q jsou dány dva různé body M a N. Sestrojte kosočtverec nebo čtverec, jehož dvě protější strany leží na přímkách p a q a body M a N leží po jednom na zbývajících dvou stranách.*

Řešení. V kosočtverci (čtverci) jsou vzdálenosti protilehlých stran stejné. Naším úkolem je tedy vést body M a N rovnoběžky, jejichž vzdálenost je rovna vzdálenosti d rovnoběžek p a q. Pata P kolmice z bodu M ke straně hledaného kosočtverce procházející bodem N leží na Thaletově kružnici nad průměrem MN a má od bodu M vzdálenost d (obr. 1). Odtud plyne *konstrukce*:

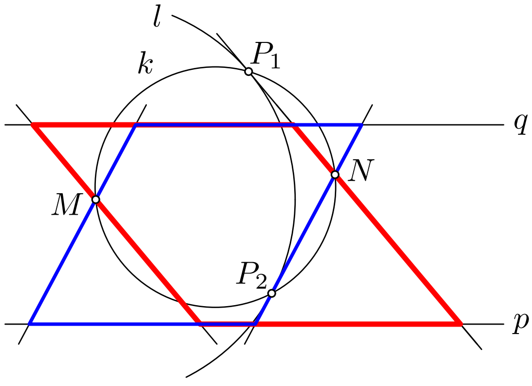


Obr. 1

Sestrojíme Thaletovu kružnici k nad průměrem MN a kružnici l se středem M, jejíž poloměr je roven vzdálenosti d přímek p a q. Označíme P průsečík kružnic k a l. Na přímce PN leží jedna ze stran hledaného (koso)čtverce. Protilehlá strana prochází bodem M a je s přímkou PN rovnoběžná.

Vzniklý rovnoběžník je skutečně kosočtverec nebo čtverec, neboť ze shodnosti výšek vyplývá shodnost stran.

Diskuse: Existence řešení je podmíněna existencí bodu P. Zřejmě pak nemůže být $NP \parallel q$, protože by to znamenalo, že je $|MP| < d$, takže rovnoběžky procházející body M, N vždy vytnou požadovaný rovnoběžník. Je-li $|MN| > d$, mají kružnice k a l dva různé průsečíky $P_1 \neq P_2$ (obr. 2), takže úloha má dvě řešení. Je-li $|MN| = d$, potom $P = N$; stranu kosočtverce procházející bodem N sestrojíme jako kolmici na MN a úloha má jen jedno řešení. V případě $|MN| < d$ nemá úloha řešení.



Obr. 2

NÁVODNÉ A PODOBNÉ ÚLOHY:

1. V rovině jsou dány body A, B, přímka p a úsečka délky v. Sestrojte trojúhelník ABC, jehož vrchol C leží na přímce p a jehož výška na stranu BC má délku v.
2. V rovině je dána přímka p a body M, N, S. Sestrojte pravoúhelník $ABCD$ tak, aby vrchol A ležel na přímce p, bod M na přímce AB, bod N na přímce BC a aby S byl průsečík jeho úhlopříček. [Uvažte obrazy přímky p a bodu M v otočení o $90°$ se středem S, které převede stranu AB na stranu BC.]
3. V rovině jsou dány tři rovnoběžné přímky a, b, c a přímka d s nimi různoběžná. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$, $D \in d$. [Sestrojíme nejdřív libovolný čtverec $ABCD$, který splňuje první tři podmínky: Zvolme bod $B \in b$, vrchol A takového čtverce pak leží na přímce a a zároveň na přímce c otočené kolem bodu B o $90°$. Hledaný čtverec dostaneme posunutím ve směru rovoběžek a, b, c, v němž přímka $d' \parallel d$ obsahující vrchol D přejde v přímku d.]

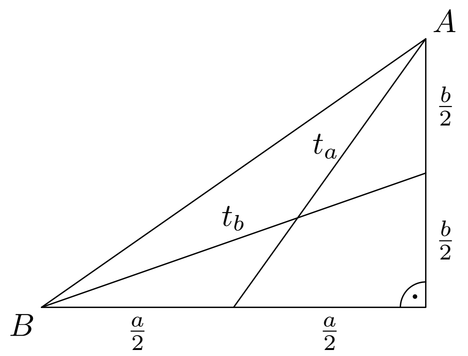
4. *Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky s délkami stran a, b, c a délkami těžnic t_a, t_b, t_c, pro něž platí $a + t_a = b + t_b$. Uvažujte oba případy, kdy AB je a) přepona, b) odvěsna.*

Řešení. a) Nechť a i b jsou odvěsny (obr. 3). Potom podle Pythagorovy věty

$$t_a = \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}, \quad t_b = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2},$$

takže podmínka $a + t_a = b + t_b$ má tvar

$$a + \sqrt{b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = b + \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$



Obr. 3

Protože z nerovnosti $a > b$ vyplývá (viz návodnou úlohu 1) $t_b > t_a$, jsou následující úpravy ekvivalentní:

$$\begin{aligned}
2a - 2b &= \sqrt{4a^2 + b^2} - \sqrt{4b^2 + a^2},\\
4a^2 - 8ab + 4b^2 &= 5a^2 + 5b^2 - 2\sqrt{(4a^2 + b^2)(4b^2 + a^2)},\\
2\sqrt{4a^4 + 17a^2b^2 + 4b^4} &= a^2 + 8ab + b^2,\\
16a^4 + 68a^2b^2 + 16b^4 &= a^4 + 16a^3b + 66a^2b^2 + 16ab^3 + b^4,\\
15a^4 - 16a^3b + 2a^2b^2 - 16ab^3 + 15b^4 &= 0.
\end{aligned}$$

Mnohočlen na levé straně poslední rovnice je zřejmě dělitelný dvojčlenem $a - b$ (pro $a = b$ je totiž roven nule). Dělením zjistíme, že výsledný mnohočlen třetího stupně má opět stejnou vlastnost, takže po opakovaném dělení převedeme zkoumanou rovnici do součinového tvaru

$$(a - b)^2(15a^2 + 14ab + 15b^2) = 0.$$

Poslední rovnost platí, právě když $a = b$, protože $15a^2 + 14ab + 15b^2 > 0$ pro každou dvojici reálných čísel a, b.

V případě a) můžeme postupovat i následovně: Odečtením rovností

$$t_a^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad t_b^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

dostaneme

$$t_a^2 - t_b^2 = \frac{3}{4}(b^2 - a^2).$$

Na obou stranách poslední rovnice jsou rozdíly druhých mocnin. Převedeme je na součiny a pak využijeme danou rovnost $a + t_a = b + t_b$ upravenou do tvaru $t_a - t_b = b - a$:

$$\begin{aligned}(t_a - t_b)(t_a + t_b) &= \frac{3}{4}(b - a)(b + a),\\ (b - a)(t_a + t_b) &= \frac{3}{4}(b - a)(a + b).\end{aligned}$$

Kdyby bylo $a \neq b$, vyjde $t_a + t_b = \frac{3}{4}(a + b)$; to spolu s rovností $t_a - t_b = b - a$ dává $t_a = \frac{7}{8}b - \frac{1}{8}a$, tedy $t_a < b$, což odporuje tomu, že t_a je přepona a b odvěsna téhož pravoúhlého trojúhelníku (obr. 3). Proto musí platit rovnost $a = b$.

b) Nechť např. a je přepona (je-li přepona b, stačí strany a, b v následujícím textu navzájem vyměnit). Potom z Thaletovy a Pythagorovy věty plyne

$$t_a = \frac{a}{2}, \quad t_b = \sqrt{c^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2},$$

a rovnost ze zadání má tedy tvar

$$\frac{3a}{2} = b + \sqrt{a^2 - b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

Protože přepona a je delší než odvěsna b, tedy $a > b$, jsou následující úpravy ekvivalentní:

$$\begin{aligned}3a - 2b &= \sqrt{4a^2 - 3b^2},\\ 9a^2 - 12ab + 4b^2 &= 4a^2 - 3b^2,\\ 5a^2 - 12ab + 7b^2 &= 0,\\ (a - b)(5a - 7b) &= 0,\\ 5a - 7b &= 0.\end{aligned}$$

Závěr: Rovnost $a + t_a = b + t_b$ platí pro pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky s odvěsnami $a = b$ a pro pravoúhlé trojúhelníky, které mají strany v poměru $5 : \sqrt{24} : 7$, a přitom nejkratší z nich je (třetí) strana c.

NÁVODNÉ A PODOBNÉ ÚLOHY:

1. Dokažte, že těžnice obecného trojúhelníku (ať je pravoúhlý či nikoliv) mají stejnou vlastnost jako jeho výšky: ke kratší straně směřuje delší těžnice. Odvoďte odtud, že rovnost $a + t_b = b + t_a$ platí, právě když $a = b$. [Nerovnosti mezi stranami a, b a mezi částmi těžnic $\frac{2}{3}t_a$, $\frac{2}{3}t_b$ porovnejte na základě toho, že vrchol C i těžiště T trojúhelníku ABC leží ve stejné polorovině vyťaté osou strany AB.]
2. Vypočítejte délku těžnice t_b trojúhelníku ABC, platí-li $a = 96$, $b = 144$, $t_a = 107$. [Dokažte, že v každém trojúhelníku platí $t_a^2 - t_b^2 = \frac{3}{4}(b^2 - a^2)$.]
3. V libovolném trojúhelníku ABC označme T těžiště, D střed strany AC a E střed strany BC. Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC s přeponou AB, pro něž je čtyřúhelník $CDTE$ tečnový. [56–B–I–4]

2. V trojúhelníku ABC má úhel α velikost 20°. Vypočítejte velikosti úhlů β a γ, platí-li rovnost $a + 2v_a = b + 2v_b$.

3. V rovině je dán rovnoběžník $ABCD$, jehož úhlopříčka BD je kolmá ke straně AD. Označme M ($M \neq A$) průsečík přímky AC s kružnicí o průměru AD. Dokažte, že osa úsečky BM prochází středem strany CD.

2. Z vyjádření výšek pomocí úhlu γ, tj. $v_a = b\sin\gamma$ a $v_b = a\sin\gamma$, dostaneme dosazením do předpokládaného vztahu rovnost $a + 2b\sin\gamma = b + 2a\sin\gamma$, která platí, právě když $(a - b)(1 - 2\sin\gamma) = 0$.

Jestliže $a = b$, vychází $\beta = \alpha = 20°$, takže $\gamma = 140°$.

Jinak musí být $\sin\gamma = \frac{1}{2}$, takže $\gamma = 30°$ nebo $\gamma = 150°$; úhel β v obou případech dopočítáme jako $\beta = 180° - \alpha - \gamma$.

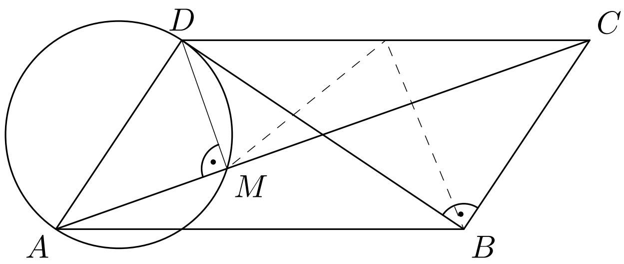
Úloha má tři řešení: $\beta = 20°$ a $\gamma = 140°$, $\beta = 130°$ a $\gamma = 30°$, $\beta = 10°$ a $\gamma = 150°$.

Jiné řešení. Dvojím vyjádřením obsahu trojúhelníku ABC dostaneme rovnost $av_a = bv_b$. Hodnoty ve dvojicích a, $2v_a$ a b, $2v_b$ mají tedy stejné součiny a podle zadání i stejné součty, takže to jsou dvojice kořenů téže kvadratické rovnice, proto $\{a, 2v_a\} = \{b, 2v_b\}$. V případě $v_a = v_b$ je $a = b$, a tedy $\alpha = \beta$, případ $a = 2v_b$ nastane, právě když má γ velikost 30 nebo 150 stupňů.

Poznámka. Úvahu o zmíněné kvadratické rovnici lze samozřejmě nahradit i přímým dosazením $b = a + 2v_a - 2v_b$ do rovnosti $av_a = bv_b$; po úpravě vyjde $(a - 2v_b)(v_a - v_b) = 0$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za nalezení některého ze vztahů vedoucího na výpočet úhlu gamma. Zbylé tři body dejte za úplnou diskusi všech možností. Za opomenutí tupého úhlu gamma strhněte bod.

3. Podle Thaletovy věty je úhel AMD pravý, proto je i úhel DMC pravý (obr. 1). Strany BC a AD jsou rovnoběžné, proto je úhlopříčka BD kolmá i ke straně BC. Body M a B tedy leží na Thaletově kružnici s průměrem CD. Mají proto od středu úsečky CD stejnou vzdálenost, takže zmiňovaný střed leží na ose úsečky MB.

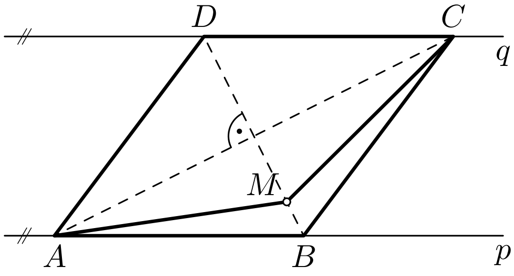


Obr. 1

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Dva body dejte za zjištění, že úhly DMC a DBC jsou pravé, dva body za poznatek, že body M a B leží na Thaletově kružnici s průměrem CD a dva body za odtud plynoucí závěr.

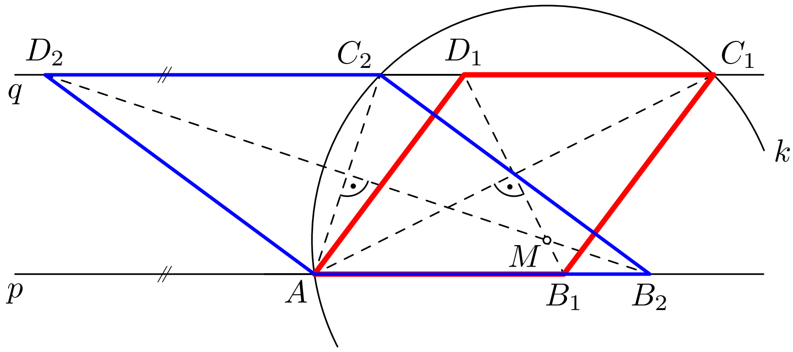
3. V rovině jsou dány dvě rovnoběžky p a q, bod A na přímce p a bod M ležící uvnitř pásu mezi přímkami p a q. Sestrojte kosočtverec nebo čtverec $ABCD$ tak, aby strana AB ležela na přímce p, strana CD na přímce q a aby úhlopříčka BD procházela bodem M.

3. Ze shodnosti trojúhelníků ABM a CBM (sus) vyplývá $|CM| = |AM|$; bod C proto musí ležet na kružnici se středem M a poloměrem $|AM|$ (obr. 1). Úhlopříčky (koso)čtverce jsou na sebe kolmé, proto body B a D leží na kolmici vedené bodem M na přímku AC.



Obr. 1

Konstrukce: Sestrojíme kružnici k se středem M a poloměrem $|AM|$. Průsečík této kružnice s přímkou q je bod C. Bodem M vedeme kolmici na přímku AC. Její průsečíky s přímkami p a q jsou body B a D (obr. 2). Sestrojený čtyřúhelník má zřejmě všechny požadované vlastnosti.



Obr. 2

Diskuse: Je-li vzdálenost bodu M od přímky q větší než jeho vzdálenost od bodu A, nemá kružnice k s přímkou q společný bod a úloha nemá řešení.

Má-li bod M stejnou vzdálenost od přímky q jako od bodu A, má kružnice k s přímkou q jediný společný bod C. Pokud zároveň bod M neleží na ose pásu mezi rovnoběžkami p a q, není přímka AC kolmá na p, proto kolmice vedená bodem M na přímku AC není s přímkou p rovnoběžná a úloha má jedno řešení; pokud ale bod M leží na ose pásu (je to tedy průsečík osy pásu s kolmicí k přímce p vedenou bodem A), nemá úloha řešení.

Je-li vzdálenost bodu M od přímky q menší než jeho vzdálenost od bodu A, protíná kružnice k přímku q ve dvou bodech. Pokud bod M leží na ose pásu mezi rovnoběžkami p a q, leží jeden z průsečíků na kolmici vedené bodem A na přímku p a úloha má jedno řešení; neleží-li M na ose pásu, má úloha dvě řešení.

Udělte 2 body za sestrojení bodu C, 2 body za nalezení bodů B a D a 2 body za úplnou diskusi. Důkaz správnosti konstrukce je u všech tří uváděných řešení natolik zřejmý, že může chybět v jinak úplných řešeních hodnocených 6 body.

Jiné řešení. Průsečík S úhlopříček (koso)čtverce $ABCD$ musí ležet na ose pásu mezi rovnoběžkami p a q.

Leží-li bod M na ose pásu, musí platit $S = M$; bod C je potom průsečík přímek AS

a q, B a D jsou průsečíky kolmice k přímce AC vedené bodem M s přímkami p a q. Je-li přitom $AM \perp p$, nemá úloha řešení, jinak má jedno řešení.

Neleží-li M na ose pásu, je úhel ASM pravý. Proto je bod S průsečíkem osy pásu s Thaletovou kružnicí nad průměrem AM. Body C, B, D potom najdeme stejně jako v předchozím řešení. Podle počtu společných bodů osy pásu a Thaletovy kružnice má potom úloha dvě řešení, jedno řešení nebo nemá žádné řešení.

Za poznatek, že bod S leží na ose pásu, udělte 1 bod. Za vyřešení úlohy pro případ, kdy M leží na ose pásu, dejte 2 body (z toho 1 bod za diskusi). Za vyřešení úlohy pro případ, kdy M na ose pásu neleží, dejte 3 body (z toho 1 bod za diskusi).

Jiné řešení. Bod M leží na ose úhlu ADC, proto má od přímek AD a q stejnou vzdálenost. Přímka AD je tedy tečnou kružnice, která má střed M a dotýká se přímky q.

Konstrukce: Sestrojíme kružnici h se středem M, která se dotýká přímky q. Vrchol D hledaného (koso)čtverce je průsečík přímky q s tečnou kružnice h procházející bodem A. Body B a C potom už najdeme snadno.

Diskuse: Má-li bod M od bodu A menší vzdálenost než od přímky q, neprochází bodem A žádná tečna kružnice h a úloha nemá řešení.

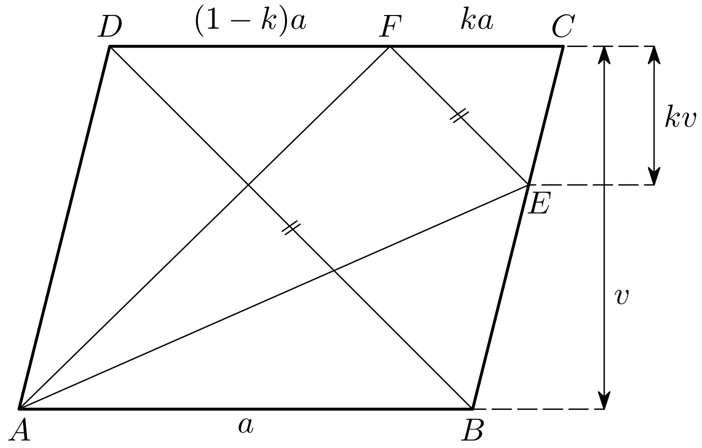
Má-li bod M od bodu A stejnou vzdálenost jako od přímky q, leží bod A na kružnici h a prochází jím jedna tečna této kružnice. Pokud přitom bod M leží na ose pásu mezi rovnoběžkami p a q, je touto tečnou přímka p, která přímku q neprotíná, a úloha nemá řešení. Pokud ale bod M na ose pásu neleží, tečna je s přímkou q různoběžná a úloha má jedno řešení.

Má-li bod M od bodu A větší vzdálenost než od přímky q, existují dvě tečny kružnice h procházející bodem A. Pokud přitom bod M leží na ose pásu, je jednou z tečen přímka p a úloha má jedno řešení; pokud bod M na ose pásu neleží, jsou obě tečny s q různoběžné a úloha má dvě řešení.

Udělte 3 body za sestrojení bodu D, 1 bod za dokončení konstrukce a 2 body za diskusi.

3. *Na straně BC, resp. CD rovnoběžníku ABCD určete body E, resp. F tak, aby úsečky EF, BD byly rovnoběžné a trojúhelníky ABE, AEF a AFD měly stejné obsahy.*

Řešení. Označme a velikost stran AB a CD a v vzdálenost jejich přímek, která je zároveň rovna výšce trojúhelníku AFD z vrcholu A (obr. 1). Z podmínky $EF \parallel BD$ podle věty uu vyplývá, že trojúhelníky BCD a ECF jsou podobné; označme $k \in (0,1)$ koeficient jejich podobnosti. Jakmile ho vypočteme, bude úloha vyřešena.



Obr. 1

Protože $|FC| = ka$, $|FD| = (1-k)a$ a výšky trojúhelníků ECF, ABE ze společného vrcholu E mají velikosti kv, resp. $(1-k)v$, pro obsahy trojúhelníků AFD a ABE platí

$$S_{AFD} = \frac{(1-k)av}{2} = \frac{a(1-k)v}{2} = S_{ABE},$$

takže oba obsahy se rovnají pro libovolné $k \in (0,1)$. Protože obsah trojúhelníku ECF má hodnotu $S_{ECF} = \frac{1}{2}ka \cdot kv = \frac{1}{2}k^2av$ a obsah celého rovnoběžníku $ABCD$ je dán vzorcem $S_{ABCD} = av$, můžeme obsah trojúhelníku AEF vyjádřit takto:

$$\begin{aligned} S_{AEF} &= S_{ABCD} - S_{ABE} - S_{ECF} - S_{AFD} = \\ &= av\left(1 - \tfrac{1}{2}(1-k) - \tfrac{1}{2}k^2 - \tfrac{1}{2}(1-k)\right) = av\left(k - \tfrac{1}{2}k^2\right). \end{aligned}$$

Obsahy trojúhelníků ABE, AFD proto budou shodné s obsahem trojúhelníku AEF, právě když bude platit

$$\tfrac{1}{2}(1-k) = k - \tfrac{1}{2}k^2 \quad \text{neboli} \quad k^2 - 3k + 1 = 0.$$

Tato kvadratická rovnice má kořeny

$$k_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2},$$

z nichž podmínce $k \in (0,1)$ vyhovuje pouze kořen $k = \frac{1}{2}\left(3 - \sqrt{5}\right)$. Dodejme, že pro takové k platí

$$1 - k = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{k}{1-k}.$$

Odpověď. Hledané body E, F jsou určeny poměry

$$|CE| : |EB| = |CF| : |FD| = \left(\sqrt{5} - 1\right) : 2.$$

Poznámka. Rovnost $(1 - k) : 1 = k : (1 - k)$ ze závěru řešení znamená, že body E, F dělí příslušné strany rovnoběžníku v tzv. *zlatém poměru.* Vyjadřují to rovnosti

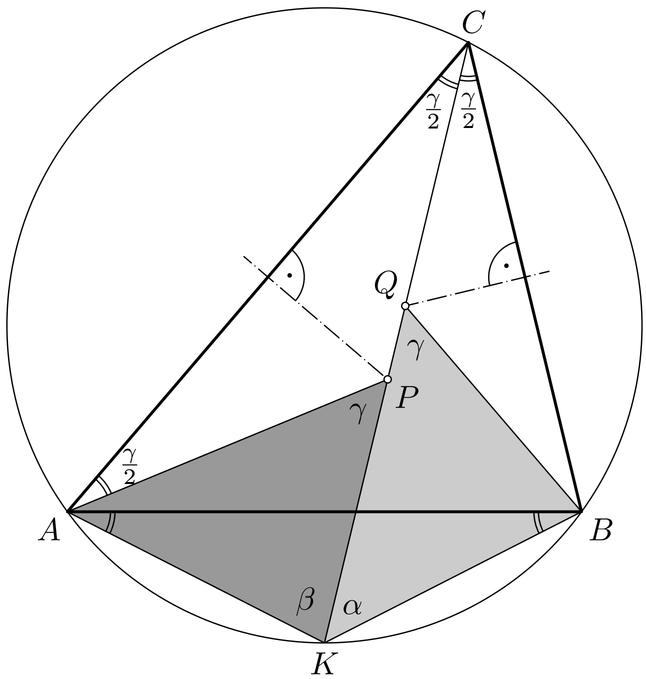
$$|CE| : |EB| = |EB| : |BC| \quad \text{a} \quad |CF| : |FD| = |FD| : |DC|.$$

Návodné a doplňující úlohy:

1. Základna AB lichoběžníku $ABCD$ je třikrát delší než základna CD. Označme M střed strany AB a P průsečík úsečky DM s úhlopříčkou AC. Vypočítejte poměr obsahů trojúhelníku CDP a čtyřúhelníku $MBCP$. [55–C–II–1]
2. Je dán lichoběžník $ABCD$ ($AB \parallel CD$) s jednotkovým obsahem, pro který platí $|AB| = 2|CD|$. Označme K, L po řadě středy stran BC a CD. Najděte obsah trojúhelníku AKL. [Obsahy trojúhelníků ABK, CLK a ADL jsou po řadě $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{12}$ a $\frac{1}{6}$, tedy obsah trojúhelníku AKL je $\frac{5}{12}$.]
3. Je dán rovnoběžník $ABCD$. Přímka vedená bodem D protíná úsečku AC v bodě G, úsečku BC v bodě F a polopřímku AB v bodě E tak, že trojúhelníky BEF a CGF mají stejný obsah. Určete poměr $|AG| : |CG|$. [54–B–I–2]

5. *Trojúhelníku ABC je opsána kružnice k. Osa strany AB protne kružnici k v bodě K, který leží v polorovině opačné k polorovině ABC. Osy stran AC a BC protnou přímku CK po řadě v bodech P a Q. Dokažte, že trojúhelníky AKP a KBQ jsou shodné.*

Řešení. Označme α, β, γ obvyklým způsobem velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC (obr. 4). Bod K leží na ose úsečky AB, proto $|AK| = |KB|$. Trojúhelník AKB je rovnoramenný se základnou AB, jeho vnitřní úhly při vrcholech A a B jsou tudíž



Obr. 4

shodné. Podle věty o obvodových úhlech jsou shodné i úhly BCK a BAK, resp. ACK a ABK, jsou proto shodné i úhly BCK a ACK. Polopřímka CK je tudíž osou úhlu ACB:

$$|\sphericalangle ACK| = |\sphericalangle BCK| = \frac{\gamma}{2}.$$

Protože bod P leží na ose strany AC, je trojúhelník ACP rovnoramenný a jeho vnitřní úhly při základně AC mají velikost $\frac{1}{2}\gamma$, takže jeho vnější úhel APK při vrcholu P má velikost $\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\gamma = \gamma$. Stejně tak z rovnoramenného trojúhelníku BCQ usoudíme, že i velikost úhlu BQK je γ. Podle věty o obvodových úhlech jsou shodné úhly ABC a AKC, tedy úhel AKC (neboli úhel AKP) má velikost β a — zcela analogicky — úhel BKQ má velikost α.

V každém z trojúhelníků AKP a BKQ již známe velikosti dvou vnitřních úhlů (β, γ, resp. α, γ), takže vidíme, že zbývající úhly KAP a KBQ mají velikosti α, resp. β.

Z předchozího plyne, že trojúhelníky AKP a KBQ jsou shodné podle věty *usu*, neboť mají shodné strany AK a KB i obě dvojice k nim přilehlých vnitřních úhlů.

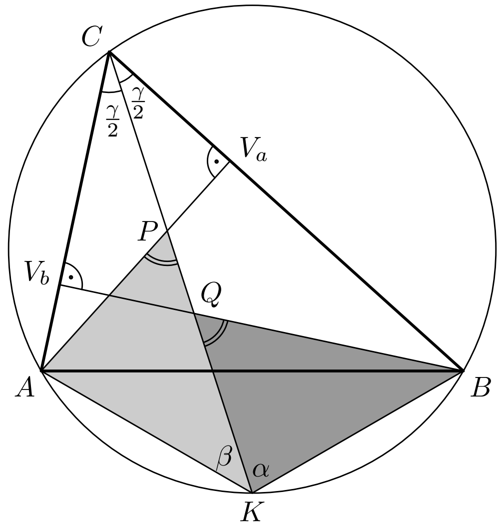
K uvedenému postupu dodejme, že výpočet úhlů KAP a KBQ přes úhly APK a BQK lze obejít takto: shodnost úhlů KAP a BAC (resp. KBQ a ABC) plyne ze shodnosti úhlů KAB a PAC (resp. KBA a QBC).

Návodné a doplňující úlohy:

1. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník. Označme K, L paty výšek z vrcholů A, B, M střed strany AB a V průsečík výšek trojúhelníku ABC. Dokažte, že osa úhlu KML prochází středem úsečky VC. [54–B–II–3]
2. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ označme L, M středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům BCA, BCD. Dále označme R průsečík kolmic vedených z bodů L a M po řadě na přímky AC a BD. Dokažte, že trojúhelník LMR je rovnoramenný. [56–A–III–2]
3. Označme S střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Dokažte, že střed kružnice opsané trojúhelníku ABS leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC. [Pro bod K z řešení soutěžní úlohy platí $|KA| = |KB| = |KS|$, neboť $S \in KC$ a $|\sphericalangle KAS| = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$, takže i $|\sphericalangle KSA| = \frac{1}{2}(\alpha + \gamma)$.]

3. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC, který není rovnoramenný. Označme K průsečík osy úhlu ACB s osou strany AB. Přímka CK protne výšky z vrcholů A a B v bodech, které označíme po řadě P a Q. Předpokládejme, že trojúhelníky AKP a BKQ mají stejný obsah. Určete velikost úhlu ACB.

3. Označme vnitřní úhly v trojúhelníku ABC obvyklým způsobem. Ze shodnosti obvodových úhlů ACK a BCK v kružnici opsané trojúhelníku ABC plyne shodnost odpovídajících tětiv AK a BK, takže bod K půlí ten z oblouků AB, který leží proti vrcholu C (obr. 3). Podle věty o obvodových úhlech jsou velikosti úhlů AKC a BKC po řadě rovny



Obr. 3

β a α. Označme V_a, V_b paty výšek příslušných vrcholům A, B trojúhelníku ABC. Protože ABC je ostroúhlý trojúhelník, jsou body V_a a V_b vnitřní body odpovídajících stran. Velikost úhlu APK je shodná s velikostí vnitřního úhlu při vrcholu P v pravoúhlém trojúhelníku CPV_a, je tedy rovna $90° - \frac{1}{2}\gamma$. Stejnou velikost má analogicky i úhel BQK.

Trojúhelníky AKP a BKQ mají stejný obsah, shodné strany AK a BK, a tudíž i výšky na ně, a navíc se shodují i v úhlu proti nim. Z konstrukce trojúhelníku podle dané strany, výšky na tuto stranu a protilehlého vnitřního úhlu a ze souměrnosti sestrojených řešení plyne, že trojúhelník AKP je shodný buď s trojúhelníkem KBQ, anebo s trojúhelníkem BKQ. Jelikož trojúhelník ABC není rovnoramenný (tj. $\alpha \neq \beta$), je trojúhelník AKP shodný s trojúhelníkem KBQ. Velikost vnitřního úhlu při vrcholu A trojúhelníku PAK je $180° - \beta - \left(90° - \frac{1}{2}\gamma\right) = 90° - \beta + \frac{1}{2}\gamma$, takže z uvedené shodnosti plyne

$$90° - \beta + \frac{\gamma}{2} = \alpha \qquad \text{neboli} \qquad 90° + \frac{\gamma}{2} = \alpha + \beta = 180° - \gamma.$$

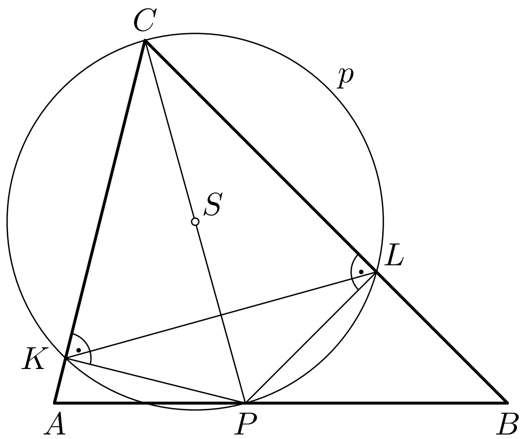
Odtud dostáváme $\gamma = 60°$. Naopak pokud $\gamma = 60°$, je $|\sphericalangle APK| = |\sphericalangle BQK| = 60°$ a trojúhelníky AKP a KBQ jsou shodné podle věty *usu*, mají tedy stejný obsah.

Závěr: Úhel ACB má velikost $60°$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za zjištění, že K je středem oblouku AB (důkaz není nutný, uvede-li student, že jde o známou skutečnost). Dále 1 bodem oceňte vyjádření velikostí vnitřních úhlů v trojúhelnících AKP a BKQ pomocí α, β, γ. Další 2 body udělte za důkaz shodnosti trojúhelníků AKP a BKQ, 1 bod za výpočet úhlu γ a 1 bod za důkaz, že z podmínky $\gamma = 60°$ plyne shodnost (obsahů) trojúhelníků AKP a KBQ.

2. Pro vnitřní bod P strany AB ostroúhlého trojúhelníku ABC označme K a L paty kolmic z bodu P na přímky AC a BC. Sestrojte takový bod P, pro který přímka CP půlí úsečku KL.

2. Označme S střed úsečky CP. Podle Thaletovy věty leží body K a L na kružnici p sestrojené nad průměrem CP. Předpokládejme, že bod P má požadovanou vlastnost, tj. že průměr CP půlí tětivu KL (obr. 1).



Obr. 1

Průměr libovolné kružnice půlí každý jiný průměr téže kružnice a také všechny tětivy k němu kolmé. A žádnou jinou tětivu půlit nemůže: když totiž prochází dvěma *různými* body její osy souměrnosti (totiž středem tětivy a středem kružnice), musí být — stejně jako tato osa — k dané tětivě kolmý.

Tětiva KL ovšem nemůže být průměrem kružnice p, protože podle Thaletovy věty by byl úhel KCL (a tedy i úhel ACB) pravý, což odporuje zadání, proto je tětiva KL k průměru CP kolmá. V tomto případě jsou trojúhelníky CKP a CLP souměrně sdruženy podle přímky CP, odkud již plyne, že úhly KCP a LCP jsou shodné. Polopřímka CP je tedy osou úhlu ACB.

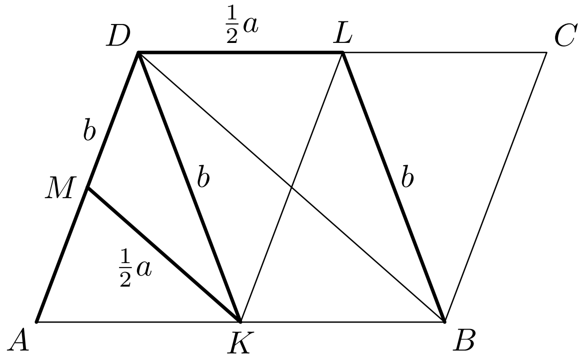
Je-li naopak polopřímka CP osou úhlu ACB, shodují se pravoúhlé trojúhelníky CKP a CLP ve společné přeponě CP a ve dvou vnitřních úhlech, takže body K a L jsou souměrně sdruženy podle přímky CP. Proto tětiva CP půlí úsečku KL.

Odpověď. Existuje právě jeden vnitřní bod strany AB ostroúhlého trojúhelníku ABC, pro který úsečka CP půlí úsečku KL. Je to průsečík osy vnitřního úhlu při jeho vrcholu C se stranou AB.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 4 body důkaz skutečnosti, že bod P musí ležet na ose úhlu ACB a 2 body za ověření, že bod ležící na ose úhlu má požadovanou vlastnost. Pokud řešitel bez důkazu uvede, že bod P leží na ose úhlu ACB, udělte jen 1 bod. Tvrzení o tětivách, jež průměr kružnice půlí, lze považovat za zřejmé. Naopak strhněte 1 bod, pokud si řešitel neuvědomí, že tětiva KL nemůže být průměrem kružnice p.

3. *V rovině je dána úsečka AB. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, pro jehož středy stran AB, CD, DA označené po řadě K, L, M platí: body A, B, L, D leží na jedné kružnici a rovněž body K, L, D, M leží na jedné kružnici.*

ŘEŠENÍ. Označme $a = |AB|$, $b = |AD|$ délky stran hledaného rovnoběžníku (obr. 1). Lichoběžníku $ABLD$ lze opsat kružnici, proto je rovnoramenný, a tudíž $|BL| = b$. Protože úsečky KB a DL jsou rovnoběžné a shodné, je $KBLD$ rovnoběžník, a tedy $|KD| = |BL| = b$. To znamená, že trojúhelník AKD je rovnoramenný, takže bod D musí ležet na ose jeho základny AK.



Obr. 1

Úsečka KL je střední příčkou rovnoběžníku $ABCD$, proto $KL \parallel MD$; $KLDM$ je tedy lichoběžník, a jelikož se mu dá opsat kružnice, je rovnoramenný a odtud $|KM| = |DL| = \frac{1}{2}a$. Protože KM je střední příčka trojúhelníku BDA, má strana BD délku $2 \cdot |KM| = a$. Bod D tedy leží na kružnici se středem B a poloměrem a.

Konstrukce: Sestrojíme střed K úsečky AB, osu o úsečky AK a kružnici k se středem B a poloměrem $|AB|$. Průsečík této kružnice s osou úsečky AK je bod D. Bod C je potom průsečík přímek vedených body D a B rovnoběžně s přímkami AB a AD.

Důkaz: Čtyřúhelník $ABCD$ má protilehlé strany rovnoběžné, je to tedy rovnoběžník. Označme L a M středy úseček CD a AD. Z toho, že bod D leží na ose úsečky AK, vyplývá $|KD| = |AD|$. Protože $KBLD$ je rovnoběžník, platí $|BL| = |KD| = |AD|$. Lichoběžník $ABDL$ je tedy rovnoramenný, a proto body A, B, L, D leží na jedné kružnici. Úsečka KM je střední příčka trojúhelníku BDA, proto $|KM| = \frac{1}{2}|BD| = \frac{1}{2}|AB| = |DL|$; $KLDM$ je tedy rovnoramenný lichoběžník, takže jeho vrcholy leží na jedné kružnici.

Diskuse: Protože přímka o má od bodu B menší vzdálenost než bod A, protíná kružnici k ve dvou bodech. Úloha má tedy v každé polorovině s hraniční přímkou AB jedno řešení.

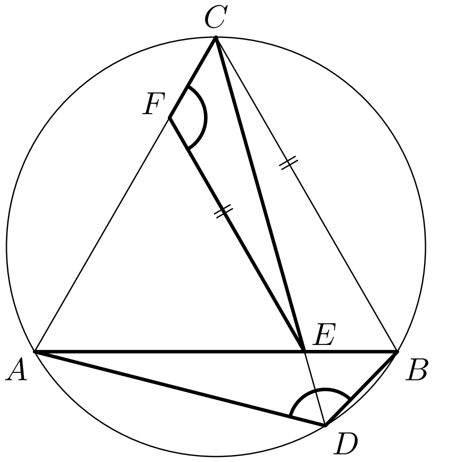
Jiné řešení. Stejně jako v prvém řešení dokážeme, že $|KD| = |AD|$ a $|DB| = |AB|$. Trojúhelníky AKD a DAB jsou tedy rovnoramenné, a protože se shodují v úhlu u vrcholu A, jsou podobné. Proto $|AK|/|AD| = |DA|/|AB|$ čili $\frac{1}{2}a/b = b/a$ a odtud $b = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Bod D je tedy průsečíkem kružnic se středy A a K a poloměrem $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$.

Návodné a podobné úlohy:

1. Dokažte, že lichoběžníku se dá opsat kružnice, právě když je rovnoramenný.
2. Dokažte, že pro délky stran a, b a délky úhlopříček e, f rovnoběžníku platí $e^2 + f^2 = 2a^2 + 2b^2$.
3. Strana AB rovnoběžníku $ABCD$ má délku a. Kružnice opsaná trojúhelníku ABD protíná polopřímku opačnou k polopřímce CD v bodě L; označme $x = |CL|$. Vypočítejte délku tětivy, kterou přímka CD vytíná na kružnici opsané trojúhelníku ABC. [$|a - x|$]

5. *Uvnitř kratšího oblouku AB kružnice opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC je zvolen bod D. Tětiva CD protíná stranu AB v bodě E. Dokažte, že trojúhelník se stranami délek $|AE|$, $|BE|$, $|CE|$ je podobný trojúhelníku ABD.*

Řešení. Veďme bodem E rovnoběžku se stranou BC a označme F její průsečík se stranou AC. Trojúhelník AEF je rovnostranný, proto $|EF| = |AE|$ a také $|CF| = |BE|$. Trojúhelník FEC má tedy délky stran $|AE|, |BE|, |CE|$ (obr. 2), které nás zajímají. Dokážeme, že je podobný trojúhelníku ABD:



Obr. 2

Oba trojúhelníky se zřejmě shodují ve vyznačeném tupém úhlu velikosti 120° ($|\sphericalangle ADB| = 180° - |\sphericalangle ACB|$). Úhly ACD a ABD jsou obvodové nad tětivou AD, proto jsou shodné. Podle věty *uu* tedy skutečně platí $\triangle ECF \sim \triangle ABD$.

Jiné řešení. Obvodové úhly DAB a DCB jsou shodné stejně jako úhly ADC a ABC, proto $\triangle ADE \sim \triangle CBE$. Odtud vyplývá

$$\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|CE|}{|CB|} = \frac{|CE|}{|AB|}.$$

Analogicky jsou podobné i trojúhelníky DEB a AEC, takže

$$\frac{|BE|}{|BD|} = \frac{|CE|}{|AC|} = \frac{|CE|}{|AB|}.$$

Z rovností

$$\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|CE|}{|AB|} = \frac{|BE|}{|BD|}$$

pak vyplývá podobnost trojúhelníku s délkami stran $|AE|$, $|CE|$, $|BE|$ a trojúhelníku ABD.

Návodné a podobné úlohy:

1. Jestliže se tětivy AB a CD kružnice k protínají v bodě M, jsou trojúhelníky AMC a DMB podobné. Dokažte.
2. Nechť E je vnitřní bod strany AB trojúhelníku ABC. Označme D ($D \neq C$) průsečík přímky CE s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC. Dále označme F průsečík strany AC s přímkou, která prochází bodem E a je rovnoběžná s BC. Dokažte, že trojúhelníky ABD a ECF jsou podobné.
3. Nechť ABC je trojúhelník, v němž $|AC| \neq |BC|$. Dokažte, že osa úhlu BCA se s osou strany AB protíná v bodě, který leží na kružnici opsané trojúhelníku ABC.

1. Kružnice $l(T; s)$ prochází středem kružnice $k(S; 2\,\mathrm{cm})$. Kružnice $m(U; t)$ se vně dotýká kružnic k a l, přičemž $US \perp ST$. Poloměry s a t vyjádřené v centimetrech jsou celá čísla. Určete je.

3. V rovině je dán rovnoběžník $ABCD$. Označme K, L, M po řadě středy stran AB, CD, AD. Předpokládejme, že body A, B, L, D leží na jedné kružnici a zároveň i body K, L, D, M leží na jedné kružnici. Dokažte, že $|AC| = 2 \cdot |AD|$.

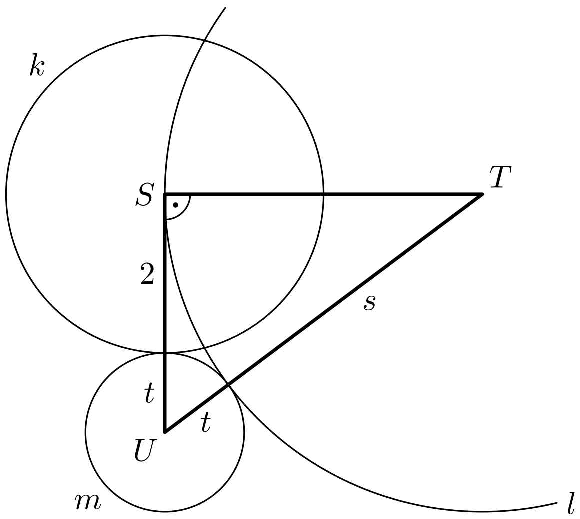
1. Trojúhelník UST je pravoúhlý. Jeho přepona UT má délku $s+t$, délky odvěsen jsou $|US| = t+2$, $|ST| = s$ (obr. 1). Podle Pythagorovy věty proto platí

$$(s+t)^2 = (t+2)^2 + s^2.$$

Úpravami postupně dostáváme

$$\begin{aligned} s^2 + 2st + t^2 &= t^2 + 4t + 4 + s^2, \\ st &= 2t + 2, \\ t(s-2) &= 2. \end{aligned}$$

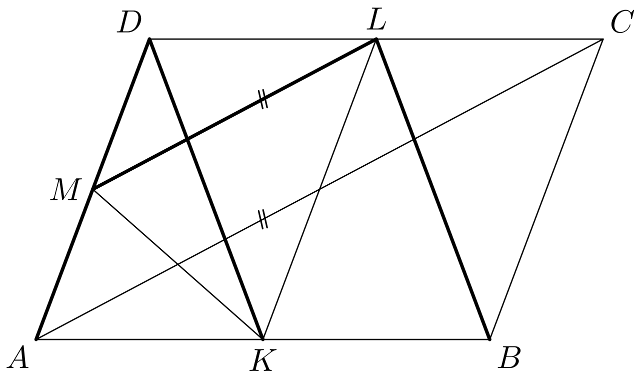
Čísla t a $s-2$ jsou celá, proto t musí být dělitelem čísla 2. Protože t je kladné, jsou jen dvě možnosti; jestliže $t = 1\,\mathrm{cm}$, potom $s = 4\,\mathrm{cm}$, a jestliže $t = 2\,\mathrm{cm}$, potom $s = 3\,\mathrm{cm}$.



Obr. 1

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Udělte jeden bod za vyjádření délek stran trojúhelníku UST, dva body za použití Pythagorovy věty, jeden bod za úpravu na tvar $t(s-2) = 2$ a dva body za nalezení obou řešení.

3. Lichoběžníky $ABLD$ a $KLDM$ jsou rovnoramenné, protože jsou tětivové. Odtud vyplývá shodnost ramen $|AD| = |BL|$ a shodnost úhlopříček $|KD| = |LM|$ (obr. 2). Střední příčka KL dělí rovnoběžník $ABCD$ na dva shodné rovnoběžníky, pro jejichž úhlopříčky platí $|KD| = |BL|$. Úsečka ML je střední příčkou trojúhelníku ACD, proto $|AC| = 2\cdot|ML|$. Spojením výše uvedených rovností máme $|AC| = 2\cdot|ML| = 2\cdot|KD| = 2\cdot|BL| = 2\cdot|AD|$.



Obr. 2

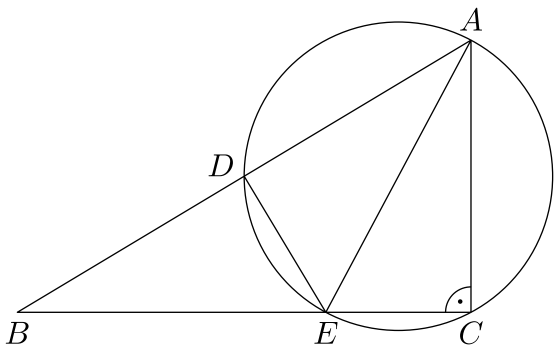
Jiné řešení. Budeme postupovat stejně jako ve druhém řešení třetí úlohy domácího kola (na domácí kolo se lze odvolat bez dalšího důkazu): Protože $ABLD$ je tětivový (a tudíž rovnoramenný) lichoběžník, je $|KD| = |BL| = |AD|$. Podobně je i lichoběžník $KLDM$ rovnoramenný, takže $|MK| = |DL|$ a $|DB| = 2|MK| = 2|DL| = |DC| = |AB|$. Z podobnosti rovnoramenných trojúhelníků AKD a DAB (shodují se v úhlu u vrcholu A svých základen) pak plyne, že $|AK|/|AD| = |DA|/|AB|$, odkud po dosazení $|AK| = \frac{1}{2}|AB|$ vychází $|DB| = |AB| = \sqrt{2}\cdot|AD|$. Nyní využijeme známou rovnoběžníkovou rovnost $|AC|^2 + |BD|^2 = 2\cdot|AB|^2 + 2\cdot|AD|^2$. Dosazením za $|AB|$ a $|DB|$ dostaneme $|AC|^2 + 2\cdot|AD|^2 = 4\cdot|AD|^2 + 2\cdot|AD|^2$ a odtud $|AC|^2 = 4\cdot|AD|^2$ čili $|AC| = 2\cdot|AD|$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho jeden bod za poznatek, že lichoběžníky $ABLD$ a $KLDM$ jsou rovnoramenné (tuto dobře známou vlastnost tětivových lichoběžníků není nutno dokazovat), po jednom bodu za každou z rovností $|AC| = 2 \cdot |ML|$, $|AD| = |BL|$, $|KD| = |LM|$, $|KD| = |BL|$ a jeden bod za jejich spojení.

V případě druhého postupu dejte 2 body za rovnosti $|BD| = |AB|$ a $|AB| = \sqrt{2} \cdot |AD|$, 2 body za použití rovnosti $|AC|^2 + |BD|^2 = 2 \cdot |AB|^2 + 2 \cdot |AD|^2$ a dva body za dokončení důkazu.

2. Jsou dány délky odvěsen $a = |BC|$, $b = |AC|$ pravoúhlého trojúhelníku ABC, přičemž $a > b$. Označme D střed přepony AB a E ($E \neq C$) průsečík strany BC s kružnicí opsanou trojúhelníku ADC. Vypočítejte obsah trojúhelníku EAD.

2. Označme c délku přepony AB, takže $|AD| = |BD| = \frac{1}{2}c$. Čtyřúhelník $ADEC$ je tětivový a úhel ECA je pravý, proto i protilehlý úhel ADE je pravý (obr. 1). Pravoúhlé trojúhelníky ABC a EDB mají úhel u vrcholu B společný, proto $\triangle ABC \sim \triangle EBD$. Odtud



Obr. 1

$$\frac{|ED|}{|BD|} = \frac{|AC|}{|BC|}, \quad \text{a proto} \quad |ED| = \frac{bc}{2a}.$$

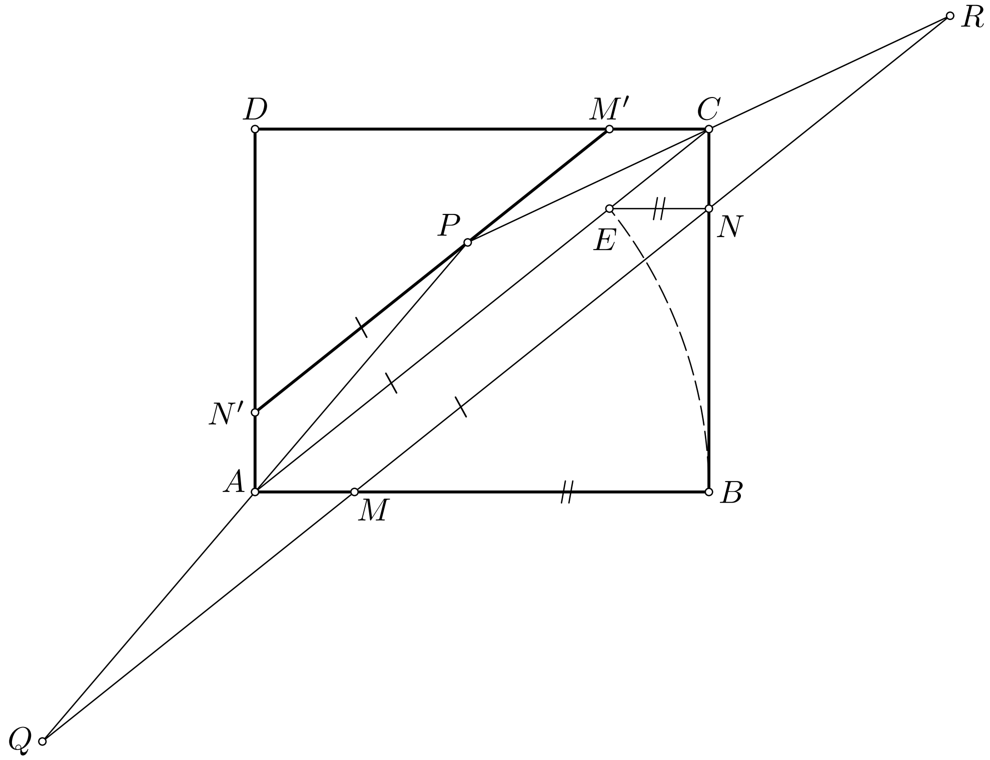
Obsah pravoúhlého trojúhelníku EAD je tak (s využitím Pythagorovy věty)

$$S = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |ED| = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{bc}{2a} = \frac{bc^2}{8a} = \frac{b(a^2 + b^2)}{8a}.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho dva body za zjištění, že úhel ADE je pravý, jeden bod za podobnost trojúhelníků ABC a EBD, jeden bod za výpočet délky strany ED a dva body za dopočítání obsahu trojúhelníku EAD.

2. *Uvažujme vnitřní bod P daného obdélníku $ABCD$ a označme po řadě Q, R obrazy bodu P v souměrnostech podle středů A, C. Předpokládejme, že přímka QR protne strany AB a BC ve vnitřních bodech M a N. Sestrojte množinu všech bodů P, pro něž platí $|MN| = |AB|$.*

Řešení. Úhlopříčka AC daného obdélníku $ABCD$ je ze zadání střední příčkou v trojúhelníku PQR, a tedy $AC \parallel QR$, jinak řečeno $AC \parallel MN$. Úsečka MN je tak jednoznačně určena tím, že je rovnoběžná s AC, leží v opačné polorovině určené přímkou AC než bod P a pro její délku platí $|MN| = |AB|$. Konstrukci bodů M a N lze provést několika způsoby. Lze k tomu například využít rovnoběžník $AMNE$ (obr. 1), v němž platí $|AE| = |MN| = |AB|$.



Obr. 1

Protože úsečka MN zároveň určuje přímku, na níž leží strana QR trojúhelníku PQR, je zřejmé, že vrchol P musí ležet na přímce p, jež je obrazem přímky MN v osové souměrnosti podle přímky AC (obsahující střední příčku trojúhelníku PQR). Přímka p má s vnitřkem daného obdélníku společný vnitřek úsečky $M'N'$ (jež je navíc obrazem nalezené úsečky MN ve středové souměrnosti podle středu daného obdélníku).

Snadno vidíme, že i naopak ke každému vnitřnímu bodu P úsečky $M'N'$ leží odpovídající body Q, R na přímce MN a body M, N jsou tak průsečíky přímky QR se stranami AB, BC, takže vyhovují podmínkám úlohy.

Závěr. Hledanou množinou všech bodů P dané vlastnosti je tedy vnitřek výše popsané úsečky $M'N'$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Je dána kružnice k s průměrem AB. K libovolnému bodu Y kružnice k, $Y \neq A$, sestrojme na polopřímce AY bod X, pro který platí $|AX| = |YB|$. Určete množinu všech takových bodů X. [56–B–I–2]

N2. V rovině daného čtverce $KLMN$ určete množinu všech bodů P, pro něž jsou úhly NPK, KPL a LPM shodné. [53–A–I–2]

N3. Je dán rovnostranný trojúhelník MPQ. Najděte množinu vrcholů C všech trojúhelníků ABC takových, že body P, Q jsou paty výšek z vrcholů A, B a bod M je střed strany AB. [51–B–I–6]

N4. Jsou dány kružnice k a l s různými poloměry, které se vně dotýkají v bodě T. Průsečíkem M jejich společných vnějších tečen veďme sečnu s obou kružnic. Označme X ten z obou průsečíků kružnice k se sečnou s, který je vzdálenější od bodu M. Podobně označme Y ten z obou průsečíků kružnice l se sečnou s, který je vzdálenější od bodu M. Nechť P je takový bod, že $XTYP$ je rovnoběžník. Určete množinu bodů P odpovídajících všem takovým sečnám s. [49–B–I–4]

5. *Zabývejme se otázkou, které trojúhelníky ABC s ostrými úhly při vrcholech A a B mají následující vlastnost: Vedeme-li středem výšky z vrcholu C tři přímky rovnoběžné se stranami trojúhelníku ABC, protnou je tyto přímky v šesti bodech ležících na jedné kružnici.*

a) Ukažte, že vyhovuje každý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C.

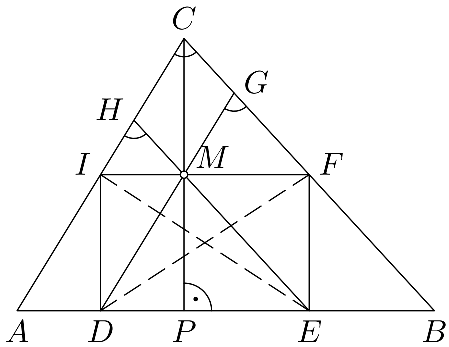
b) Vysvětlete, proč žádný jiný trojúhelník ABC nevyhovuje.

Řešení. I když doporučujeme řešit obě části úlohy odděleně (tj. nejprve analyzovat situaci v pravoúhlém trojúhelníku), popíšeme rovnou jejich společné řešení. Celou úlohu lze totiž formulovat jako důkaz tvrzení, že sestrojených šest bodů leží na kružnici, právě když je úhel ACB pravý.

Uvažujme tedy libovolný trojúhelník ABC s ostrými úhly α, β a označme M střed výšky CP a D, E, F, G, H, I uvažované průsečíky tak, aby s vrcholy A, B, C a patou výšky P ležely na hranici trojúhelníku v pořadí

$$A,\ D,\ P,\ E,\ B,\ F,\ G,\ C,\ H,\ I.$$

Z konstrukce plyne, že body M, D, I jsou středy stran pravoúhlého trojúhelníku ACP a body M, E, F jsou středy stran pravoúhlého trojúhelníku BCP. Oba čtyřúhelníky $PMID$ a $PMFE$ jsou tedy pravoúhelníky, takže i $DEFI$ je pravoúhelník (obr. 2). Jeho vrcholy D, E, F, I proto *vždy* leží na jedné kružnici a úsečky DF a EI jsou její průměry. Naší úlohou je proto zjistit, kdy na této kružnici leží i body G a H. To lze podle Thaletovy věty vyjádřit podmínkou, že úhly DGF a EHI jsou pravé. Protože $DG \parallel AC$ a $EH \parallel BC$, jsou oba úhly DGF a EHI shodné s úhlem ACB a ekvivalence s podmínkou pravého úhlu ACB je tak dokázána.



Obr. 2

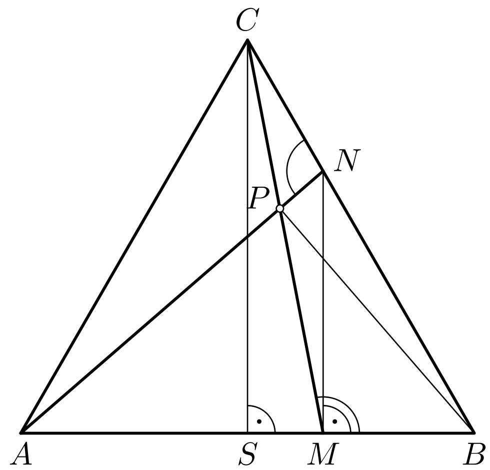
Návodné a doplňující úlohy:

N1. Označme S střed kružnice vepsané danému trojúhelníku ABC a P, Q paty kolmic z vrcholu C k přímkám, na kterých leží osy vnitřních úhlů BAC a ABC. Dokažte, že přímky AB a PQ jsou rovnoběžné. [51–A–S–2]

N2. Uvnitř stran BC, CA, AB daného ostroúhlého trojúhelníku ABC jsou po řadě vybrány body X, Y a Z. Dokažte, že každému ze čtyřúhelníků $ABXY$, $BCYZ$ a $CAZX$ lze opsat kružnici, právě když body X, Y, Z jsou paty výšek trojúhelníku ABC. [51–B–S–2]

3. Nechť M, N jsou po řadě vnitřní body stran AB, BC rovnostranného trojúhelníku ABC, pro něž platí $|AM| : |MB| = |BN| : |NC| = 2 : 1$. Označme P průsečík přímek AN a CM. Dokažte, že přímky BP a AN jsou navzájem kolmé.

3. Ze zadání plyne, že $|BM| = |CN|$, $|AC| = |BC|$ a $|\sphericalangle ACN| = |\sphericalangle CBM| = 60°$, takže trojúhelníky ACN a CBM jsou shodné podle věty *sus*. Proto platí i $|\sphericalangle ANC| = |\sphericalangle CMB|$, takže čtyřúhelník $BNPM$ je tětivový (úhel ANC je doplňkovým úhlem k úhlu ANB, který je protějším úhlem k úhlu CMB ve zmíněném čtyřúhelníku, obr. 1).



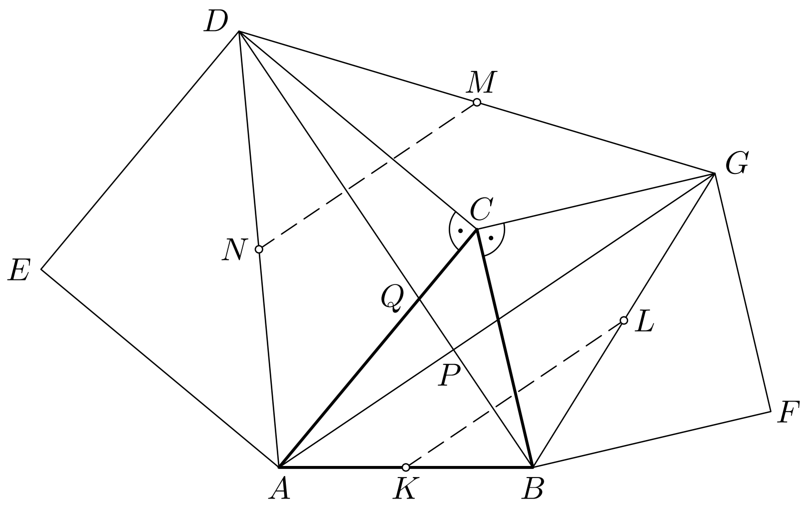
Obr. 1

Označme S střed strany AB daného rovnostranného trojúhelníku ABC. Protože $|SB| = \frac{1}{2}|AB|$, je $|SB| : |MB| = 3 : 2$, a protože je i $|CB| : |NB| = 3 : 2$, jsou trojúhelníky SBC a MBN podobné podle věty *sus*. Protože úhel CSB je pravý, musí být pravý i úhel NMB. Kružnice opsaná čtyřúhelníku $BNPM$ je tak Thaletovou kružnicí nad průměrem BN, a tudíž je pravý i úhel BPN, což jsme chtěli dokázat.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za odvození faktu, že úhel BMN je pravý (podobnost trojúhelníků SBC a MBN) nebo za důkaz toho, že čtyřúhelník $BNPM$ je tětivový, udělte 2b. Za neúplné řešení (např. odvození obou předchozích tvrzení bez dokončení důkazu) však neudělujte více než 3b.

3. Vně daného trojúhelníku ABC jsou sestrojeny čtverce $ACDE$, $BCGF$. Dokažte, že $|AG| = |BD|$. Dále ukažte, že středy obou čtverců spolu se středy úseček AB a DG jsou vrcholy čtverce.

3. Protože oba úhly BCG a DAC jsou pravé, uvažujme otočení kolem vrcholu C daného trojúhelníku, v němž bod B přejde do bodu G. V něm je zřejmě obrazem bodu D bod A a obrazem úsečky BD úsečka GA (obr. 1). Odtud plyne, že $|AG| = |BD|$, a také, že úsečky AG a BD jsou navzájem kolmé.



Obr. 1

Označme po řadě K, L, M, N středy stran čtyřúhelníku $ABGD$. (Body N a L jsou tedy středy uvažovaných čtverců.) Vzhledem k tomu, že úsečka KL je střední příčkou trojúhelníku AGB a úsečka MN střední příčkou trojúhelníku AGD, je $|KL| = \frac{1}{2}|AG| = |KL|$ a zároveň $MN \parallel AG \parallel KL$. Podobně $|KN| = \frac{1}{2}|BD| = |LM|$ a zároveň $KN \parallel BD \parallel LM$. To znamená, že $KLMN$ je rovnoběžník. Protože však víme, že $|AG| = |BD|$ a navíc $AG \perp BD$, je $KLMN$ čtverec. Tím jsou všechna tvrzení úlohy dokázána.

Jiné řešení. Úlohu vyřešíme bez úvahy o otočení. Pro důkaz rovnosti $|AG| = |BD|$ ukážeme, že trojúhelníky ACG a DCB jsou shodné podle věty sus. Skutečně, $|AC| = |DC|$, $|CG| = |CB|$ a $|\sphericalangle ACG| = |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle BCG| = |\sphericalangle ACB| + 90° = |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle DCB|$.

Úsečky AG a BD jako strany shodných trojúhelníků tedy mají stejnou délku. Abychom ověřili, že jsou navíc navzájem kolmé, označíme P jejich průsečík a porovnáme vnitřní úhly v trojúhelnících APQ a DCQ, kde Q je průsečík úseček AC a BD. Při vrcholech A a D jsou úhly shodné díky ověřené shodnosti trojúhelníků ACG a DCB, úhly při vrcholu Q se rovněž shodují (jakožto úhly vrcholové), takže se shodují i jejich úhly při vrcholech P a C, jsou tedy oba pravé.

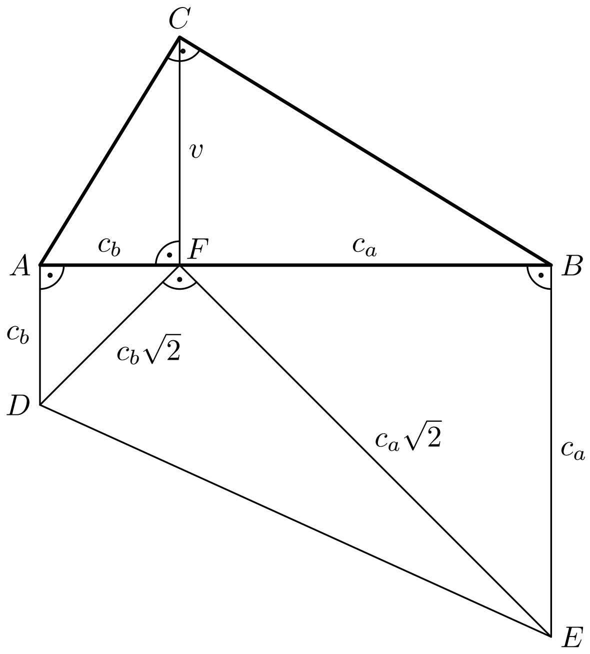
Z dokázané shodnosti i kolmosti úseček AG a BD odvodíme, že $KLMN$ je čtverec stejně jako v původním řešení.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za důkaz shodnosti úseček AG a BD udělte 2 body, za důkaz jejich kolmosti další 2 body. Za dokončení důkazu rovněž 2 body.

2. *Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C, jehož obsah označme P. Nechť F je pata výšky z vrcholu C na přeponu AB. Na kolmicích k přímce AB, které procházejí vrcholy A a B, v polorovině opačné k polorovině ABC uvažujme po řadě body D a E, pro něž platí $|AF| = |AD|$ a $|BF| = |BE|$. Obsah trojúhelníku DEF označme Q. Dokažte, že platí $P \geqq Q$, a zjistěte, kdy nastane rovnost.*

Řešení. Označme úsečky (a jejich délky) ve shodě s obr. 1. Protože DAF a EBF jsou pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky, mají úhly při jejich přeponách velikost 45°, takže $|\sphericalangle DFE| = 90°$ a trojúhelník DEF je pravoúhlý s odvěsnami, jež jsou zároveň přeponami obou rovnoramenných pravoúhlých trojúhelníků. Pro obsahy P a Q obou uvažovaných trojúhelníků proto platí

$$P = \frac{1}{2}(c_a + c_b)v \qquad \text{a} \qquad Q = \frac{1}{2} \cdot c_a\sqrt{2} \cdot c_b\sqrt{2}.$$



Obr. 1

Podle Eukleidovy věty o výšce v daném pravoúhlém trojúhelníku platí $v = \sqrt{c_a c_b}$. K důkazu dané nerovnosti stačí tedy ověřit, že

$$\frac{1}{2}(c_a + c_b)\sqrt{c_a c_b} \geqq \frac{1}{2} \cdot c_a\sqrt{2} \cdot c_b\sqrt{2}.$$

Po snadné (ekvivalentní) úpravě dostaneme

$$c_a + c_b \geqq 2\sqrt{c_a c_b} \qquad \text{neboli} \qquad (\sqrt{c_a} - \sqrt{c_b})^2 \geqq 0.$$

Protože poslední nerovnost očividně platí, je důkaz tvrzení uzavřen. Rovnost přitom nastane, právě když $c_a = c_b$, tj. právě když je daný pravoúhlý trojúhelník ABC rovnoramenný.

Jiné řešení. Stejně jako v prvním řešení vyjdeme ze zřejmého poznatku, že trojúhelník DEF je pravoúhlý. Odvěsny obou uvažovaných pravoúhlých trojúhelníků mají stejné kolmé průměty na přímku AB, přitom

$$|AF| = |AC| \cos\gamma_1 = |DF| \cos 45^\circ, \quad |BF| = |BC| \cos\gamma_2 = |EF| \cos 45^\circ,$$

kde γ_1, γ_2 značí odpovídající části pravého úhlu při vrcholu C, takže $\gamma_2 = 90^\circ - \gamma_1$. Protože $\cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, plyne odtud pro dvojnásobky obou obsahů

$$\begin{aligned} 2P = |AC| \cdot |BC| = |DF| \cdot |EF| \cdot \frac{\cos 45^\circ}{\cos\gamma_1} \cdot \frac{\cos 45^\circ}{\cos\gamma_2} = \\ = 2Q \cdot \frac{1}{2\cos\gamma_1 \sin\gamma_1} = 2Q \cdot \frac{1}{\sin 2\gamma_1} \geqq 2Q. \end{aligned}$$

Rovnost $P = Q$ zřejmě nastane, právě když $\sin 2\gamma_1 = 1$ neboli $\gamma_1 = \gamma_2 = 45^\circ$, tedy právě když je daný trojúhelník ABC rovnoramenný.

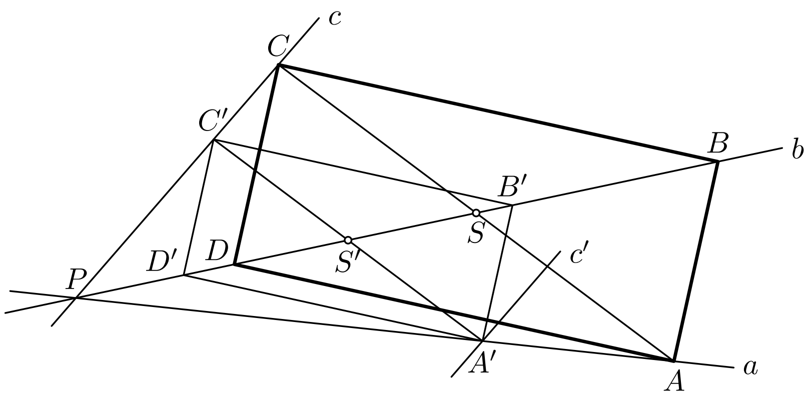
Návodné a doplňující úlohy:

1. Dokažte, že pro každá dvě kladná reálná čísla a, b platí nerovnost $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \geqq 2$.
2. V obdélníku $ABCD$ s délkami stran $|AB| = a, |BC| = b$ označme E patu kolmice spuštěné z vrcholu B na úhlopříčku AC. Určete délky úseček AE, CE, BE. [$|AE| = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $|CE| = \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $|BE| = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$]
3. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB je E pata výšky z vrcholu C, D pata výšky z bodu E na stranu AC a F pata výšky z bodu E na stranu BC. Dokažte, že obsah čtyřúhelníku $CDEF$ je nejvýše roven polovině obsahu trojúhelníku ABC. Kdy nastane rovnost? [Protože trojúhelníky AED a EBF jsou podobné trojúhelníku ABC s koeficienty podobnosti α a $1 - \alpha$, je obsah pravoúhelníku $CDEF$ roven $S - (\alpha^2 + (1-\alpha)^2)S = 2\alpha(1-\alpha)S$, kde S značí obsah daného trojúhelníku ABC. Požadovaná nerovnost je tak ekvivalentní nerovnosti $\alpha(1-\alpha) \leqq \frac{1}{4}$ neboli $(2\alpha - 1)^2 \geqq 0$.]

4. *Jsou dány dvě různoběžky a, c procházející bodem P a bod B, který na nich neleží. Sestrojte pravoúhelník $ABCD$ s vrcholy A, C a D po řadě na přímkách a, c a PB.*

Řešení. Označme S průsečík úhlopříček AC a BD, který má ležet na přímce $b = PB$. Přitom nemůže být $S = P$, protože pak by na přímce a ležel i vrchol C. Taková možnost odporuje zadání.

Zvolíme-li proto na přímce b libovolný bod S', $S' \neq P$, existuje právě jedna stejnolehlost se středem P, která zobrazí bod S na S'. V této stejnolehlosti přejde pravoúhelník $ABCD$ v pravoúhelník $A'B'C'D'$ s průsečíkem úhlopříček S', přitom $A' \in a$, $B', D' \in b$ a $C' \in c$. Protože vrcholy A', C' jsou souměrně sdružené podle zvoleného středu S' (obr. 2), sestrojíme bod A' jako průsečík přímky a s přímkou c', která je souměrně sdružená s přímkou c podle středu S'. Pak už snadno z bodů A', S' určíme bod C' a dále pak – díky pravým úhlům $A'B'C'$ a $A'D'C'$ – najdeme body B', D' jako průsečíky přímky b s Thaletovou kružnicí nad průměrem $A'C'$. Přitom tyto dva průsečíky můžeme označit jako B', D' v libovolném pořadí s výjimkou případu, kdy jeden z průsečíků splyne s bodem P; v takovém případě může být jedině $D' = P$, neboť z $B \neq P$ plyne $B' \neq P$. Nakonec zobrazíme pravoúhelník $A'B'C'D'$ ve „zpětné“ stejnolehlosti, ve které $B' \mapsto B$. Tak dostaneme čtyřúhelník $ABCD$, který má zřejmě všechny požadované vlastnosti.



Obr. 2

Diskuse: Pro zvolený bod $S' \in b$, $S' \neq P$, body A' a C' existují a jsou jediné (přímky a, c' jsou totiž různoběžky a žádná z nich středem souměrnosti S' neprochází). Kružnice nad průměrem $A'C'$ má kladný poloměr, a proto má s přímkou b jdoucí jejím středem S' vždy dva průsečíky. Jsou-li oba různé od bodu P, má úloha dvě řešení. Jeden z těchto dvou průsečíků splyne s bodem P, právě když bude úhel $A'PC'$ pravý, tedy právě když dané přímky a, c budou navzájem kolmé. V takovém případě bude $D' = P$ a úloha bude mít jediné řešení (vrchol D splyne s bodem P).

Návodné a doplňující úlohy:

1. Jsou dány dvě různoběžky a, c a bod S neležící na žádné z nich. Sestrojte čtverec $ABCD$ se středem S tak, aby bod A ležel na přímce a a bod C na přímce c. [Sestrojíme přímku a' jako obraz přímky a ve středové souměrnosti se středem S, průnik přímek a', c dává bod C.]
2. Jsou dány dvě různoběžky a, c, jejichž průsečík P je mimo nákresnu, a bod B neležící na žádné z nich. Sestrojte přímku b procházející body B, P. [Sestrojíme libovolný trojúhelník ABC, kde $A \in a$ a $C \in c$, a pak sestrojíme trojúhelník $A'B'C'$, který bude jeho obrazem v nějaké stejnolehlosti se středem v bodě P.]
3. Je dána úsečka AB. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB tak, aby $|AC| = 2 \cdot |BC|$. [Sestrojíme trojúhelník $A'B'C'$ požadované vlastnosti a pak pomocí stejnolehlosti (např. se středem v jednom z vrcholů) sestrojíme trojúhelník, jehož přepona bude mít délku $|AB|$.]

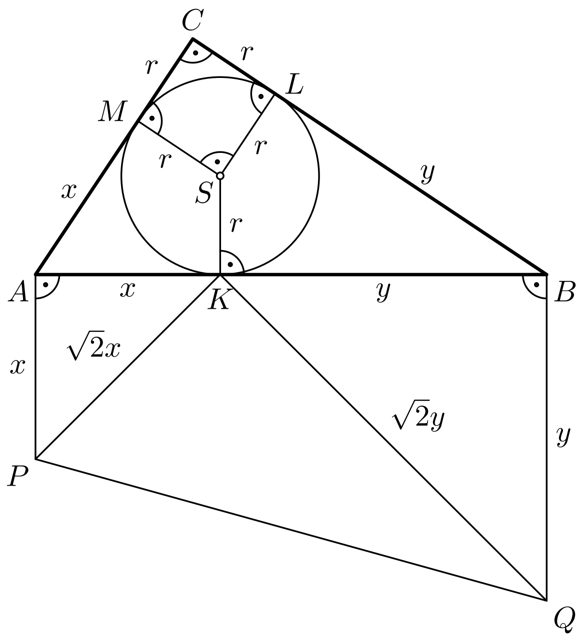
3. Pravoúhlému trojúhelníku ABC je vepsána kružnice, která se dotýká přepony AB v bodě K. Úsečku AK otočíme o 90° do polohy AP a úsečku BK otočíme o 90° do polohy BQ tak, aby body P, Q ležely v polorovině opačné k polorovině ABC.

a) Dokažte, že obsahy trojúhelníků ABC a PQK jsou stejné.

b) Dokažte, že obvod trojúhelníku ABC nepřevyšuje obvod trojúhelníku PQK. Kdy nastane rovnost?

3. a) Označme S střed a r poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC a L, M body dotyku této kružnice postupně se stranami BC, CA (obr. 1). Označíme-li $|AK| = x$, $|BK| = y$, je $|AP| = |AM| = x$, $|KP| = x\sqrt{2}$, $|BQ| = |BL| = y$, $|KQ| = y\sqrt{2}$. Protože oba úhly AKP, BKQ mají velikost 45°, je trojúhelník PQK pravoúhlý, takže jeho obsah je

$$S_{PQK} = \frac{x\sqrt{2} \cdot y\sqrt{2}}{2} = xy.$$



Obr. 1

Čtyřúhelník $SLCM$ je čtverec se stranou délky r a je $|AM| = x$, $|BL| = y$. Obsah trojúhelníku ABC je roven součtu obsahů trojúhelníků ABS, BCS a CAS, tedy

$$S_{ABC} = \frac{(x+y)r + (y+r)r + (x+r)r}{2} = (x+y+r)r.$$

Obsah trojúhelníku ABC je také roven

$$S_{ABC} = \frac{|AC| \cdot |BC|}{2} = \frac{(x+r)(y+r)}{2} = \frac{xy}{2} + \frac{(x+y+r)r}{2} = \frac{xy}{2} + \frac{S_{ABC}}{2}.$$

Odsud dostáváme $S_{ABC} = xy$ neboli $S_{ABC} = S_{PQK}$, což jsme měli dokázat.

b) V trojúhelníku ABC jsou délky stran $a = y + r$, $b = x + r$, $c = x + y$. Obvod trojúhelníku ABC je $a + b + |AB|$, obvod trojúhelníku PQK je $x\sqrt{2} + y\sqrt{2} + |PQ|$.

Zřejmě platí $|AB| \leqq |PQ|$ ($|AB|$ je vzdáleností rovnoběžek AP, BQ, obr. 1). Rovnost nastane jedině v případě $|AP| = |BQ|$ neboli $x = y$.

Ještě dokážeme, že $a + b \leqq x\sqrt{2} + y\sqrt{2}$ neboli že $a + b \leqq c\sqrt{2}$. Poslední nerovnost je ekvivalentní nerovnosti, kterou dostaneme umocněním na druhou, protože obě její strany jsou kladné. Dostaneme tak $a^2 + b^2 + 2ab \leqq 2c^2$. Jelikož v pravoúhlém trojúhelníku ABC platí $a^2 + b^2 = c^2$, máme dokázat nerovnost $2ab \leqq a^2 + b^2$, která je však ekvivalentní nerovnosti $0 \leqq (a - b)^2$. Ta platí pro všechna reálná čísla a, b a rovnost v ní nastane jedině pro $a = b$, tj. $x = y$.

Celkově vidíme, že obvod trojúhelníku ABC je menší nebo roven obsahu trojúhelníku PQK a rovnost nastane, právě když je pravoúhlý trojúhelník ABC rovnoramenný.

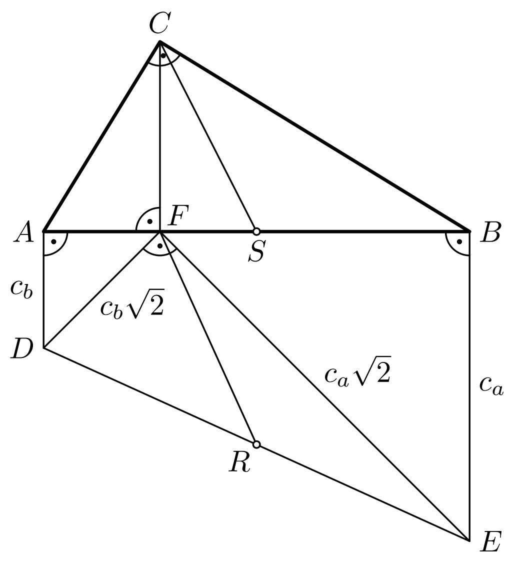
Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za opomenutí podmínky, kdy nastane rovnost, strhněte 2 body. Za pouhé vyšetření rovnosti udělte 1 bod.

2. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Nechť F je pata výšky z vrcholu C na přeponu AB. Na kolmicích k přímce AB, které procházejí vrcholy A a B, jsou v polorovině opačné k polorovině ABC zvoleny po řadě body D a E, pro něž platí $|AF| = |AD|$ a $|BF| = |BE|$. Označme dále R střed úsečky DE. Dokažte, že platí nerovnost $|RF| \geqq |CF|$, a zjistěte, kdy nastane rovnost.

2. Protože DAF a EBF jsou pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky, mají úhly při jejich přeponách velikost 45°, takže trojúhelník DEF je pravoúhlý. Označme S střed úsečky AB (obr. 1). Protože střed přepony pravoúhlého trojúhelníku je zároveň středem jeho opsané kružnice, zřejmě platí $|RF| = \frac{1}{2}|DE|$ a $|CS| = \frac{1}{2}|AB|$. AD a BE jsou dvě rovnoběžné přímky, jejichž vzdálenost je rovna $|AB|$, a proto $|DE| \geqq |AB|$. Platí tedy

$$|RF| = \frac{1}{2}|DE| \geqq \frac{1}{2}|AB| = |CS| \geqq |CF|,$$

což jsme chtěli dokázat.



Obr. 1

Rovnost nastane, právě když $|DE| = |AB|$ a $|CS| = |CF|$, tedy právě když $S = F$ (pak je i $|AD| = |AS| = |BS| = |BE|$ a $|DE| = |AB|$) neboli právě když je trojúhelník ABC rovnoramenný.

Jiné řešení. Označme $c_a = |BF|$ a $c_b = |AF|$. Vzhledem k tomu, že $|AD| = c_b$ a $|BE| = c_a$ (obr. 1), vidíme, že pro délku přepony DE v pravoúhlém trojúhelníku DEF (viz řešení 2. úlohy domácího kola) dostaneme použitím nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro dvojici kladných čísel c_a^2 a c_b^2 a dále Eukleidovy věty o výšce CF v pravoúhlém trojúhelníku ABC odhad

$$|DE| = \sqrt{2(c_a^2 + c_b^2)} \geqq \sqrt{2 \cdot 2c_a c_b} = 2\sqrt{c_a c_b} = 2\,|CF|.$$

Protože v pravoúhlém trojúhelníku DEF platí $|RF| = \frac{1}{2}|DE|$, dostáváme využitím uvedené nerovnosti

$$2\,|RF| = |DE| \geqq 2\,|CF| \quad \text{a odtud} \quad |RF| \geqq |CF|,$$

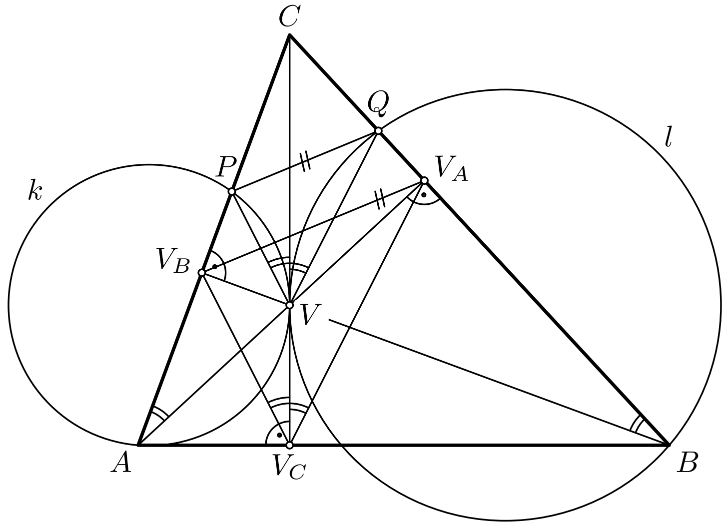
což jsme chtěli dokázat.

Rovnost nastane, právě když se obě průměrované hodnoty c_a^2 a c_b^2 rovnají, tj. když platí $c_a = c_b$, což nastane právě v případě pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ABC.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za opomenutí podmínky, kdy nastane rovnost, strhněte 2 body. Za pouhé uhodnutí, kdy nastane rovnost, udělte 1 bod.

3. *Nechť V je průsečík výšek ostroúhlého trojúhelníku ABC. Přímka CV je společnou tečnou kružnic k a l, které se vně dotýkají v bodě V a přitom každá z nich prochází jedním z vrcholů A a B. Jejich průsečíky s vnitřky stran AC a BC označme P a Q. Dokažte, že polopřímka VC je osou úhlu PVQ a že body A, B, P, Q leží na jedné kružnici.*

Řešení. Označme velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC obvyklým způsobem a V_A, V_B, V_C paty jeho výšek po řadě z vrcholů A, B, C (obr. 1).



Obr. 1

Trojúhelník AV_AC je pravoúhlý a platí $|\sphericalangle VAC| = |\sphericalangle V_AAC| = 90° - \gamma$. Podobně platí i $|\sphericalangle VBC| = |\sphericalangle V_BBC| = 90° - \gamma$. Z rovnosti úsekového a obvodového úhlu pro tětivu PV kružnice k vychází $|\sphericalangle CVP| = |\sphericalangle VAC| = 90° - \gamma$. A obdobně pro tětivu QV kružnice l máme $|\sphericalangle CVQ| = |\sphericalangle VBC| = 90° - \gamma$. Polopřímka VC je tedy osou úhlu PVQ, což jsme chtěli dokázat.

Druhou část tvrzení můžeme dokázat následujícím způsobem. Podle Thaletovy věty leží body V_A a V_C na Thaletově kružnici nad průměrem AC. Z rovnosti obvodových úhlů nad tětivou V_AC této kružnice plyne $|\sphericalangle V_AAC| = |\sphericalangle V_AV_CC| = 90° - \gamma$. Úsečky V_AV_C a QV jsou tedy rovnoběžné, protože svírají s přímkou CV_C stejný úhel. Podobně zjistíme, že i úsečky V_BV_C a PV jsou rovnoběžné. Odtud vidíme, že trojúhelník $V_AV_BV_C$ je obrazem trojúhelníku QPV ve stejnolehlosti se středem v bodě C, která zobrazuje bod V_C na bod V. Proto jsou úsečky V_AV_B a QP rovnoběžné.

Podle Thaletovy věty leží body V_A a V_B na Thaletově kružnici nad průměrem AB, z vlastností tětivového čtyřúhelníku ABV_AV_B tak plyne $|\sphericalangle PQC| = |\sphericalangle V_BV_AC| = \alpha$, $|\sphericalangle QPC| = |\sphericalangle V_AV_BC| = \beta$. Tyto rovnosti už jak známo zaručují, že také čtyřúhelník $ABQP$ je tětivový, tudíž jeho vrcholy leží na jedné kružnici, jak jsme měli dokázat.

Poznámka. Druhá část tvrzení též snadno plyne z vlastností mocnosti bodu ke kružnici: Mocnost bodu C ke kružnici k je rovna $|CV|^2 = |CP| \cdot |CA|$. Podobně mocnost bodu C ke kružnici l je rovna $|CV|^2 = |CQ| \cdot |CB|$. Proto $|CP| \cdot |CA| = |CQ| \cdot |CB|$, což je ekvivalentní s tím, že body A, B, P, Q leží na téže kružnici.

Totéž můžeme formulovat i bez počítání, využijeme-li poznatku o chordálách[1] tří

[1] Chordála dvou kružnic je množina bodů, jež mají k oběma kružnicím stejnou mocnost, což v případě protínajících se kružnic je jejich společná sečna.

kružnic: Označme m kružnici opsanou trojúhelníku ABP. Protože CV je chordálou kružnic k a l a AC chordálou kružnic k a m, je BC chordálou kružnic l a m. Odtud plyne, že kružnice l a m se protínají v bodě Q.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Zopakujte s žáky vztahy mezi obvodovým, středovým a úsekovým úhlem a dokažte je.
2. Nechť V_A, V_B, V_C značí paty výšek po řadě z vrcholů A, B, C v daném ostroúhlém trojúhelníku ABC a V průsečík jeho výšek. Dokažte následující tvrzení:
   a) osa úsečky V_AV_B prochází středem strany AB,
   b) body A, V, V_B, V_C leží na téže kružnici,
   c) bod V je středem kružnice vepsané trojúhelníku $V_AV_BV_C$.

   [a) Podle Thaletovy věty leží body V_A, V_B na kružnici s průměrem AB, osa sečny V_AV_B této kružnice prochází jejím středem, což je střed AB. b), c) Podle Thaletovy věty leží body V_B, V_C na různých polokružnicích s půměrem AV. Podle věty o obvodovém úhlu $|\sphericalangle V_BV_CV| = |\sphericalangle V_BAV| = 90^\circ - \gamma$. Z tětivového čtyřúhelníku BV_AVV_C podobně dostaneme $|\sphericalangle V_AV_CV| = 90^\circ - \gamma$, tedy VV_C je osou úhlu $V_AV_CV_B$. Podobně dokážeme, že VV_A je osou úhlu $V_BV_AV_C$, tedy V je průsečík os vnitřních úhlů trojúhelníku $V_AV_BV_C$.]

D1. V rovině je dán pravoúhlý lichoběžník $ABCD$ s delší stranou AB a pravým úhlem při vrcholu A. Označme k_1 kružnici sestrojenou nad stranou AD jako průměrem a k_2 kružnici procházející vrcholy B, C a dotýkající se přímky AB. Mají-li kružnice k_1, k_2 vnější dotyk v bodě P, je přímka BC tečnou kružnice opsané trojúhelníku CDP. Dokažte. [52–B–II–4]

D2. V rovině je dán rovnoběžník $ABCD$, jehož úhlopříčka BD je kolmá ke straně AD. Označme M ($M \neq A$) průsečík přímky AC s kružnicí o průměru AD. Dokažte, že osa úsečky BM prochází středem strany CD. [56–B–II–3]

D3. Nechť K je libovolný vnitřní bod strany AB daného trojúhelníku ABC. Přímka CK protíná kružnici opsanou trojúhelníku ABC v bodě L ($L \neq C$). Označme k_1 kružnici opsanou trojúhelníku AKL a k_2 kružnici opsanou trojúhelníku BKL.
   a) Dokažte, že přímka AC je tečna kružnice k_1, právě když přímka BC je tečna kružnice k_2.
   b) Předpokládejme, že přímka AC je sečna kružnice k_1. Nechť P ($P \neq A$) je průsečík přímky AC s kružnicí k_1 a Q ($Q \neq B$) průsečík přímky BC s kružnicí k_2. Dokažte, že bod K leží na úsečce PQ.

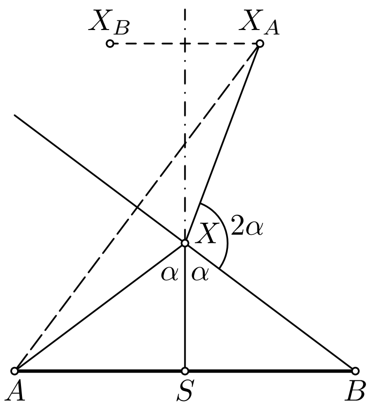
   [53–A–II–3]

5. *V rovině je dána úsečka AB. Pro libovolný bod X této roviny, který je různý od A i B, označme X_A, resp. X_B obraz bodu A, resp. B v osové souměrnosti podle přímky XB, resp. XA. Najděte všechny takové body X, které spolu s body X_A, X_B tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku.*

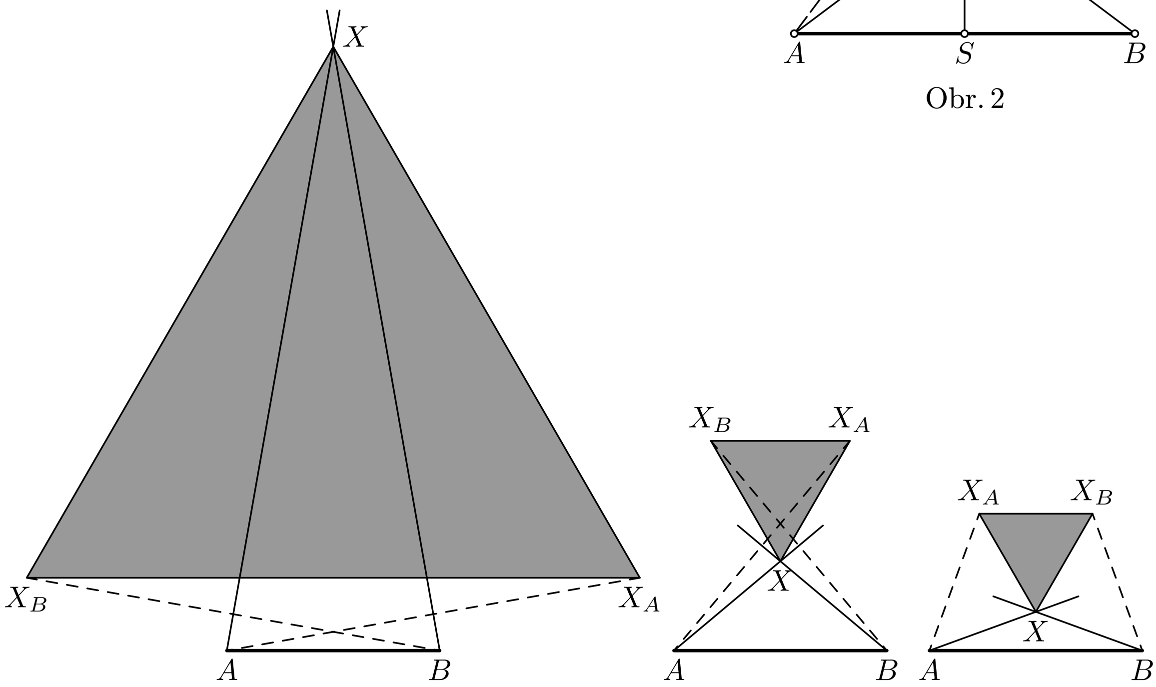
Řešení. Bod X_A je souměrně sdružený s bodem A podle přímky XB, platí tedy $|XX_A| = |XA|$. Podobně platí $|XX_B| = |XB|$. Má-li být trojúhelník XX_AX_B rovnostranný, musí platit $|XX_A| = |XX_B|$ neboli $|XA| = |XX_A| = |XX_B| = |XB|$. Bod X proto nutně leží na ose o úsečky AB. Naopak, leží-li bod X na ose úsečky AB, platí podle rovností z prvních dvou vět řešení $|XX_A| = |XX_B|$. Body X, X_A a X_B pak budou vrcholy rovnostranného trojúhelníku, právě když velikost úhlu X_AXX_B bude $60°$.

Hledaný bod X zřejmě nemůže být středem S úsečky AB, protože pak by bylo $X_A = A$, $X_B = B$ a body X_A, X, X_B by ležely na téže přímce. Hledané body X mohou tudíž ležet na přímce o mimo úsečku AB. Vzhledem ke zřejmé symetrii se dále omezíme jen na body X v jedné z polorovin určených přímkou AB.

Označme α velikost ostrého úhlu AXS (obr. 2), který zřejmě může nabývat libovolné hodnoty z intervalu $(0°, 90°)$. Ze shodnosti orientovaných úhlů AXB a BXX_A plyne, že orientovaný úhel SXX_A pak má velikost 3α. Jak už víme, bod X bude vrcholem rovnostranného trojúhelníku XX_AX_B, právě když bude přímka XX_A svírat s osou o úhel $30°$, což vzhledem k nerovnostem $0° < 3\alpha < 270°$ nastane jedině pro $3\alpha \in \{30°, 150°, 210°\}$ neboli $\alpha \in \{10°, 50°, 70°\}$.



Obr. 2



Obr. 3

Na obr. 3 vidíme všechna tři odpovídající řešení. Jsou to vrcholy rovnoramenných trojúhelníků se základnou AB a úhlem $2\alpha \in \{20°, 100°, 140°\}$ při vrcholu X. Další tři řešení (souměrně sdružená podle přímky AB) existují v opačné polorovině určené přímkou AB.

Návodné a doplňující úlohy:

1. Nechť P je vnitřní bod konvexního úhlu BAC. Označme K a M obrazy bodu P v osových souměrnostech podle přímek AB a AC. Určete velikost úhlu KAM. [$|\sphericalangle KAM| = 2|\sphericalangle BAC|$, když je úhel BAC ostrý nebo pravý, $|\sphericalangle KAM| = 360° - 2|\sphericalangle BAC|$, když je úhel BAC tupý.]
2. Nechť P je vnitřní bod ostroúhlého trojúhelníku ABC s daným obsahem S. Označme K, L a M obrazy bodu P v osových souměrnostech podle přímek AB, BC a CA. Vypočtěte obsah šestiúhelníku $AKBLCM$ a zjistěte, kdy je tento šestiúhelník pravidelný. [Obsah je vždy $2S$, šestiúhelník je pravidelný pouze v případě, kdy je trojúhelník ABC rovnostranný a bod P je jeho těžiště.]
3. Nechť P je libovolný vnitřní bod rovnostranného trojúhelníku ABC. Uvažujme obrazy

K, L a M bodu P v osových souměrnostech s osami AB, BC a CA. Určete množinu všech bodů P takových, že trojúhelník KLM je rovnoramenný. [53–C–I–4]

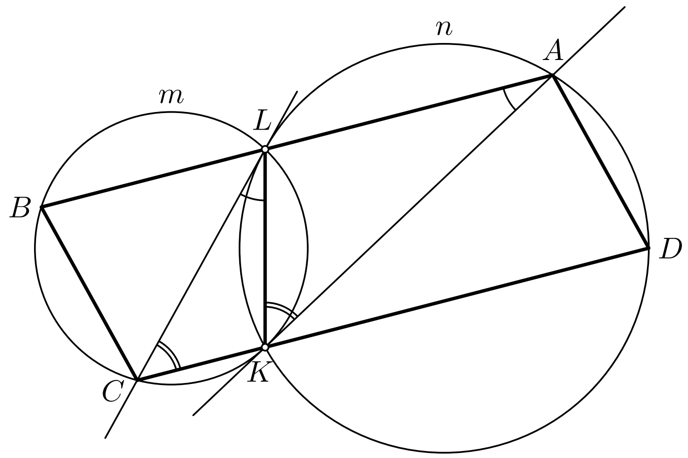
4. Nechť A a B jsou různé body roviny. Dále je dán orientovaný úhel ω ($0^\circ < \omega < 90^\circ$). Pro libovolný bod X označme po řadě X_A, X_B obrazy bodu X v otočeních kolem středů A a B o úhel ω. Určete všechny body X, pro které je trojúhelník XX_AX_B rovnostranný. [48–B–II–4]

D1. Nechť $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník, jehož vnitřní úhel při vrcholu B má velikost 60°.
   a) Jestliže $|BC| = |CD|$, pak platí $|CD| + |DA| = |AB|$. Dokažte.
   b) Rozhodněte, zda platí opačná implikace.

   [53–A–I–5]

4. V rovině jsou dány kružnice m, n, které se protínají v bodech K, L. Tečna v bodě K ke kružnici m protíná kružnici n v bodě $A \neq K$, tečna v bodě L ke kružnici n protíná kružnici m v bodě $C \neq K$. Bod $B \neq L$ je průsečík přímky AL s kružnicí m a bod $D \neq K$ je průsečík přímky CK s kružnicí n. Dokažte, že čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžník.

4. Obvodový úhel KAL a úsekový úhel CLK tětivy KL v kružnici n jsou shodné. Podobně se shodují i obvodový úhel KCL a úsekový úhel AKL tětivy KL v kružnici m. Trojúhelníky AKL a LCK se tak shodují ve dvou vnitřních úhlech, a proto se shodují i ve třetím úhlu. Úhly ALK a LKC jsou tudíž shodné, a proto jsou shodné i jejich doplňky do $180°$, kterými jsou obvodové úhly ADK, resp. LBC v uvažovaných kružnicích. Shodnost úhlů ALK a LKC dokazuje rovnoběžnost přímek AL a CK (tedy přímek AB a CD), která spolu se shodností úhlů ADK a LBC znamená, že i přímky AD a BC jsou rovnoběžné. Čtyřúhelník $ABCD$ je tedy rovnoběžník, což jsme chtěli dokázat.



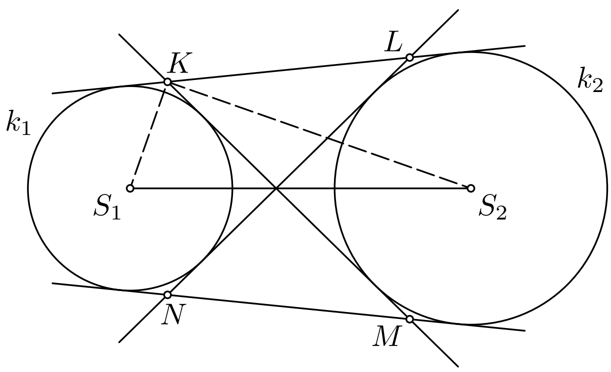
Obr. 1

Poznámka. Jakmile pomocí shodných úhlů ALK a LKC zjistíme, že přímky AB a CD jsou rovnoběžné, můžeme konstatovat, že oba tětivové čtyřúhelníky $ADLK$ a $BLKC$ jsou buď pravoúhelníky, nebo rovnoramenné lichoběžníky se shodnými úhly při základnách. V obou případech to už zřejmě zaručuje rovnoběžnost druhé dvojice přímek AD a BC.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Tvrzení o rovnostech dvojic úhlů KAL, CLK a KCL, AKL oceňte po 1 bodu, za důkaz rovnoběžnosti AB a CD udělte 2 body a za důkaz rovnoběžnosti AD a BC další 2 body.

3. Uvažujme dvě kružnice se středy S_1 a S_2 takové, že jejich společné vnitřní tečny protínají jejich společné vnější tečny ve čtyřech bodech. Dokažte, že tyto čtyři průsečíky leží na Thaletově kružnici nad průměrem S_1S_2.

3. Označme k_1 kružnici se středem S_1 a k_2 kružnici se středem S_2. Průsečíky vnitřních a vnějších tečen označme K, L, M, N (obr. 1).



Obr. 1

Při uvedeném označení jsou přímky KL a KM tečnami jak kružnice k_1, tak kružnice k_2, takže polopřímky KS_1 a KS_2 jsou osami dvou vedlejších úhlů se společným ramenem KM. Velikost úhlu S_1KS_2 je tedy $\frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$, a proto bod K leží na Thaletově kružnici nad průměrem S_1S_2.

Podobným způsobem ukážeme, že na této kružnici leží i body L, M a N. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

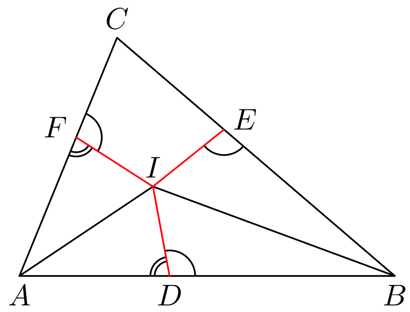
Za úplné řešení udělte 6 bodů. Z toho za konstatování, že KS_1 je osou úhlu s rameny na přímkách KL a KM, udělte 1 bod, za podobné zjištění pro KS_2 udělte 1 bod. Tyto body udělte i v případě, kdy místo bodu K bude uveden některý z bodů L, M, N. Pozor, toto bodovací schéma není aditivní, tj. v případě stejného pozorování pro více bodů K, L, M, N za ně udělte nejvýše 2 body. Za zjištění, že úhel S_1KS_2 (nebo jiný odpovídající úhel) je pravý, udělte 3 body. Za dokončení důkazu udělte 1 bod.

3. *Nechť D je libovolný vnitřní bod strany AB trojúhelníku ABC. Na polopřímkách BC a AC zvolme po řadě body E a F tak, aby platilo $|BD| = |BE|$ a $|AD| = |AF|$. Dokažte, že body C, E, F a střed I kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na téže kružnici.*

Řešení. Pokud některý z takto setrojených bodů E a F splyne s vrcholem C, je tvrzení úlohy triviální. Dále tedy budeme mlčky předpokládat, že tomu tak není a že používané úhly mají smysl.

Nejprve předpokládejme, že body E a F leží postupně na *úsečkách* BC a AC. Protože $|BD| = |BE|$ a bod I leží na ose úhlu ABC, jsou trojúhelníky DBI a EBI shodné podle věty *sus*. Podobně to platí i pro trojúhelníky DAI a FAI, a proto platí (obr. 1)

$$|\sphericalangle IDB| = |\sphericalangle IEB| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle IFA| = |\sphericalangle IDA|. \qquad (1)$$



Obr. 1

Tvrzení úlohy, že body C, E, F a I leží na jedné kružnici, je v takovém případě ekvivalentní tomu, že součet velikostí úhlů CFI a CEI je 180°. S využitím rovností (1) dostáváme

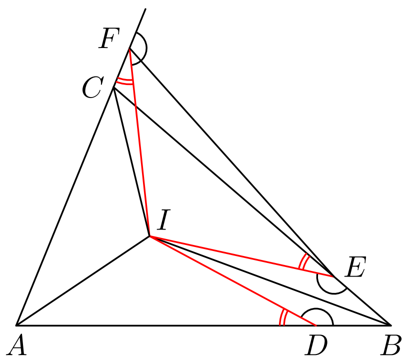
$$|\sphericalangle CFI| = 180° - |\sphericalangle IFA| = 180° - |\sphericalangle IDA| = |\sphericalangle IDB| = |\sphericalangle IEB| = 180° - |\sphericalangle CEI|,$$

tudíž součet protilehlých úhlů ve čtyřúhelníku $CFIE$ je skutečně 180°.

Pokud je jeden z bodů E, F vnitřním a druhý vnějším bodem stran BC a AC, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že bod E leží na úsečce BC a bod F leží na polopřímce opačné k polopřímce CA. Pro takovou polohu bodů C, E, F a I nám stačí ukázat rovnost úhlů IFC a IEC. Znovu využijeme rovnosti (1) a dostaneme obdobně (obr. 2)

$$|\sphericalangle IFC| = |\sphericalangle IFA| = |\sphericalangle IDA| = 180^\circ - |\sphericalangle IDB| = 180^\circ - |\sphericalangle IEB| = |\sphericalangle IEC|,$$

odkud plyne, že úhly IFC a IEC jsou shodné.



Obr. 2

Třetí možnost, že by oba body E i F ležely vně příslušných stran trojúhelníku ABC, zřejmě nemůže nastat. V tom případě by totiž muselo pro jednotlivé délky platit

$$|AB| = |AD| + |BD| = |BE| + |AF| \geqq |BC| + |AC|,$$

což odporuje trojúhelníkové nerovnosti pro strany trojúhelníku ABC.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a K, L, M postupně její body dotyku se stranami BC, AC, AB. Dokažte, že čtyřúhelníky $AMILO$, $BKIM$ a $CLIK$ jsou tětivové. [Čtyřúhelníky mají dva protilehlé úhly pravé.]

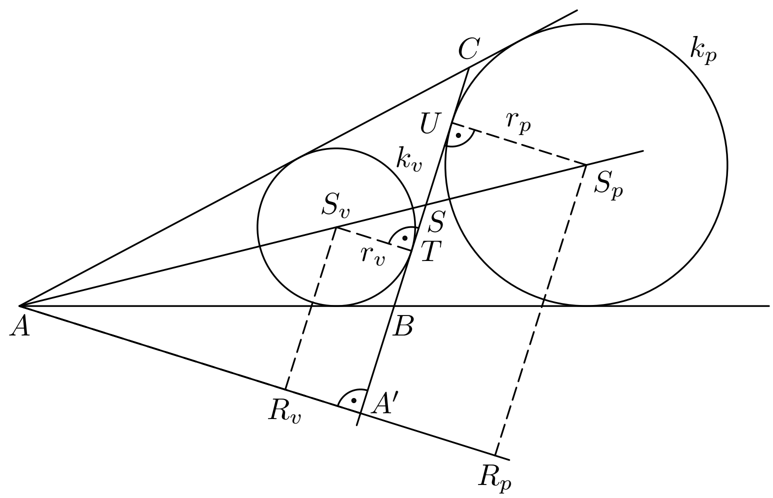
N2. Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a K, L, M postupně její body dotyku se stranami BC, AC, AB. Dokažte, že čtyřúhelníky $AMILO$, $BKIM$ a $CLIK$ jsou deltoidy. [Osy vnitřních úhlů trojúhelníku ABC dělí každý čtyřúhelník na dva shodné pravoúhlé trojúhelníky.]

N3. Dané kružnice k a l se protínají ve dvou bodech B a C. Přímka p se dotýká kružnice k v bodě A. Přímky AB a AC protínají kružnici l postupně v bodech $D \neq B$ a $E \neq C$. Dokažte, že přímky p a DE jsou rovnoběžné. [Využijte úsekový úhel při vrcholu A a obvodové úhly při vrcholech C a D nad tětivou BE. Je potřeba důsledně rozebrat všechny různé polohy bodů B, C, D a E na kružnici l.]

D1. Nechť P je bod na straně BC trojúhelníku ABC. Konstruujme postupně tyto body: Q na straně AB tak, aby $|BQ| = |BP|$, R na straně AC tak, aby $|AR| = |AQ|$, P' na straně BC tak, aby $|CP'| = |CR|$, Q' na straně AB tak, aby $|BQ'| = |BP'|$, R' na straně AC tak, aby $|AR'| = |AQ'|$. Dokažte, že $|CP| = |CR'|$, a to, že body P, Q, R, P', Q' a R' leží na jedné kružnici. [Z volby jednotlivých bodů plynou pro střed I kružnice vepsané rovnosti $|IP| = |IQ| = |IR| = |IP'| = |IQ'| = |IR'|$, takže všechny uvedené body leží na kružnici se středem I. A protože CI je osou rovnoramenného trojúhelníku PIR', je i trojúhelník CPR' rovnoramenný, tudíž $|CP| = |CR'|$.]

5. *V rovině jsou dány body A, T, U tak, že úhel ATU je tupý. Sestrojte trojúhelník ABC, ve kterém T, U jsou po řadě body dotyku strany BC s kružnicí trojúhelníku vepsanou a připsanou. (Kružnicí připsanou tu rozumíme kružnici, která se kromě strany BC dotýká i polopřímek opačných k polopřímkám BA a CA.)*

Řešení. Označme $k_v(S_v; r_v)$ kružnici vepsanou hledanému trojúhelníku ABC a $k_p(S_p; r_p)$ kružnici připsanou jeho straně BC. Středy S_v a S_p leží na ose úhlu BAC, jejíž průsečík se stranou BC ještě označíme S. Přímky AB, AC a BC jsou společnými tečnami kružnic k_v a k_p, které jsou tudíž stejnolehlé podle středů A a S (obr. 3). Bod S



Obr. 3

je přitom středem vnitřní stejnolehlosti, v níž si odpovídají rovněž body T a U dotyku kružnic k_v a k_p s úsečkou BC. Podle zadání je ovšem $T \neq U$ (předpokládá se totiž existence úhlu ATU), takže střed S vnitřní stejnolehlosti kružnic k_v, k_p je tím bodem úsečky TU, který ji dělí v poměru $r_v : r_p$, a ten je podle vnější stejnolehlosti roven poměru $|AS_v| : |AS_p|$. Platí tedy

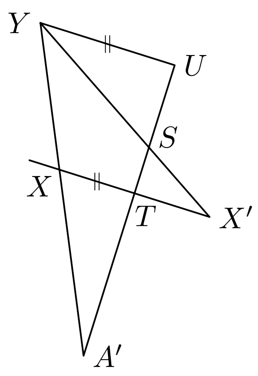
$$\frac{|ST|}{|SU|} = \frac{|AS_v|}{|AS_p|}.$$

Označme nyní A' kolmý průmět bodu A na přímku BC a R_v a R_p kolmé průměty středů S_v a S_p na přímku AA'. Protože A, S_v, S, S_p je pořadí bodů na jedné přímce, mají jejich kolmé průměty na přímky BC a AA' pořadí A', T, S, U, respektive A, R_v, A', R_p (obr. 3).[2] Z pravoúhelníků $S_vR_vA'T$ a $S_pR_pA'U$ zřejmě plyne

$$\frac{|A'T|}{|A'U|} = \frac{|R_vS_v|}{|R_pS_p|} = \frac{|AS_v|}{|AS_p|}.$$

Porovnáním odvozených rovností dostaneme úměru $|ST| : |SU| = |A'T| : |A'U|$. Podle ní neznámý bod S dělí zadanou úsečku TU v poměru určeném bodem A', jehož polohu na polopřímce UT vně úsečky UT známe. A jakmile sestrojíme bod S, můžeme sestrojit i střed S_v, který leží na přímce AS a na kolmici k přímce TU vedené bodem T. Vrcholy B a C pak získáme jako průsečíky tečen z vrcholu A ke kružnici $k_v(S_v; r_v{=}|S_vT|)$ s přímkou TU.

K sestrojení bodu S využijeme např. následující postup (obr. 4): V polorovině TUA



Obr. 4

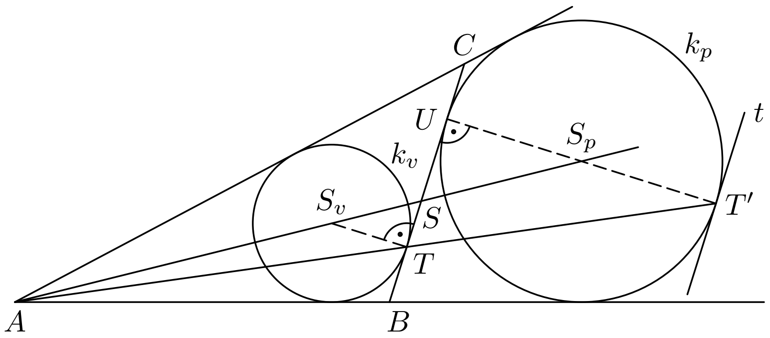
zvolme nějaký bod Y a k němu uvnitř úsečky $A'Y$ sestrojme bod X tak, aby úsečky TX, UY byly stejnolehlé podle středu A'. Označme X' bod souměrně sdružený s bodem X podle středu T. Průsečík přímek TU a $X'Y$ je pak hledaným bodem S, neboť je středem stejnolehlosti úseček TX' a UY, takže podle obou zmíněných stejnolehlostí platí

$$\frac{|ST|}{|SU|} = \frac{|TX'|}{|UY|} = \frac{|TX|}{|UY|} = \frac{|A'T|}{|A'U|}.$$

Díky podmínce tupého úhlu ATU padne bod S_v výše uvedenou konstrukcí na přímku AS do polohy mezi body A a S, tudíž celá úloha bude mít jediné řešení (nehledíme-li na možnost prohodit označení vrcholů B a C).

[2] Všimněme si, že z pořadí bodů A', T, U a kolmosti $AA' \perp TU$ plyne, že úhel ATU je tupý (bez této podmínky by úloha neměla řešení).

Jiné řešení. Použijeme stejné označení jako v předešlém řešení. Ve stejnolehlosti se středem v bodě A a koeficientem r_p/r_v se bod $T \in k_v$ zobrazí do bodu $T' \in k_p$ (obr. 5).



Obr. 5

Z vlastnosti použité stejnolehlosti víme, že tečna t ke kružnici k_p vedená bodem T' je rovnoběžná s tečnou ke kružnici k_v vedenou bodem T, což je přímka BC. Přímka S_pU je tedy kolmá nejen na přímku TU, ale i na tečnu t, takže úsečka $T'U$ je průměrem kružnice k_p. Odtud plyne následující *konstrukce*:

1. Bod T' je průsečíkem přímky AT a kolmice z bodu U na přímku UT. Protože úhel ATU je tupý, leží bod T' v opačné polorovině určené přímkou TU než bod A.
2. Kružnice k_p je kružnice s průměrem UT'.
3. Body B a C jsou průsečíky tečen z bodu A ke kružnici k_p s přímkou TU.

Úloha má jediné řešení.

Návodné a doplňující úlohy:

Zopakujte si učebnicové poznatky o stejnolehlosti dvou kružnic a jejím užití při konstrukci společných tečen.

N1. Do pásu určeného dvěma rovnoběžkami $p \parallel q$, $p \neq q$, vepišme kružnici tak, že se dotýká obou přímek. Dokažte, že poloměr kružnice je polovinou vzdálenosti přímek p a q. [Průměr kružnice, který je kolmý na přímku p, ma délku rovnou vzdálenosti rovnoběžek p a q.]

N2. Je dán trojúhelník ABC. Dokažte, že bod A, střed kružnice trojúhelníku ABC vepsané a střed kružnice připsané ke straně BC leží v přímce. [Ta přímka je osou úhlu BAC.]

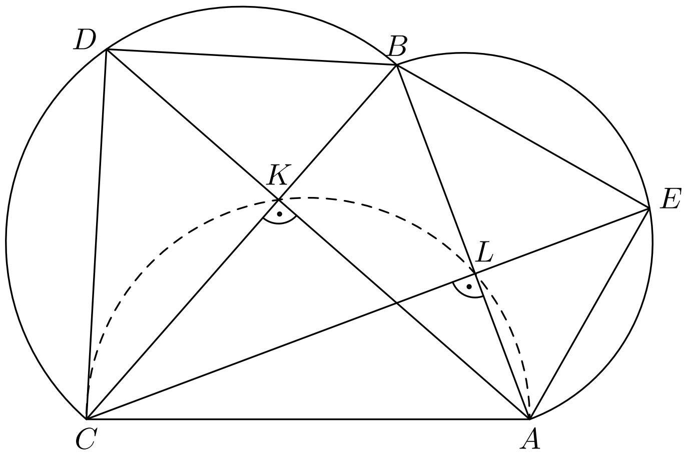
N3. Na úsečce AB sestrojte bod X tak, aby platilo $|AX| : |BX| = p$, kde $p > 0$ je dané číslo. [Na kolmici k přímce AB bodem A sestrojte bod C tak, aby $|AC| = p$, a na kolmici k přímce AB bodem B sestrojte bod D tak, aby $|BD| = 1$, přičemž body C a D leží v opačných polorovinách určených přímkou AB. Bod X je průsečík AB a CD.]

D1. Je dán lichoběžník $ABCD$, $AB \parallel CD$. Dokažte, že průsečík P jeho úhlopříček AC a BD leží na spojnici středů stran AB a CD. [Průsečík úhlopříček je střed stejnolehlosti obou základen, takže jejich středy si musejí odpovídat.]

D2. Označme r poloměr kružnice vepsané trojúhelníku ABC. Její tečny rovnoběžné se stranami daného trojúhelníku z něj vytínají tři menší podobné trojúhelníky, poloměry jim vepsaných kružnic označíme r_a, r_b a r_c. Dokažte rovnost $r_a + r_b + r_c = r$. [Tibor Fonód, Milan Maxian: *Geometrické perličky*, úloha 3.10. Při vhodném označení poloměrů bude příslušný poměr podobnosti $r_a/r = (v_a - 2r)/v_a$, kde v_a značí velikost výšky trojúhelníku ABC na stranu a, a podobně pro strany b a c. Požadovanou rovnost pak dostaneme z následujících rovností pro obsah S trojúhelníku ABC: $2S = a \cdot v_a = b \cdot v_b = c \cdot v_c = r(a + b + c)$.]

3. Nad stranami BC a AB ostroúhlého trojúhelníku ABC jsou vně sestrojeny polokružnice k a l. Označme postupně D a E průsečíky výšek z vrcholů A a C s polokružnicemi k a l (výškami rozumíme přímky). Dokažte, že platí $|BE| = |BD|$.

3. Označme paty výšek z vrcholů A a C na strany daného trojúhelníku postupně K a L (obr. 1). Z Eukleidovy věty o odvěsně v pravoúhlém trojúhelníku BCD víme, že $|BD|^2 = |BK| \cdot |BC|$. Podobně pro pravoúhlý trojúhelník ABE máme $|BE|^2 = |BL| \cdot |BA|$. Trojúhelníky ACK a ACL jsou pravoúhlé s přeponou AC, a proto body K a L leží na kružnici s průměrem AC. Mocnost bodu B k této kružnici je $|BK| \cdot |BC| = |BL| \cdot |BA|$, a tak spojením s důsledky Eukleidových vět dostáváme $|BD|^2 = |BK| \cdot |BC| = |BL| \cdot |BA| = |BE|^2$, a tedy $|BE| = |BD|$.



Obr. 1

Jiné řešení. Při označení pat výšek jako v prvním řešení (obr. 1) z Pythagorových vět v trojúhelnících BAK, BDK, CAK a CDK dostaneme

$$\begin{aligned}|BD|^2 - |BA|^2 &= (|DK|^2 + |BK|^2) - (|AK|^2 + |BK|^2) = |DK|^2 - |AK|^2 = \\ &= (|DK|^2 + |CK|^2) - (|AK|^2 + |CK|^2) = |CD|^2 - |CA|^2.\end{aligned}$$

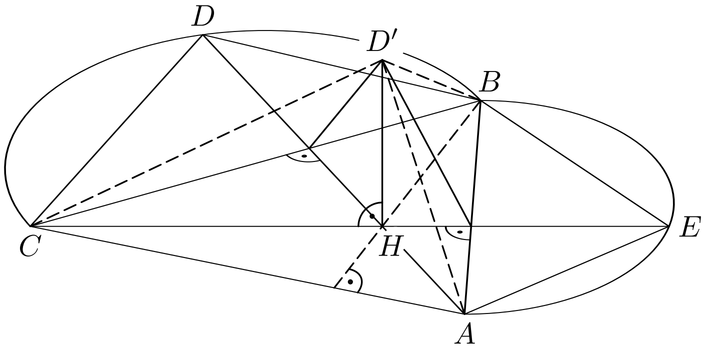
Navíc z pravoúhlého trojúhelníku BCD víme, že $|CD|^2 = |BC|^2 - |BD|^2$. Dosazením do předchozí rovnosti po úpravě dostaneme

$$\begin{aligned}|BD|^2 &= |BA|^2 + |CD|^2 - |CA|^2 = |BA|^2 + (|BC|^2 - |BD|^2) - |CA|^2, \\ 2|BD|^2 &= |BA|^2 + |BC|^2 - |CA|^2, \\ |BD| &= \sqrt{\frac{|BA|^2 + |BC|^2 - |CA|^2}{2}}.\end{aligned}$$

Velikost $|BE|$ dostaneme ze symetrie záměnou bodů $C \leftrightarrow A$ a $D \leftrightarrow E$, takže

$$|BE| = \sqrt{\frac{|BC|^2 + |BA|^2 - |AC|^2}{2}} = |BD|.$$

Jiné řešení. Označme H průsečík výšek trojúhelníku ABC. Otočme trojúhelník BCD v prostoru okolo přímky BC do polohy BCD' tak, aby rovina BHD' byla kolmá k rovině ABC, tedy tak, aby kolmý průmět přímky BD' do roviny ABC splýval s výškou z vrcholu B v trojúhelníku ABC (obr. 2). Protože DA je výškou trojúhelníku ABC, je rovina AHD' kolmá k rovině ABC, takže přímka HD' (průsečnice rovin BHD' a AHD') je kolmá k rovině ABC.



Obr. 2

Přímka BD' je kolmá ke přímce AC i na přímku CD' (úhel $BD'C$ se shoduje s pravým úhlem BDC nad průměrem BC) — je tedy kolmá k rovině ACD'. Pak je ovšem pravý i úhel $AD'B$. Bod D' leží v rovině CHD' kolmé k rovině ABC, přičemž přímka $CH = CE$ je výškou trojúhelníku ABC. Přesně tyto vlastnosti má i bod E' trojúhelníku BAE', který vznikne otočením pravoúhlého trojúhelníku BAE kolem přímky BA tak, aby rovina BHE' byla kolmá k rovině ABC. Body D' a E' tudíž splývají, a proto $|BD| = |BD'| = |BE'| = |BE|$.

Jiné řešení. Označme H průsečík výšek trojúhelníku ABC a K, M a L paty výšek postupně z vrcholů A, B a C. Stejně jako v druhém řešení opakovaným využitím Pythagorovy věty dostáváme

$$\begin{aligned}
&|BD|^2 - |BE|^2 = \\
&\quad = (|BD|^2 - |BH|^2) + (|BH|^2 - |BE|^2) = \\
&\quad = \big((|KD|^2 + |BK|^2) - (|BK|^2 + |HK|^2)\big) + \big((|HL|^2 + |BL|^2) - (|BL|^2 + |LE|^2)\big) = \\
&\quad = (|KD|^2 - |HK|^2) + (|HL|^2 - |LE|^2) = \\
&\quad = \big((|KD|^2 + |CK|^2) - (|CK|^2 + |HK|^2)\big) + \big((|HL|^2 + |AL|^2) - (|AL|^2 + |LE|^2)\big) = \\
&\quad = (|CD|^2 - |CH|^2) + (|AH|^2 - |AE|^2) = \\
&\quad = |CD|^2 + |AH|^2 - |CH|^2 - |AE|^2 = \\
&\quad = |CD|^2 + (|AM|^2 + |MH|^2) - (|MH|^2 + |CM|^2) - |AE|^2 = \\
&\quad = |CD|^2 + |AM|^2 - |CM|^2 - |AE|^2 =
\end{aligned}$$

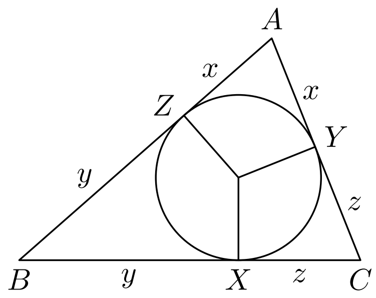
$$
\begin{aligned}
&= |CD|^2 + (|AB|^2 - |BM|^2) - (|BC|^2 - |BM|^2) - |AE|^2 = \\
&= (|BC|^2 - |BD|^2) + |AB|^2 - |BC|^2 - (|AB|^2 - |BE|^2) = \\
&= -|BD|^2 + |BE|^2,
\end{aligned}
$$

odkud plyne $2|BD|^2 = 2|BE|^2$, a tudíž $|BE| = |BD|$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Pokud student postupuje podle prvního řešení, tak za využití Eukleidovy věty o odvěsně udělte 3 body a za využití mocnosti bodu ke kružnici nad průměrem BC rovněž 3 body.

3. Na přímce a, na níž leží strana BC trojúhelníku ABC, jsou dány body dotyku všech tří mu připsaných kružnic (body B a C nejsou známy). Najděte na této přímce bod dotyku kružnice vepsané.

3. V daném trojúhelníku ABC označme X, Y, Z body dotyku vepsané kružnice s jeho stranami a $x = |AY| = |AZ|$, $y = |BX| = |BZ|$, $z = |CX| = CY|$ shodné úseky tečen k vepsané kružnici z jednotlivých vrcholů (obr. 1). Označíme-li obvyklým



Obr. 1

způsobem a, b, c délky jednotlivých stran, platí

$$a = y + z, \quad b = z + x, \quad c = x + y.$$

Sečtením těchto tří rovnic dostaneme (pomocí s jako obvykle značíme poloviční obvod trojúhelníku)

$$2s = a + b + c = 2x + 2y + 2z,$$

takže nám vyjde

$$x + y + z = s, \quad x = s - a, \quad y = s - b, \quad z = s - c. \tag{1}$$

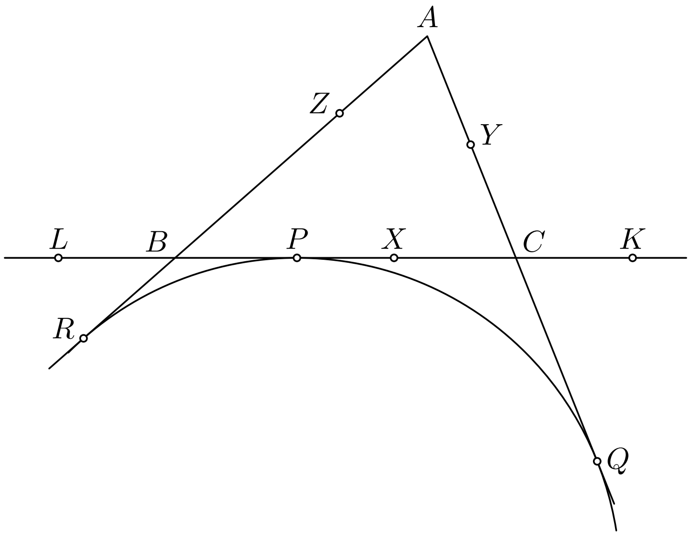
Podívejme se nyní na připsanou kružnici trojúhelníku ABC, jež se dotýká jeho strany BC v bodě P a polopřímek AB a AC v bodech R a Q (obr. 2). Ze shodnosti úseků příslušných tečen k této kružnici máme

$$|AR| = |AQ|, \quad |BR| = |BP|, \quad |CP| = |CQ|,$$

odkud vychází

$$\begin{aligned} 2|AR| = |AR| + |AQ| &= |AB| + |BR| + |AC| + |CQ| = \\ &= |AB| + |BP| + |AC| + |CP| = a + b + c = 2s \end{aligned}$$

neboli $|AR| = |AQ| = s$. Z této rovnosti ovšem plyne, že $|BP| = |BR| = s - c$, což je podle (1) zároveň délka z úsečky CX, tedy $|BP| = |CX|$. To znamená, že body P a X jsou souměrně sdruženy podle středu úsečky BC.



Obr. 2

Analogicky bychom odvodili rovnosti $|BK| = s$ a $|CL| = s$ pro body dotyku K a L kružnic připsaných stranám CA a AB (obr. 2) trojúhelníku ABC s přímkou a. Z těchto posledních rovností ovšem vidíme, že $|BL| = s - a = |CK|$, tudíž i body K a L jsou souměrně sdruženy podle středu úsečky BC.

Body K a L jsou známy (ze tří daných bodů na přímce jsou ty dva krajní), známe tedy i střed S strany BC (je to střed úsečky KL) a bod X najdeme jako obraz třetího daného bodu P ve středové souměrnosti podle středu S.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za určení středu strany BC pomocí souměrně sdružených bodů dotyku kružnic připsaných ostatním dvěma stranám. Tři body rovněž udělte za poznatek, že také body dotyku připsané a vepsané kružnice na jedné straně trojúhelníku jsou souměrně sdruženy podle středu strany. Za pouhé odvození všech vzdáleností bodů dotyku od vrcholů B a C bez nalezení konstrukce udělte 4 body.

2. *Najděte všechny trojúhelníky ABC, pro které platí $a + v_a = b + v_b$ při obvyklém označení stran a výšek trojúhelníku.*

Řešení. Pro obsah S trojúhelníku ABC platí

$$S = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2}. \tag{1}$$

Po dosazení do dané rovnosti dostaneme rovnost $a + \dfrac{2S}{a} = b + \dfrac{2S}{b}$. Jednoduchou úpravou odtud dále plyne $a - b = 2S\,\dfrac{a-b}{ab}$, neboli $(a-b)(ab-2S) = 0$. Je tedy buď $a = b$ (a tedy $v_a = v_b$), nebo $S = \dfrac{ab}{2}$ (tj. $v_a = b$, úhel ACB je pravý a $v_b = a$). Snadno se přesvědčíme, že oba případy vyhovují.

Podmínce úlohy vyhovují všechny rovnoramenné trojúhelníky se základnou AB a všechny pravoúhlé trojúhelníky s přeponou AB (a žádné jiné).

Návodné úlohy:

1. Určete všechny trojúhelníky ABC, pro jejichž obsah S platí $8S^2 = b^2c^2$.
2. Určete všechny trojúhelníky ABC, v nichž pro velikosti stran a výšek platí

$$\text{a) } a + \frac{1}{v_a} = c + \frac{1}{v_c}; \qquad \text{b) } a + \frac{1}{v_c} = c + \frac{1}{v_a}.$$

[a) $a = c$; b) $a = c$ nebo $S = \frac{1}{2}$.]

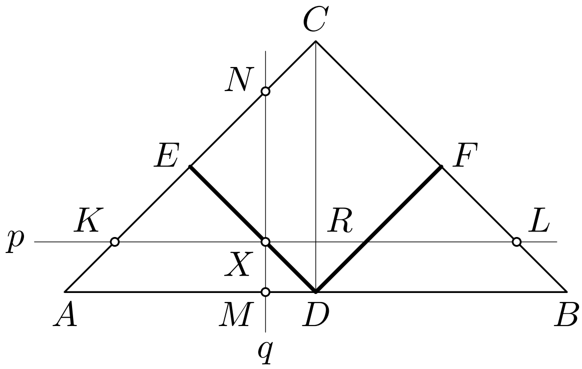
Rozšiřující úloha:

Je dáno přirozené číslo n. Určete všechny trojúhelníky ABC, pro něž platí

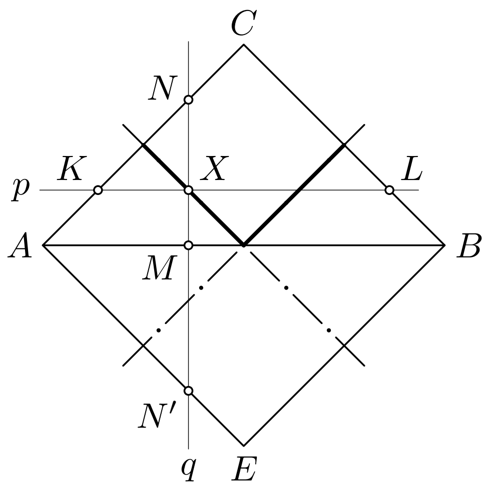
$$a^n + v_a^n = c^n + v_c^n.$$

[Jedině trojúhelníky, v nichž $a = c$, anebo jež mají pravý úhel při vrcholu B.]

4. *Uvnitř daného pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ABC s přeponou AB zvolíme libovolně bod X. Sestrojíme přímky p a q, které procházejí bodem X tak, že $p \parallel AB$ a $q \perp AB$. Trojúhelník ABC vytíná na přímce p úsečku KL, na přímce q úsečku MN. Určete všechny body X, pro které platí $|KL| = 2 \cdot |MN|$.*



Obr. 1



Obr. 2

Řešení. Označme R průsečík přímky p s výškou CD trojúhelníku ABC (obr. 1) a M průsečík přímky q s přeponou AB. Předpokládejme, že bod N leží na straně AC (případ, kdy leží na straně BC, vyřešíme díky souměrnosti trojúhelníku ABC podle osy CD analogicky). Protože $|KL| = 2 \cdot |RC|$, požadovaná rovnost $|KL| = 2 \cdot |MN|$ platí, právě když $|RC| = |MN|$, tj. právě když $MR \parallel NC$, tj. právě když $MDRX$ je čtverec. Proto DX je osa úhlu ADC kolmá na AC, a tedy X leží uvnitř úsečky DE, kde E je střed strany AC, neboli uvnitř střední příčky trojúhelníku ABC rovnoběžné s BC. Z uvedeného je jasné, že každý vnitřní bod této příčky vyhovuje zadání (krajní body D a E nevyhovují, protože nás zajímají jen body X uvnitř trojúhelníku ABC). Obdobně pro bod N na straně BC dostaneme vnitřek střední příčky DF (obr. 1).

Odpověď: Hledanou množinu tvoří všechny vnitřní body dvou středních příček trojúhelníku ABC, jež jsou rovnoběžné s jeho odvěsnami.

Jiné řešení. Trojúhelník ABC doplňme na čtverec $AEBC$ (obr. 2). Hledáme ty body X uvnitř trojúhelníku ABC, pro něž popsané přímky p a q vytínají na čtverci $AEBC$ dvě shodné úsečky KL a NN'. Pak ale musí být trojúhelníky KLC a $N'NA$ dva shodné rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky, to znamená, že přímky p a q jsou souměrně sdružené podle osy strany AC čtverce, tj. bod X leží na této ose. Podobně pro bod N ležící na straně BC dostaneme, že bod X musí ležet na ose strany BC.

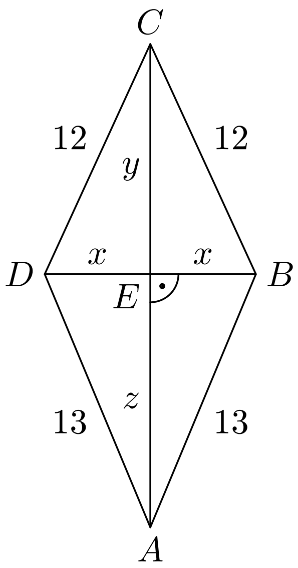
Návodné úlohy:

1. Nechť S je střed strany AB rovnostranného trojúhelníku ABC se stranou $a = |BC| = 10\,\mathrm{cm}$. Označme X takový bod trojúhelníku ABC, který je od přímek CS a AB vzdálený po řadě $2\,\mathrm{cm}$ a $3\,\mathrm{cm}$. Veďme bodem X rovnoběžky s AB a CS. Ty protnou obvod trojúhelníku ABC ve čtyřech bodech. Vypočítejte obsah čtyřúhelníku určeného těmito čtyřmi body. [$(15\sqrt{3} - 9)\,\mathrm{cm}^2$]
2. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC a jeho libovolný bod X. Bodem X veďme přímku kolmou na AC a její průsečík se stranou AC označme M. Její druhý průsečík s obvodem trojúhelníku ABC označme N. Popište všechny ty body X, pro něž platí $|MX| = |NX|$. [Sjednocení úseček AU a CU, kde U je střed výšky z vrcholu B na stranu AC.]

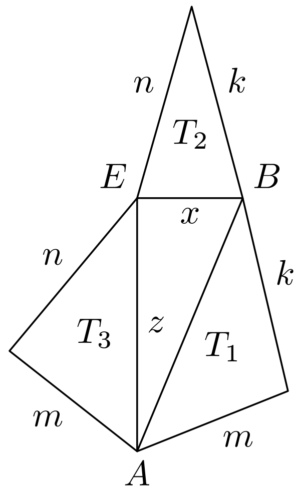
6. *Sestrojte deltoid se stranami* 12 *cm a* 13 *cm, který je svými úhlopříčkami rozdělen na čtyři trojúhelníky, jež jsou čtyřmi stěnami nějakého čtyřstěnu. Zhotovte papírový model tohoto čtyřstěnu.*

Řešení. Na obr. 3 je znázorněn výchozí deltoid, na obr. 4 síť odpovídajícího čtyřstěnu. Z pravoúhlých trojúhelníků plynou pro úseky x, y a z úhlopříček deltoidu nerovnosti

$$12 > x, \qquad 12 > y, \qquad 13 > z > y. \tag{$*$}$$



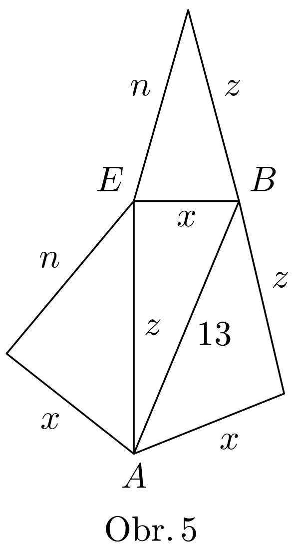
Obr. 3



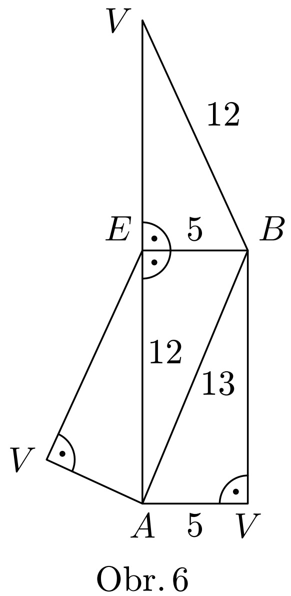
Obr. 4

Nutně tedy musí být trojúhelník T_1 shodný s trojúhelníkem AED (AB a AD jsou nejdelší ze všech stran uvažovaných trojúhelníků). Mohou nastat dva případy:

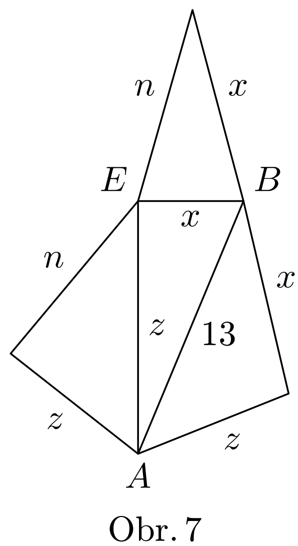
a) Nechť $k = z$ a $m = x$ (obr. 5). V tom případě se musí shodovat trojúhelníky se stranami x, y, 12 a x, z, n. Protože $y < z$, musí být $n = y$ a $z = 12$. Potom $x = \sqrt{13^2 - z^2} = 5$.



Obr. 5



Obr. 6



Obr. 7

Síť pak bude mít tvar uvedený na obr. 6 a kýžený čtyřstěn $AEBV$ zřejmě existuje: dostaneme ho tak, že trojúhelník AEV otočíme kolem přímky AE o 90° (tělesová výška z vrcholu V bude ležet ve stěně AVE).

Konstrukce odpovídajícího deltoidu je zřejmá, např.

1. $\triangle ABE$; podle věty sss: $|AB| = 13\,\mathrm{cm}$, $|BE| = 5\,\mathrm{cm}$ a $|EA| = 12\,\mathrm{cm}$.
2. $\triangle EBC$; podle věty Ssu: $|\sphericalangle CEB| = 90^\circ$, $|BC| = 12\,\mathrm{cm}$ a $C \notin \overrightarrow{EA}$.
3. D; E je střed úsečky DB.

b) Nechť $k = x$ a $m = z$ (obr. 7). Pak se ale musí rovnoramenné trojúhelníky o stranách z, z, n a x, x, n shodovat s pravoúhlým trojúhelníkem s odvěsnami x, y a přeponou 12. Odtud plyne $x = y = z$ a $m = n = 12$, což je ve sporu s nerovnostmi $(*)$.

Úloha má tedy jediné řešení popsané v části a).

Návodné úlohy:

1. Na nitce je zavěšeno kmitající závaží. Šířka rozkmitu je 56 cm, výškový rozdíl mezi nejnižší a nejvyšší polohou závaží je 8 cm. Vypočítejte délku r závěsu. [$r = 53\,\mathrm{cm}$]
2. Řešte původně zadanou úlohu (pro deltoid) pro a) čtverec se stranou 12 cm, b) obdélník se stranami 12 cm a 13 cm, c) kosočtverec se stranou 12 cm, d) kosodélník se stranami 12 cm a 13 cm.

Rozšiřující úlohy:

1. Jeník rozřezal konvexní papírový mnohostěn na jednotlivé stěny (podél hran) a poslal je Františkovi. Františk opět z těchto stěn slepil konvexní mnohostěn. Je možné, že Janův a Františkův mnohostěn nebyly shodné? [Uvažte např. těleso, které dostanete spojením dvou shodných jehlanů s pravidelnou podstavou, které však nejsou pravidelné (kolmý průmět jejich vrcholu nepadne do středu podstavy).]
2. Nad stranami ostroúhlého trojúhelníku ABC jsou zvnějšku sestrojeny půlkružnice. Označme po řadě K, L, M průsečíky prodloužených výšek trojúhelníku z vrcholů A, B, C s těmito půlkružnicemi. Dokažte, že obrazec $AMBKCL$ tvoří plášť čtyřstěnu (trojbokého jehlanu s podstavou ABC). [46–B–I–6]

2. Je dán rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Najděte všechny body X tohoto trojúhelníku s následující vlastností: Vedeme-li bodem X přímku rovnoběžnou s AB a přímku kolmou na AB, vytne na nich trojúhelník ABC dvě shodné úsečky.

4. Najděte všechny lichoběžníky $ABCD$ se základnami AB a CD, pro které platí: $|AB| = 6\,\mathrm{cm}$, $|CD| = 4\,\mathrm{cm}$ a

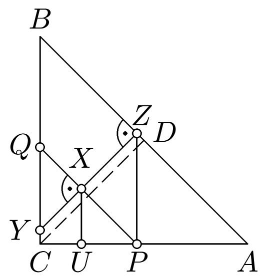
$$|BC| + d_A = |AD| + d_B = |AB| + v,$$

kde v značí výšku lichoběžníku, d_A vzdálenost bodu A od přímky BC a d_B vzdálenost bodu B od přímky AD.

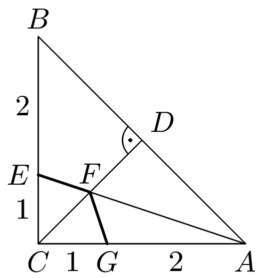
2. Označme D střed strany AB. Předpokládejme nejprve, že bod X leží uvnitř trojúhelníku BCD nebo na jeho hranici. K bodu X sestrojme odpovídající úsečky popsané v úloze a jejich koncové body označme P, Q, Y, Z (obr. 1). Trojúhelník QXY je zřejmě pravoúhlý a rovnoramenný, tedy $|XY| = |XQ|$. Aby bylo $|YZ| = |PQ|$, musí být $|ZX| = |XP|$, tedy trojúhelník ZXP musí být rovněž pravoúhlý a rovnoramenný. V tom případě je také $ZP \parallel BC$. Označme dále U patu kolmice z bodu X na AC. Zřejmě $2|UP| = 2|XU| = \sqrt{2}|XP| = |ZP| = |PA|$. Má-li tedy bod X mít požadovanou vlastnost, musí být

$$\frac{|XU|}{|UA|} = \frac{1}{3}.$$

Tím je jednoznačně určen úhel XAC, proto všechny vyhovující body v trojúhelníku BCD leží na přímce. Její průsečík s BC je zřejmě bod E takový, že $2|CE| = |EB|$. Označme dále F průsečík přímky EA s výškou CD.



Obr. 1



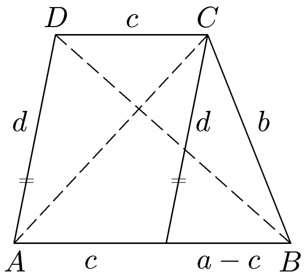
Obr. 2

Obdobnou úvahou pro trojúhelník ACD zjistíme, že v tomto trojúhelníku mohou vyhovovat jen body patřící úsečce FG, kde G je takový bod strany AC, že $2|CG| = |GA|$ (obr. 2).

Ukážeme, že naopak každý bod X lomené čáry EFG má požadovanou vlastnost: Pro libovolný bod $X \in EF$ (případ $X \in FG$ je obdobný) stačí podle předchozího dokázat rovnost $|XP| = |XZ|$, kde body $Z \in AB$ a $P \in AC$ jsou stejně jako předtím takové, že $XP \parallel AB$, $XZ \perp AB$. Pro kolmý průmět U bodu X na stranu AC a pro kolmý průmět V bodu P na stranu AB platí $|XU| = \frac{1}{3}|UA|$, proto je $|XP| = \sqrt{2}|UP| = \frac{1}{2}\sqrt{2}|AP| = |PV| = |XZ|$.

Za úplné řešení je 6 bodů, 4 body dejte za nalezení množiny bodů X, 2 body za důkaz, že každý bod nalezené množiny má požadovanou vlastnost.

4. Lichoběžník se základnami a, c a rameny b, d existuje a je jediný, právě když existuje trojúhelník se stranami $|a-c|$, b a d (obr. 3).



Obr. 3

Všimněme si trojúhelníku ABC. Protože pro jeho výšky na strany BC a AB platí $v_{AB} = v$, $v_{BC} = d_A$, je dle předpokladu

$$|BC| + v_{BC} = |AB| + v_{AB}.$$

Na základě výsledku 2. úlohy domácího kola tedy platí $|AB| = |BC|$ nebo $|\sphericalangle ABC| = 90°$. Analogicky v trojúhelníku ABD dostaneme $|AD| = |AB|$ nebo $|\sphericalangle DAB| = 90°$. Proto musí nastat jeden ze čtyř případů:

1. $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DAB| = 90°$.
   Potom by ale $ABCD$ nebyl lichoběžník.
2. $|AB| = |BC| = |AD| = 6\,\mathrm{cm}$.
   Protože $|CD| = 4\,\mathrm{cm}$, existuje takový lichoběžník $ABCD$ právě jeden, neboť existuje trojúhelník se stranami délek 6 cm, 6 cm, 2 cm.
3. $|AB| = |BC| = 6\,\mathrm{cm}$; $|\sphericalangle DAB| = 90°$.
   Protože $|CD| = 4\,\mathrm{cm}$, tak $|AD| = \sqrt{6^2 - (6-4)^2}\,\mathrm{cm} = \sqrt{32}\,\mathrm{cm}$. Takovýto lichoběžník existuje právě jeden, neboť existuje trojúhelník se stranami 2 cm, 6 cm, $\sqrt{32}$ cm.
4. $|AB| = |AD| = 6\,\mathrm{cm}$; $|\sphericalangle ABC| = 90°$.
   Je to analogický případ jako 3 (vyměníme ramena AD a BC).
   Dané úloze vyhovují právě tři lichoběžníky uvedené v bodech 2, 3, 4.

Za úplné řešení je 6 bodů.

3. Je dán rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Označme P střed jeho výšky z vrcholu C, M průsečík přímky AP s odvěsnou BC a N průsečík přímky BP s odvěsnou AC. Dokažte, že pravoúhelník $KLMN$, jehož strana KL leží na přeponě AB, je čtverec.

Řešení 1. Nechť D je střed přepony AB a nechť $c = |AB|$. Ze souměrnosti podle osy CD plyne $MN \parallel AB$, tudíž pravoúhelník $KLMN$ existuje. Naší úlohou je dokázat, že $|KL| = |LM|$.

Protože bod P je střed odvěsny pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ACD, platí rovnosti $|DP| = \frac{1}{2}|CD| = \frac{1}{2}|AD| = \frac{1}{4}c$. Všimněme si nyní navzájem podobných pravoúhlých trojúhelníků ALM a ADP. Pro délky jejich odvěsen platí

$|AL| : |LM| = |AD| : |DP| = (\frac{1}{2}c) : (\frac{1}{4}c) = 2$, odkud $|AL| = 2|LM|$. Jelikož $|AL| = |AB| - |BL| = c - |BL| = c - |LM|$ (neboť BLM je rovnoramenný trojúhelník), dostáváme rovnici $c - |LM| = 2|LM|$, podle níž $|LM| = \frac{1}{3}c$. Platí tedy $|BL| = \frac{1}{3}c$, analogicky se dokáže rovnost $|AK| = \frac{1}{3}c$ (která plyne též ze souměrnosti podle osy CD). Pak ale $|KL| = |AB| - |AK| - |BL| = c - \frac{1}{3}c - \frac{1}{3}c = \frac{1}{3}c$. Rovnost $|KL| = |LM|$ je tak dokázána.

Řešení 2. Protože $MN \parallel AB$, pravoúhelník $KLMN$ existuje. Vzhledem k rovnostem $|AK| = |KN| = |LM| = |BL|$ je pravoúhelník $KLMN$ čtverec, právě když jeho vrcholy K a L dělí přeponu AB na tři shodné úsečky, tedy právě když $|MN| = \frac{1}{3}|AB|$.

Postup ze zadání úlohy trochu obraťme: do trojúhelníku ABC nejprve vepišme výše určeným způsobem čtverec $KLMN$ a vysvětleme, proč se pak úsečky AM a CN protínají v takovém bodě P, který je středem výšky CD trojúhelníku ABC. Z osové souměrnosti podle osy CD je předně jasné, že tento průsečík P na výšce CD skutečně leží. Pro odvěsny pravoúhlého trojúhelníku ALM platí $|ML| = \frac{1}{3}|AB|$ a $|AL| = \frac{2}{3}|AB|$, takže $|AL| = 2|ML|$; proto i pro odvěsny podobného trojúhelníku ADP platí $|AD| = 2|PD|$, což spolu s rovností $|AD| = |CD|$ již vede k závěru, že $|PD| = |PC|$. Průsečík P úseček AM a CN je tedy skutečně středem výšky CD.

Řešení 3. Označme D patu výšky z vrcholu C na přeponu AB a trojúhelník CDB doplňme na čtverec $CDBE$ se středem S. Z rovnoběžníku $ADEC$ usoudíme, že body A, P, M a E leží na jedné přímce. Bod M je navíc těžištěm trojúhelníku CDE, takže platí $|MC| = \frac{2}{3}|CS| = \frac{1}{3}|BC|$. Z rovnosti $|MC| = \frac{1}{3}|BC|$ a rovnoběžnosti úseček MN a AB vyplývá, že trojúhelníky ABC a NMC jsou podobné s koeficientem $\frac{1}{3}$. Odtud plyne $|MN| = \frac{1}{3}|AB|$, takže pravoúhelník $KLMN$ existuje a je to čtverec (viz úvod druhého řešení).

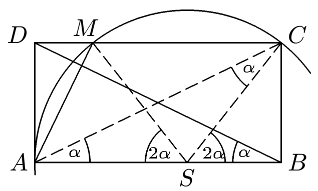
2. *V obdélníku $ABCD$ platí $|AB| > |BC|$. Oblouk AC kružnice, jejíž střed leží na straně AB, protíná stranu CD v bodě M. Dokažte, že přímky AM a BD jsou navzájem kolmé.*

ŘEŠENÍ. Označme S střed dané kružnice a α velikost úhlu CAB, $\alpha < 45^\circ$ (obr. 1). Pak také $|\sphericalangle SAC| = |\sphericalangle SCA| = \alpha$, neboť trojúhelník ASC je rovnoramenný. Jeho vnější úhel BSC má tedy velikost 2α. Trojúhelník MSC je rovněž rovnoramenný, a proto souměrný podle osy základny MC. Obrazem úhlu BSC v této souměrnosti je úhel ASM, jehož velikost je tudíž také 2α. Z rovnoramenného trojúhelníku ASM pak máme $|\sphericalangle BAM| = |\sphericalangle SAM| = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\alpha) = 90^\circ - \alpha$ a odtud je již kolmost přímek AM a BD zřejmá, neboť $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle CAB| = \alpha$.

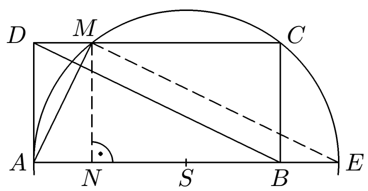
JINÉ ŘEŠENÍ. Ve shodě s obr. 2. označme AE průměr dané kružnice a N patu kolmice z bodu M na přímku AB. Z vlastností obdélníku $ANMD$ a ze symetrie vzhledem k ose strany AE plyne $|DM| = |AN| = |BE|$ a navíc jsou úsečky DM a BE rovnoběžné. Proto je $BEMD$ rovnoběžník. Přímka BD je tedy rovnoběžná s přímkou ME, která je kolmá na přímku AM podle Thaletovy věty.

NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. Vypočítejte velikosti všech úhlů, které svírají přímky určené dvojicemi vrcholů pravidelného pětiúhelníku.



Obr. 1



Obr. 2

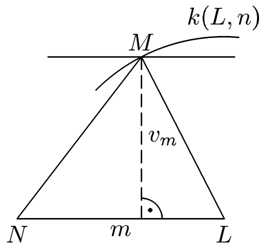
2. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno
   a) α, β, $m = b - a > 0$,
   b) v_a, β, $m = b - a > 0$.
   [Návod: a) Načrtněte trojúhelník a na úsečce AC zvolte bod D tak, aby $|CD| = a$. Pak vypočítejte velikosti úhlů ACB, BDC, BDA a sestrojte nejprve trojúhelník ABD. Úlohu lze řešit také využitím podobnosti. b) Na polopřímce CB zvolte bod D tak, aby $|CD| = b$, sestrojte nejprve trojúhelník ABD.)
3. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jsou-li dány délky jeho základen AB, CD a úhlopříček AC, BD. [Využijte trojúhelník s délkami stran $|AB|+|CD|$, $|AC|$, $|BD|$.]
4. $ABHK$, $BCGH$ a $CEFG$ jsou shodné čtverce, z nichž žádné dva se nepřekrývají. Dokažte, že platí $|\sphericalangle ABK| + |\sphericalangle ACK| + |\sphericalangle AEK| = 90°$. [F. Kuřina: Umění vidět v matematice, příklad 60.]

5. *Je dán trojúhelník ABC, v němž $|\sphericalangle BAC| = 150^\circ$, $|AB| = 4\,cm$ a $|AC| = = 6\,cm$. Sestrojte trojúhelník dvojnásobného obsahu, jehož dvě strany jsou shodné s některými dvěma stranami trojúhelníku ABC. Najděte všechna řešení.*

Řešení. Trojúhelník ABC snadno sestrojíme a tím konstrukčně určíme jeho výšky i délky všech stran. Hledaný trojúhelník označme LMN. Při shodných základnách obou trojúhelníků jsou výšky příslušné těmto základnám v poměru jejich obsahů, tj. $2:1$. Trojúhelník LMN je určen délkami m, n stran LN, LM, které jsou shodné s některými dvěma stranami daného trojúhelníku, a výškou v_m. Přehled všech možností udává následující tabulka (je třeba si uvědomit, že každá z ostatních situací vede na trojúhelník shodný s některým předchozím):

	I	II	III
m	a	b	c
v_m	$2v_a$	$2v_b$	$2v_c$
n	b	c	a

Konstrukci trojúhelníku LMN naznačuje obr. 3. Nejprve sestrojíme úsečku NL délky m. Zbývající vrchol M je bodem průniku kružnice $k(L,n)$ a přímky p rovnoběžné s přímkou NL ve vzdálenosti v_m. Přitom stačí uvažovat řešení jen v jedné polorovině určené přímkou NL. Podle počtu bodů tohoto průniku může mít každá ze situací I až III obecně 2, 1 nebo žádné (uvažujeme jen neshodná) řešení. To představuje až 6 neshodných trojúhelníků KLM. Ve skutečnosti je jich pro dané číselné zadání jen pět. Platí totiž $2v_b = 2b\sin 150^\circ = c$, a proto se v případě II kružnice k přímky p jen dotkne.

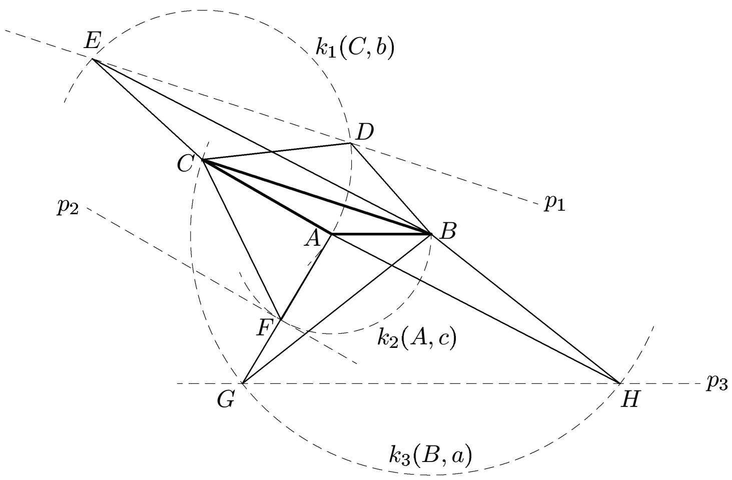


Obr. 3

Všechna řešení jsou přehledně sestrojena na obr. 4. Jsou to trojúhelníky CBD, CBE, ACF, BAG a BAH.

Návodné úlohy:

1. Je dán rovnostranný trojúhelník ABC se stranou délky a. Sestrojte trojúhelník polovičního obsahu, jehož dvě strany mají délku a.
2. K danému pravoúhlému trojúhelníku o odvěsnách délek a, b sestrojte rovnostranný trojúhelník téhož obsahu. [J. Polák: Přehled středoškolské matematiky, úloha 28.9.]



Obr. 4

1. Zjistěte, které dvojice pravidelných mnohoúhelníků mají velikosti vnitřních úhlů v poměru $2:3$.

3. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, pro který platí:

$$|AC| = 8\,\mathrm{cm},\ |BD| = 6\,\mathrm{cm},\ |AB| + |CD| = 10\,\mathrm{cm}$$

a střed kružnice opsané trojúhelníku ACD leží na základně AB.

1. Pravidelný n-úhelník ($n \geqq 3$) se skládá z n navzájem shodných rovnoramenných trojúhelníků, které mají při společném hlavním vrcholu úhel velikosti $\frac{1}{n}360°$. Velikost jeho vnitřního úhlu je tedy $\alpha_n = 180° - \frac{1}{n}360° = \frac{n-2}{n}180°$.

Zadání úlohy tak vede k rovnici

$$\frac{3(n-2)}{n} = \frac{2(m-2)}{m}, \tag{1}$$

kterou upravíme na tvar

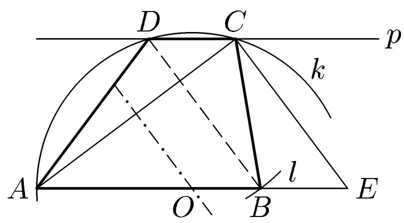
$$mn = 6m - 4n \quad \text{neboli} \quad n = 6 - 4\frac{m}{n}.$$

Odtud plyne, že $n < 6$. Dosazením $n \in \{3, 4, 5\}$ najdeme následující tři dvojice $[n, m] = [3, 4], [4, 8], [5, 20]$, jež vyhovují rovnici (1).

Úloze vyhovují tři dvojice pravidelných mnohoúhelníků: trojúhelník a čtverec, čtverec a osmiúhelník, pětiúhelník a dvacetiúhelník.

Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 3 body za nalezení vztahu ekvivalentního rovnici (1).

3. Předpokládejme, že $ABCD$ (obr. 1) je hledaný lichoběžník a posuňme úsečku BD o vektor $\boldsymbol{DC}$; obraz bodu B označme E.



Obr. 1

Protože $|BD| = |EC|$ a $|AE| = |AB| + |CD|$, můžeme trojúhelník ACE sestrojit podle věty sss. Střed O kružnice opsané trojúhelníku ACD pak sestrojíme jako průsečík osy úsečky AC s přímkou AE. Nakonec sestrojíme vrchol D jako průsečík kružnice $k(O; |OA|)$ s přímkou p vedenou bodem C rovnoběžně s AE a vrchol B jako průsečík kružnice $l(D, |CE|)$ s polopřímkou AE.

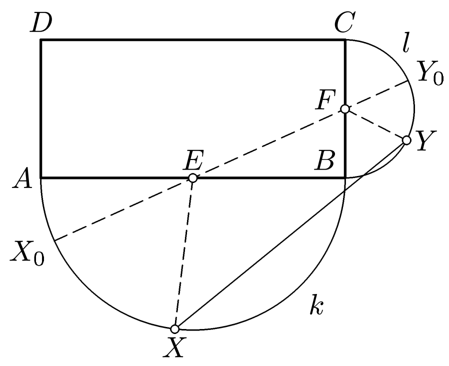
Úloha má ve zvolené polorovině s hraniční přímkou AE jediné řešení.

Poznámka. Délky jsou zadány tak, že pro strany trojúhelníku AEC platí rovnost $|AE|^2 = |AC|^2 + |CE|^2$, takže trojúhelník AEC je pravoúhlý a střed O jeho kružnice opsané je středem úsečky AE. Toho lze samozřejmě využít ke konstrukci.

Za úplné řešení je 6 bodů.

3. V rovině je dán obdélník $ABCD$, nad jehož stranami AB a BC (jako nad průměry) jsou vně obdélníku sestrojeny po řadě polokružnice k a l. Najděte úsečku XY co největší délky d tak, aby platilo $X \in k$ a $Y \in l$. Délku d pak vyjádřete pomocí délek $a = |AB|$ a $b = |BC|$.

3. Středy E, F polokružnic jsou totožné se středy stran AB, BC (obr. 1). Poloměry



Obr. 1

těchto polokružnic jsou $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$ a z trojúhelníku EBF snadno pomocí Pythagorovy věty spočteme

$$|EF| = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Podle trojúhelníkové nerovnosti (obr. 1) zřejmě pro libovolné dva body X, Y takové, že X leží na polokružnici k a Y na polokružnici l, platí

$$|XY| \leqq |XE| + |EY| \leqq |XE| + |EF| + |FY|$$

s rovností, právě když body E, F leží na úsečce XY. Úsečka XY má tedy největší délku pro $X = X_0$, $Y = Y_0$, kde body X_0, Y_0 jsou průsečíky polokružnic k, l s přímkou EF. Pro délku úsečky X_0Y_0 pak platí

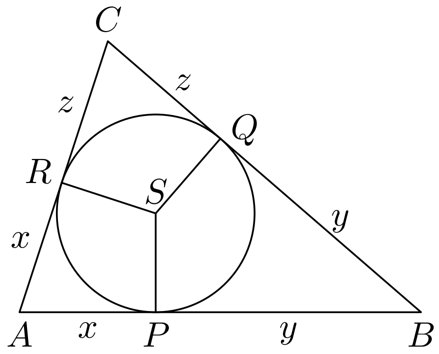
$$|X_0Y_0| = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} + \frac{1}{2}b = \frac{1}{2}\bigl(a + b + \sqrt{a^2 + b^2}\bigr).$$

Za úplné řešení je 6 bodů; 4 body dejte za nalezení nejdelší úsečky a 2 body za určení její délky. Nestrhávejte body, pokud řešitel prohlásí za zřejmé (ale nedokáže) tvrzení, že nejdelší spojnice dvou kružnic leží na jejich středné.

2. *Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky, ve kterých spojnice středů vepsané a opsané kružnice svírá s přeponou úhel* 45 *stupňů.*

Řešení samotné úlohy by bylo možné vyložit na několika řádcích, kdybychom z následujícího textu „vypreparovali" nezbytně potřebné poznatky a úvahy (viz poslední odstavec). Záměrně však uvedeme obšírnější výklad (rozčleněný do tří částí), abychom řešitele upozornili na obecnější tvrzení, která lze uplatnit i při řešení jiných úloh.

Část A. Předpokládejme, že kružnice vepsaná *obecnému* trojúhelníku ABC se dotýká stran AB, BC, AC po řadě v bodech P, Q a R (obr. 2.1). Z hodin geometrie žáci ví o souměrnosti obou tečen vedených z daného bodu k dané



Obr. 2.1

kružnici. Úsečky AP a AR jsou tudíž shodné, stejně jako úsečky BP a BQ a úsečky CQ a CR. Ukážeme, jak lze délky

$$x = |AP| = |AR|,\ y = |BP| = |BQ|,\ z = |CQ| = |CR|$$

vyjádřit pomocí délek stran $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Podle obr. 2.1 platí

$$x + y = c,\ y + z = a,\ x + z = b,$$

což je soustava tří lineárních rovnic, z níž snadno plynou užitečné vzorce

$$x = \frac{b + c - a}{2},\ y = \frac{a + c - b}{2},\ z = \frac{a + b - c}{2}.$$

Část B. Nyní předpokládejme, že ABC je *pravoúhlý* trojúhelník s přeponou AB. Označme S střed kružnice vepsané a Q, R její body dotyku s odvěsnami BC, AC (obr. 2.2). Protože $SQCR$ je pravoúhelník, jehož sousední strany SQ a SR jsou shodné (mají délku rovnou poloměru ϱ kružnice vepsané), jedná se o čtverec o straně ϱ. Délku úseku $z = |CQ|$ jsme však vypočetli v Části A. Tak pro poloměr ϱ kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku s odvěsnami a, b a přeponou c dostáváme vzorec

$$\varrho = \frac{a + b - c}{2}.$$

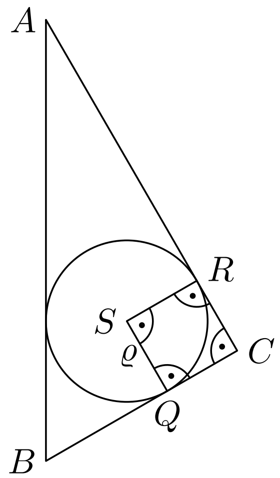
Část C. Předpokládejme konečně, že ABC je pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB, který splňuje podmínku z textu úlohy. Podle Thaletovy věty je střed O kružnice opsané trojúhelníku ABC středem přepony AB. Podle zadání má jeden z úhlů SOA, SOB (kde S je střed vepsané kružnice) velikost $45°$; nechť je to úhel SOB (obr. 2.3), jinak přehodíme označení vrcholů A, B. Bod P, v němž se kružnice vepsaná dotýká strany AB, je pak vnitřním bodem úsečky OB. Podle Části A platí vzorec $|BP| = \frac{1}{2}(a+c-b)$, takže

$$|OP| = |OB| - |BP| = \frac{c}{2} - \frac{a+c-b}{2} = \frac{b-a}{2}.$$

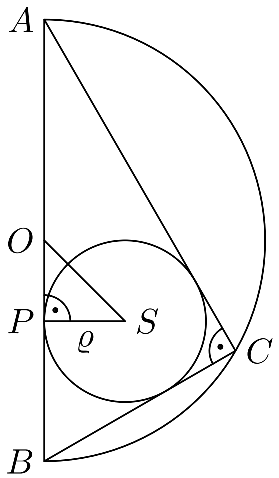
Vyjádřili jsme délku odvěsny OP pravoúhlého trojúhelníku SOP. Jeho druhá odvěsna SP má podle Části B délku $|SP| = \varrho = \frac{1}{2}(a+b-c)$. Protože však úhel SOP má dle předpokladu velikost $45°$, je trojúhelník SOP rovnoramenný:

$$|OP| = |SP|, \text{ neboli } \frac{b-a}{2} = \frac{a+b-c}{2}, \text{ neboli } 2a = c.$$

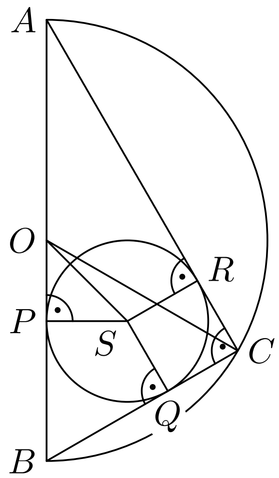
Strany pravoúhlého trojúhelníku ABC jsou proto v poměru $a : b : c = 1 : \sqrt{3} : 2$, takže jeho vnitřní úhly jsou, jak je dobře známo, $30°$, $60°$ a $90°$. Pro úplnost je třeba ještě ukázat, že takový trojúhelník skutečně požadovanou vlastnost má. To lze provést obrácením předchozího postupu: z rovnosti $2a = c$ se odvodí rovnost $|OP| = |SP|$, která znamená, že pravoúhlý trojúhelník SOP je rovnoramenný, takže úhel SOP má skutečně velikost $45°$.



Obr. 2.2



Obr. 2.3



Obr. 2.4

Stručné řešení podle obr. 2.4: Úsečka SO svírá s přeponou AB úhel $45°$, právě když $|OP| = |SP|$. Protože však $|SP| = |SR| = |QC|$ a $|PB| = |QB|$, je rovnost $|OP| = |SP|$ ekvivalentní s rovností $|OP| + |PB| = |QC| + |QB|$, tedy s rovností $|OB| = |BC|$. Podle Thaletovy věty však vždy platí $|OB| = |OC|$, takže rovnost $|OB| = |BC|$ nastane, právě když je trojúhelník OBC rovnostranný, tedy právě když úhel ABC měří $60°$.

Odpověď: Požadovanou vlastnost mají právě ty pravoúhlé trojúhelníky, jejichž ostré vnitřní úhly mají velikost $30°$ a $60°$.

Poznámka: Úloha 2 je velmi podobná starší úloze MO (21–C–II–1b): Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC, bod D je střed jeho přepony AB a bod S je středem jemu vepsané kružnice. Dokažte: Jestliže $|CS| = |DS|$, pak jeden vnitřní úhel trojúhelníku ABC má velikost $30°$.

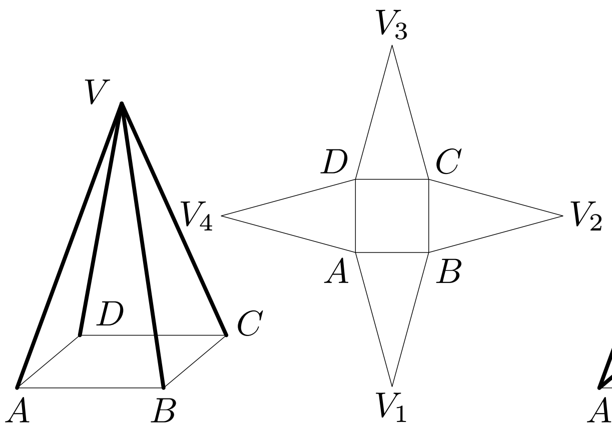
4. *Jirka zhotovil papírový model pravidelného čtyřbokého jehlanu $ABCDV$ s podstavou $ABCD$. Když pak model podél čtyř hran rozřízl, bylo ho možno rozvinout (bez překrytí) do roviny. Kolik různých sítí daného jehlanu tak mohl Jirka dostat? Ukázalo se, že síť, kterou Jirka dostal, měla tvar (nekonvexního) sedmiúhelníku. Vypočtěte úhel AVB v boční stěně jehlanu.*

Řešení. Počet různých sítí daného jehlanu určíme tak, že nejprve všechny možné sítě nakreslíme. Abychom některou možnost neopomenuli, měli bychom do výčtu sítí vnést *určitý systém*. Popíšeme dva přístupy, které takový systém vytvářejí (a které budou patrně žákům nejbližší).

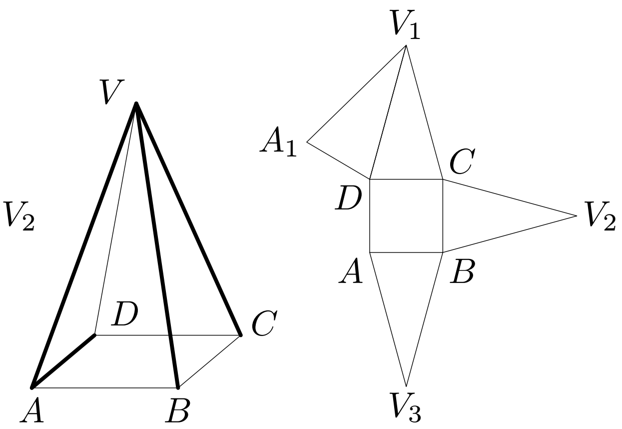
Přístup 1 („od sítě k jehlanu“). Každá síť bude složena z jednoho čtverce o straně a a čtyř rovnoramenných trojúhelníků o stranách a, b, b, kde a značí délku podstavné hrany a b délku boční hrany daného jehlanu $ABCDV$. Přemýšlejme tedy o tom, jak takový čtverec a čtyři trojúhelníky „slepit“ podél shodných stran do „celku“ a zda tento celek skutečně vytvoří síť jehlanu. Je velmi přirozené rozčlenit řešení tohoto úkolu *podle počtu stran čtverce, které budou slepeny* (možné počty jsou 1 až 4).

Přístup 2 („od jehlanu k síti“). Přemýšlejme o tom, jak rozříznout daný jehlan $ABCDV$ podél čtyř hran, abychom po rozvinutí dostali jeho síť. (Brzy si při tom uvědomíme jeden obecný poznatek: z každého vrcholu tělesa musí vycházet aspoň jedna hrana řezu.) Protože nám jde o počet různých (tj. po dvou neshodných) sítí, s ohledem na symetrii daného jehlanu není příliš vhodné systematizovat čtveřice hran řezu podle toho, zda obsahují některé konkrétní hrany (jako např. hrany AB, AV apod.). Výhodnější je rozdělení těchto čtveřic do skupin podle toho, *kolik hran řezu je v jehlanu podstavných* (a kolik bočních).

Protože oba popsané přístupy vedou ke shodné systematizaci (je-li právě k hran řezu podstavných, je v příslušné síti právě $4 - k$ stran čtverce slepeno s trojúhelníky), popíšeme výčet všech sítí jen podle Přístupu 2:



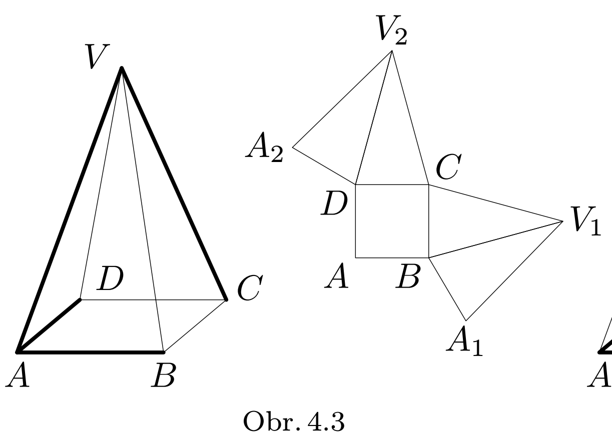
Obr. 4.1



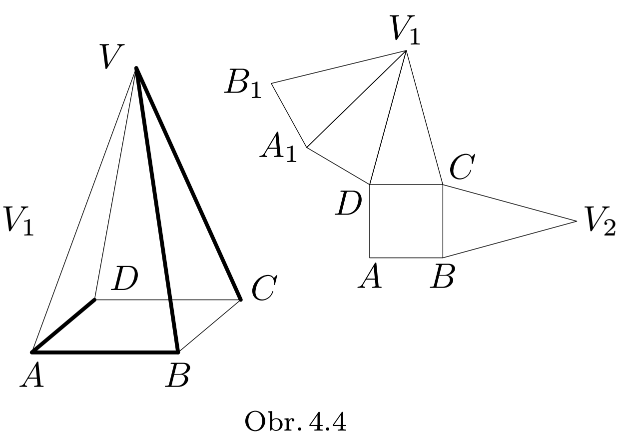
Obr. 4.2

1. Neleží-li v podstavě $ABCD$ žádná hrana řezu, je jehlan rozříznut podél všech čtyř bočních hran, příslušná síť je na obr. 4.1.
2. Předpokládejme, že v podstavě $ABCD$ leží jediná hrana řezu, například hrana AD. Z vrcholů B a C musí vycházet nějaké hrany řezu, mohou to tedy být jedině hrany BV a CV. Tři hrany řezu jsou tedy AD, BV a CV, s ohledem na symetrii je lhostejno, zda je čtvrtou hranu řezu AV nebo DV, nechť je to tedy hrana AV jako na obr. 4.2.
3. Předpokládejme, že v podstavě $ABCD$ leží právě dvě hrany řezu. Rozlišme, zda jsou to hrany sousední (např. AB a AD), nebo hrany protější (např. AD a BC); pro větší přehlednost oba případy posuďme v oddělených odstavcích:

   (3a) Je-li podstava rozříznuta právě podél hran AB a AD (takže řezem v podstavě je lomená čára BAD), musí být třetí hranou řezu hrana CV, čtvrtá hrana řezu je pak jedna z hran AV, BV, nebo DV. S ohledem na symetrii případů, kdy je čtvrtou hranou řezu BV nebo DV, uvádíme jen obrázky pro hrany řezu AV (obr. 4.3) a BV (obr. 4.4).

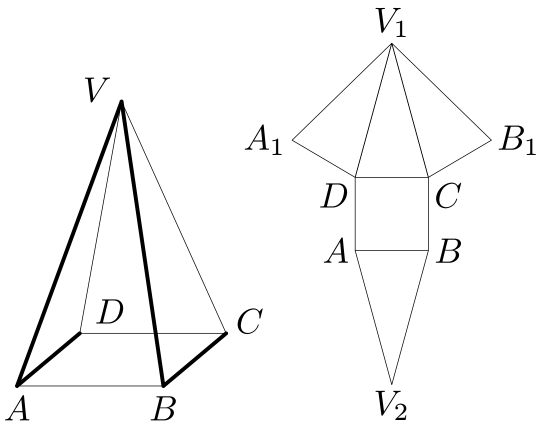


Obr. 4.3

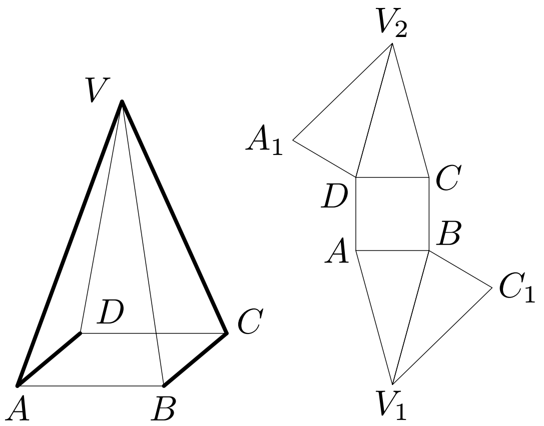


Obr. 4.4

(3b) Je-li podstava rozříznuta právě podél hran AD a BC, je třetí hranou řezu jedna z bočních hran AV, DV a čtvrtou hranou řezu jedna z bočních hran BV, CV (nemohou to totiž být ani obě hrany AV, DV, ani obě hrany BV, CV). S ohledem na symetrii stačí rozlišit jen dva případy: boční hrany řezu jsou buď AV a BV (obr. 4.5), nebo AV a CV (obr. 4.6).

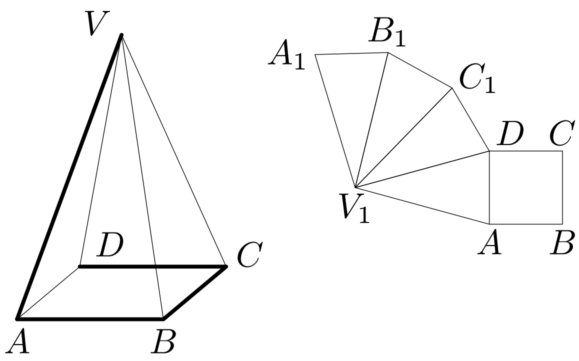


Obr. 4.5

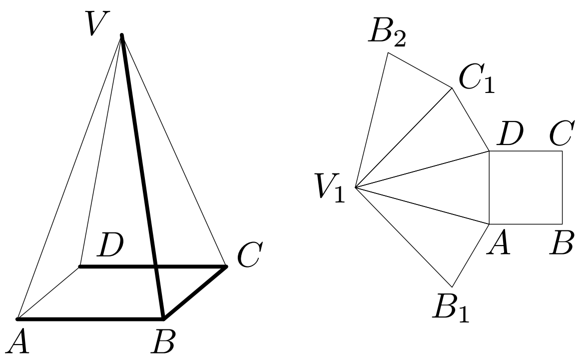


Obr. 4.6

4. Předpokládejme, že v podstavě $ABCD$ leží právě tři hrany řezu, například hrany AB, BC a CD, takže řezem v podstavě je lomená čára $ABCD$. S ohledem na symetrii nyní stačí rozlišit jen dva případy: čtvrtá hrana řezu vede do vrcholu V buďto z jednoho z obou krajních vrcholů zmíněné lomené čáry $ABCD$, například bodu A (obr. 4.7), nebo z jednoho z obou prostředních vrcholů, například bodu B (obr. 4.8).



Obr. 4.7



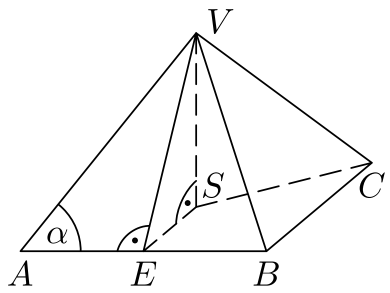
Obr. 4.8

Zjistili jsme, že daný jehlan má právě osm různých sítí. (Většina žáků asi správně všech osm sítí do svých řešení nakreslí, aniž pocítí nutnost vysvětlovat, proč jiné sítě neexistují. Diskutujme s nimi o této otázce.)

Přejděme nyní k druhé části úlohy, otázce, kdy některá ze sítí daného jehlanu má tvar nekonvexního sedmiúhelníku. Podle obrázků vidíme, že každá síť má, obecně vzato, osm vrcholů; jejich počet se sníží na sedm, právě když se úhel u jednoho z osmi obecných vrcholů „napřímí“, tj. bude mít velikost 180°. Velikosti všech dotyčných úhlů lze snadno vyjádřit pomocí $\omega = |\sphericalangle AVB|$ a $\alpha = |\sphericalangle BAV|$; zjistíme tak, popsaná situace nastane, jen když jeden z úhlů

$$2\alpha,\ \alpha + 90^\circ,\ 2\alpha + 90^\circ,\ 2\omega,\ 3\omega \text{ nebo } 4\omega \tag{$*$}$$

bude 180°. Položme si nyní poněkud obecnější otázku: Jaké hodnoty α a ω jsou přípustné, tj. odpovídají nějakému jehlanu $ABCDV$? Označme S střed čtverce $ABCD$ a E střed hrany AB (obr. 4.9), z pravoúhlého trojúhelníku EVS plyne,



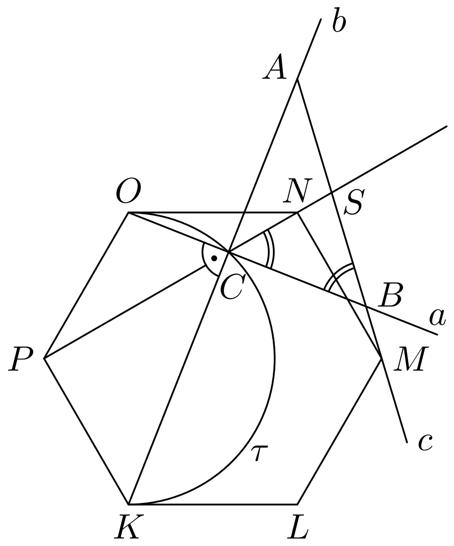
Obr. 4.9

že $|EV| > |ES|$ neboli $|EV| > |AE|$, proto pro úhel α v pravoúhlém trojúhelníku AVE platí $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ (pro $\alpha = 45^\circ$ bychom dostali „zdegenerovaný“ jehlan s nulovou výškou, pro $\alpha = 90^\circ$ „jehlan“ s nekonečnou výškou, tedy hranol). Zároveň je jasné, že pro každé $\alpha \in (45^\circ, 90^\circ)$ odpovídající jehlan existuje. Odtud vzhledem k rovnosti $2\alpha + \omega = 180^\circ$ plyne, že přípustné hodnoty ω zaplní interval $(0^\circ, 90^\circ)$. Proto z úhlů $(*)$ mohou být přímé jedině úhly 3ω a 4ω. Pro $\omega = 60^\circ$ mají tvar sedmiúhelníku sítě z obr. 4.4 a 4.5, pro $\omega = 45^\circ$ sítě z obr. 4.7 a 4.8.

Odpověď: Jirka mohl dostat právě osm různých sítí. Úhel AVB měl velikost 45° nebo 60°.

6. *Je dán pravidelný šestiúhelník $KLMNOP$. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB tak, aby jeho vrchol C ležel na úsečce NP, body M, O, K ležely po řadě na přímkách AB, BC, CA a aby přímka NP rozdělila trojúhelník ABC na dvě části se stejným obsahem.*

Řešení. Jak je tomu u řešení konstrukčních úloh obvyklé, načrtneme nejdříve do jednoho obrázku daný šestiúhelník $KLMNOP$ i hledaný trojúhelník ABC tak, aby jejich tvar i vzájemná poloha aspoň přibližně odpovídaly zadání (obr. 6.1). To se žákům patrně nepodaří na první pokus; pokud jejich nezdary



Obr. 6.1

budou přetrvávat delší dobu, prozradíme jim, že speciální poloha daných bodů K, L, M, N, O, P nebude mít na způsob konstrukce trojúhelníku ABC žádný vliv. Proto je možné k rozboru úlohy využít i takový náčrtek, do kterého nejprve nakreslíme pravoúhlý trojúhelník ABC, teprve pak na přímkách AB, BC, CA

libovolně vybereme body M, O, K; konečně výběr bodů N a P podřídíme pouze tomu, že body N, C, P mají v tomto pořadí ležet na přímce, jež dělí trojúhelník ABC na dvě části se stejným obsahem; jde tedy o přímku CS, kde S je střed strany AB.

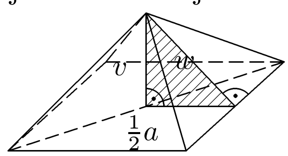
Z obrázku 6.1 je patrné, že bod C můžeme sestrojit jako průsečík úsečky NP s Thaletovou kružnicí τ nad průměrem OK, neboť úhel OCK je pravý. Jakmile takto nalezneme bod C, sestrojíme přímky $a = OC = BC$ a $b = = KC = AC$. Všimněme si nyní trojúhelníku SBC. Podle Thaletovy věty platí $|SC| = |SB|$, takže přímka a svírá shodné ostré úhly s přímkami PN a AB (tyto úhly jsou vyznačeny na obrázku). Protože přímka a je již sestrojena a přímka PN je určena zadáním úlohy, má podle předchozí věty (prozatím neznámá) přímka $c = AB$ jednoznačně určený směr; protože má tato přímka c navíc procházet daným bodem M, můžeme ji nyní sestrojit. Pak už určíme vrcholy A a B jako průsečíky přímky c po řadě s přímkami b a a. Tím je celý postup konstrukce hotov. Důkaz správnosti: výsledkem konstrukce je zřejmě pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB, jehož vrchol C leží na úsečce NP a jehož strany BC, CA, AB leží po řadě na přímkách a, b, c, které procházejí po řadě body O, K, M; zbývá vysvětlit, proč průsečík S přímky PN s přeponou AB je jejím středem. To ale plyne z toho, že podle konstrukce má trojúhelník SBC shodné úhly při vrcholech B a C.

Ze vzájemné polohy úsečky NP a kružnice τ nad průměrem OK plyne, že pro každý pravidelný šestiúhelník $KLMNOP$ má úloha jediné řešení.

1. Ze dřeva je vyrobeno šest shodných pravidelných čtyřbokých jehlanů a krychle. Stěna krychle je shodná s podstavami jehlanů. Určete poměr povrchu krychle a tělesa, které vznikne slepením podstav jehlanů se stěnami krychle, je-li poměr objemů těchto těles $1 : 2$.

4. V rovině jsou dány body A, L, M takové, že $|AL| = 6{,}3\,\mathrm{cm}$, $|AM| = 5{,}6\,\mathrm{cm}$, $|LM| = 1{,}8\,\mathrm{cm}$. Sestrojte lichoběžník $ABCD$, jemuž lze vepsat kružnici, která se dotýká ramene BC v bodě L a základny CD v bodě M (body dotyku se základnou AB a ramenem AD lichoběžníku $ABCD$ nejsou dány).

1. Povrch vzniklého tělesa je tvořen všemi 24 bočními stěnami daných šesti jehlanů. Označme v výšku těchto jehlanů a a délku jejich podstavné hrany (jež je shodná s hranou dané krychle). Ze zadání úlohy vyplývá, že objem jednoho jehlanu je šestinou objemu krychle, tedy $\frac{1}{3}a^2v = \frac{1}{6}a^3$, odkud $v = \frac{1}{2}a$. Boční stěna jehlanu je rovnoramenný trojúhelník, pro jehož výšku w z hlavního vrcholu (obr. 1) platí podle Pythagorovy věty rovnost $w^2 = v^2 + (\frac{1}{2}a)^2$, odkud po dosazení $v = \frac{1}{2}a$ vychází $w = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. Proto je obsah boční stěny jehlanu roven $\frac{1}{2}aw = \frac{\sqrt{2}}{4}a^2$. Výsledné těleso má povrch 24krát větší, tedy $6\sqrt{2}a^2$, zatímco povrch krychle je $6a^2$.



Obr. 1

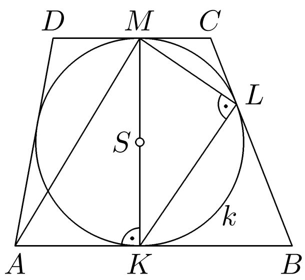
Odpověď: Poměr povrchů původní krychle a výsledného tělesa je $1 : \sqrt{2}$.

Poznámka. Za daných předpokladů vznikne slepením těleso, které bude mít dvanáct shodných stěn (tzv. kosočtverečný dvanáctistěn). Uvedené shodné jehlany mají totiž v součtu stejný objem jako daná krychle a dostaneme je, když krychli rozdělíme na šest shodných jehlanů se společným hlavním vrcholem ve středu krychle.

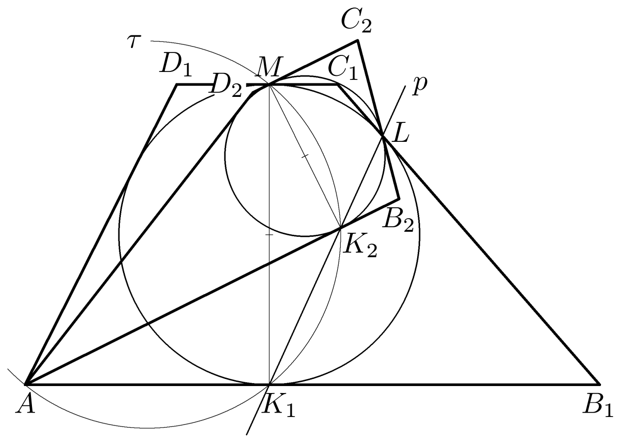
Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 3 body za určení vztahu $a = 2v$.

4. Označme k vepsanou kružnici, S její střed a K bod dotyku kružnice k se základnou AB (obr. 3). Protože $AB \parallel CD$, $SK \perp AB$ a $SM \perp CD$, je KM průměr kružnice k. Proto jsou oba úhly AKM a KLM pravé, bod K tudíž sestrojíme jako průsečík Thaletovy kružnice τ nad průměrem AM s přímkou p, jež prochází bodem L a je kolmá na LM. Zbytek konstrukce je snadný: bod S určíme jako střed úsečky KM, sestrojíme kružnici $k = (S, |SK|)$ a v bodech L a M po řadě její tečny b a c. Vrchol B pak určíme jako průsečík polopřímky AK s přímkou b, vrchol C jako průsečík přímek b a c, konečně vrchol D sestrojíme jako průsečík přímky c s tečnou d kružnice k, jež je souměrně sdružená s tečnou AK podle osy AS. Pro trojúhelník ALM ze zadání má kružnice τ s přímkou p společné dva body, které jsou na obr. 4 označeny K_1, K_2, proto má úloha dvě řešení — lichoběžníky $AB_1C_1D_1$ a $AB_2C_2D_2$.

Za úplné řešení je 6 bodů. Uvede-li řešitel jen jedno řešení, strhněte dva body.



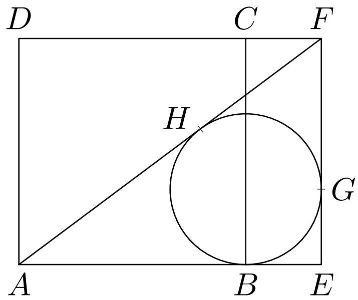
Obr. 3



Obr. 4

2. Čtverec $ABCD$ a obdélník $AEFD$ mají takovou vzájemnou polohu, že bod B leží na kružnici vepsané trojúhelníku AEF. Vypočtěte poměr délky a šířky obdélníku $AEFD$.

2. Protože oba pravoúhelníky musí ležet ve stejné polorovině s hraniční přímkou AD, leží bod B na polopřímce AE. Proto se zmíněná kružnice dotýká strany AE trojúhelníku AEF právě v bodě B. Body, v nichž se kružnice dotýká stran EF a FA, označme po řadě G a H (obr. 1). Označme ještě $a = |AB| = |EF|$ a nechť $|AE| = ka$, $k > 1$. Ze souměrností



Obr. 1

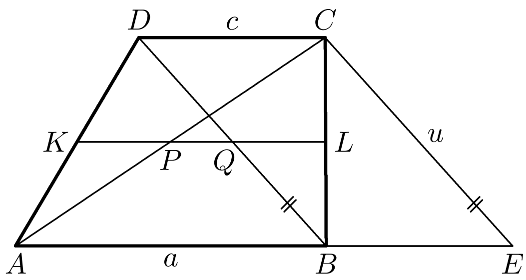
dvojic tečen ke kružnici plynou rovnosti $|AH| = |AB| = a$, $|EG| = |EB| = |AE| - |AB| = (k-1)a$, $|FH| = |FG| = |EF| - |EG| = (2-k)a$, tudíž $|AF| = |AH| + |FH| = (3-k)a$. Pythagorova věta pro trojúhelník AEF tak dává rovnici $(3-k)^2 = k^2 + 1$, jež je po úpravě lineární a má (jediný) kořen $k = \frac{4}{3}$.

Odpověď: Hledaný poměr je 4 : 3.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za správný náčrtek nebo popis vzájemné polohy obou pravoúhelníků.

2. *Sestrojte lichoběžník, jsou-li dány délky* 9 *cm a* 12 *cm jeho úhlopříček, délka* 8 *cm střední příčky a vzdálenost* 2 *cm středů úhlopříček.*

Řešení. Zvolme označení podle obr. 1, KP je střední příčka v trojúhelníku ACD,



Obr. 1

proto $|KP| = \frac{1}{2}|DC|$, obdobně $|QL| = \frac{1}{2}|DC|$, $|PL| = \frac{1}{2}|AB|$, takže $|PQ| = \frac{1}{2}(a - c) = 2\,\mathrm{cm}$. Protože $|KL| = \frac{1}{2}(a + c) = 8\,\mathrm{cm}$, je $a = 10\,\mathrm{cm}$, $c = 6\,\mathrm{cm}$. Nejdříve sestrojíme trojúhelník AEC podle věty sss, na úsečce AE pak bod B, jím vedeme rovnoběžku s CE. Ta protne přímku vedenou bodem C rovnoběžně s AE v bodě D.

Řešitelé by si měli připomenout pojem střední příčky lichoběžníku, jejíž délka se rovná aritmetickému průměru délek základen.

Pomocné úlohy:

1. Sestrojte lichoběžník, jehož úhlopříčky jsou navzájem kolmé, mají délky 6 cm a 8 cm, jestliže se délka kratší základny rovná 2 cm.
   [Postup řešení je obdobný, nejdříve sestrojíme pravoúhlý trojúhelník ACE s danými odvěsnami.]
2. Střední příčka dělí lichoběžník na dva lichoběžníky, poměr jejich obsahů je q. Určete poměr délek základen lichoběžníku. Pro která q má úloha řešení? (41–C–S–3)
   [Označíme-li a, c délky základen, je $q = (3a+c) : (a+3c)$, neboť oba menší lichoběžníky mají poloviční výšku než původní a délka střední příčky, která je základnou vzniklých lichoběžníků, je $\frac{1}{2}(a + c)$. Je pak $a : c = (3q - 1) : (3 - q)$. Toto číslo je kladné, q je menší než 3 a větší než $\frac{1}{3}$, ale různé od 1 (a je různé od c).]
3. Určete obsah lichoběžníku, jestliže jsou dány délky a, c obou jeho základen, délka u jedné úhlopříčky a úhlopříčky jsou navzájem kolmé. (36–C–II–1)
   [Označení opět jako na obr., trojúhelníky CDA, CDB a BEC mají stejný obsah, proto

se obsah lichoběžníku rovná obsahu pravoúhlého trojúhelníku ACE. Přepona je $a+c$, jedna odvěsna je u, obsah je $\frac{1}{2}u\sqrt{(a+c)^2-u^2}$.]

4. *Dokažte, že pro délky a, b, c stran libovolného trojúhelníku platí*

$$\frac{(a^2+b^2)c^2-(a^2-b^2)^2}{abc^2} \leqq 2.$$

Pro které trojúhelníky nastane v předchozím vztahu rovnost?

Řešení. Uvedenou nerovnost upravíme na ekvivalentní tvar

$$0 \leqq (a^2-b^2)^2-(a^2-2ab+b^2)c^2,$$

tj.

$$0 \leqq (a-b)^2 \cdot [(a+b)^2-c^2].$$

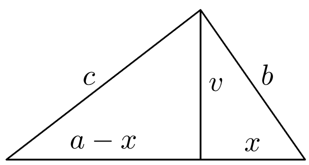
Protože $a+b>c$, platí tato nerovnost pro délky libovolného trojúhelníku, rovnost nastane, právě když $a=b$, tedy pro rovnoramenné trojúhelníky se základnou c.

Pomocné úlohy:

1. Odvoďte Heronův vzorec: Pro obsah S trojúhelníku s délkami stran a, b, c platí

$$16S^2 = (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

[Můžeme předpokládat, že při straně a jsou oba úhly ostré, pata výšky v rozdělí stranu a na úsečky délek $a-x$, x (obr.). Je tedy $2S = av$, $x^2+v^2=b^2$, $(a-x)^2+v^2=c^2$. Z posledních dvou rovnic vyloučíme x a vyjádříme v. Dostaneme $16S^2 = 4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$ a použijeme vícekrát vzorec pro rozdíl druhých mocnin.



2. Dokažte, že pro délky a, b, c stran trojúhelníku platí

$$a^2+b^2+c^2 < 2ab+2bc+2ca.$$

3. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b, c platí

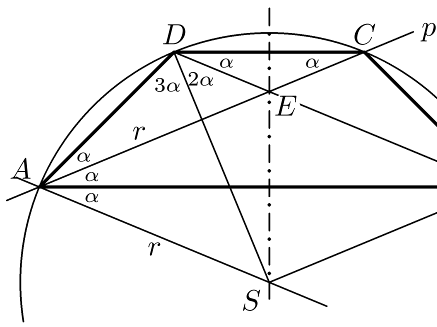
$$2ab+2bc+2ca \leqq 2(a^2+b^2+c^2).$$

[Nerovnost v úloze 2 je ekvivalentní s nerovností $0 < (a+b-c)c+(b+c-a)a+(c+a-b)b$, nerovnost v úloze 1 s nerovností $0 \leqq (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$.]

Literatura: S. Horák: *Nerovnosti v trojúhelníku*, 57. svazek ŠMM, MF Praha 1986.

6. *Do dané kružnice s poloměrem r vepište lichoběžník $ABCD$ s kratší základnou CD a průsečíkem úhlopříček E tak, aby platilo $|BC| = |CD|$ a $|AE| = r$.*

Řešení. Předpokládejme, že jsme již lichoběžník sestrojili (obr. 2), přímka SE je

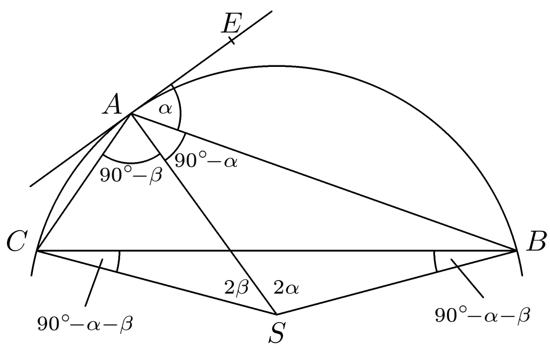


Obr. 2

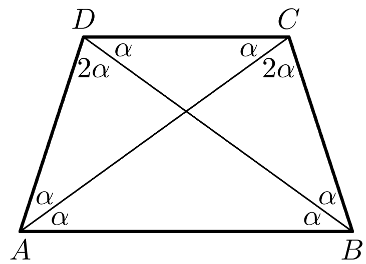
nutně jeho osou souměrnosti. Označíme-li α velikost úhlu ACD, mají stejnou velikost i úhly BDC, ABD a CAB, jak plyne ze souměrnosti lichoběžníku podle přímky SE a z rovnoběžnosti přímek CD a AB. Protože $|BC| = |CD|$, je trojúhelník BCD rovnoramenný, a proto se α rovnají i velikosti úhlů CBD a CAD. A protože $|AE| = |AS|$ a AB je kolmá na SE, rovnají se α také velikosti úhlů SAB a SBA. Z rovnoramenného trojúhelníku ASD plyne, že úhly SAD a SDA mají velikost 3α, velikost úhlu SDB je 2α (trojúhelník SDB je také rovnoramenný). Z trojúhelníku ACD pak plyne, že $8\alpha = 180^\circ$, $\alpha = 22{,}5^\circ$. Tím už je dána *konstrukce*: zvolíme na dané kružnici libovolně bod A, jím vedeme přímku p svírající s přímkou AS úhel $2\alpha = 45^\circ$, p protne kružnici k v bodě C různém od A. Na úsečce AC zvolíme bod E, $|AE| = r$. Body B, D sestrojíme jako body souměrně sdružené k bodům A, C podle přímky SE. Jiná volba bodu A by vedla pouze k řešení, které by vzniklo otočením řešení již sestrojeného. Podobně volba druhé přímky vedené bodem A pod úhlem 45° s přímkou AS vede k řešení souměrně sdruženému k sestrojenému podle přímky AS.

Pomocné úlohy:

1. Pomocí úhlů v rovnoramenných trojúhelnících dokažte větu o obvodovém a středovém úhlu (obr. a). Proveďte důkaz také v případě, kdy je bod S bodem trojúhelníku ABC.
2. Dokažte také, že polovině středového úhlu se rovná i úhel EAB, kde AE je tečna kružnice k (obr. a), tzv. úhel úsekový.



a



b

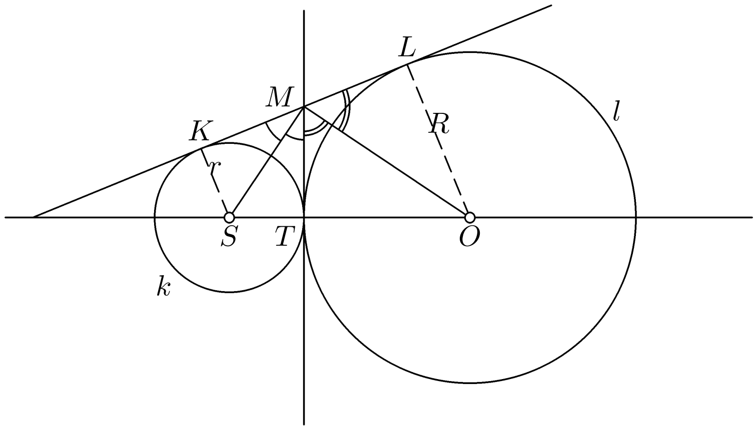
3. Čtyřúhelník má tři strany stejně dlouhé, délka čtvrté strany se rovná délce jedné i druhé úhlopříčky čtyřúhelníku. Určete velikosti vnitřních úhlů čtyřúhelníku. Jaký je to čtyřúhelník? (40–C–S–1)
[Zvolme označení vrcholů tak, že $|BC| = |CD| = |DA|$ (strany) a $|AB| = |AC| = |BD|$ (obr. b). Ze shodnosti trojúhelníků ABC, BAD (podle věty *sss*) plyne, že čtyřúhelník je rovnoramenný lichoběžník osově souměrný podle osy úsečky AB. Označíme-li α velikost úhlu ACD, velikost úhlu CBA je 2α a $\alpha = 36^\circ$. Velikosti vnitřních úhlů jsou 72° a 108°.]

Literatura: S. Horák: *Kružnice*, 16. svazek ŠMM, MF Praha 1966.

2. Kružnice $k(S,r)$ a $l(O,R)$ se vně dotýkají v bodě T. Jejich společná tečna v bodě T protíná jejich vnější společnou tečnu v bodě M. Dokažte, že trojúhelník SOM je pravoúhlý, a vyjádřete jeho obsah pomocí poloměrů r, R daných kružnic.

4. Sestrojte trojúhelník ABC takový, že výška a těžnice z vrcholu C dělí těžnici z vrcholu A na tři shodné úsečky, je-li dána délka strany AB a velikost výšky z vrcholu C.

2. Označme K, L body dotyku té společné tečny obou kružnic, na které leží také bod M a která je různá od společné tečny v bodě T (obr. 1). Ze souměrnosti podle přímky MS plyne shodnost úhlů KMS a TMS a ze souměrnosti podle přímky OM plyne shodnost úhlů LMO a TMO. Součet těchto čtyř úhlů je $180°$, proto $|\sphericalangle SMO| = |\sphericalangle SMT| + |\sphericalangle TMO| = 90°$. Tím je vyřešena první část úlohy.



Obr. 1

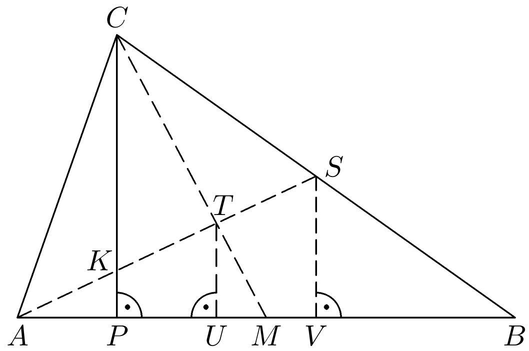
Užitím Pythagorovy věty pro trojúhelníky SOM, STM a OTM dostaneme pro výšku $v = |TM|$ trojúhelníku SOM rovnost

$$(r+R)^2 = (r^2+v^2) + (R^2+v^2),$$

odkud $v^2 = Rr$. (Tento vztah plyne i přímo z Eukleidovy věty pro trojúhelník SOM.)

Obsah trojúhelníku SOM je tedy $\frac{1}{2}(R+r)\sqrt{Rr}$.

4. Předpokládejme, že trojúhelník ABC splňuje podmínky úlohy. Označme S střed strany BC, M střed strany AB, T těžiště trojúhelníku, P patu výšky vedené bodem C, K průsečík těžnice AS a výšky CP. Protože těžiště T dělí úsečku AS v poměru $2:1$, tj. platí $|AT| = 2|TS|$, musí být bod K středem úsečky AT (obr. 2). Z rovnosti $|AK| = |KT| = |TS|$ navíc plyne, že $|AP| = |PU| = |UV|$, kde U, V jsou kolmé průměty bodů T, S na přímku AB. Jelikož S je střed strany BC, je V střed úsečky PB. Proto $|AP| = \frac{1}{5}|AB|$. Odtud již plyne *konstrukce*: Sestrojíme úsečku AB dané délky, na ní bod P tak, aby $|AP| = \frac{1}{5}|AB|$. Bodem P vedeme kolmici k AB, na ni naneseme od bodu P danou výšku a dostaneme tak bod C, a tím i trojúhelník ABC.

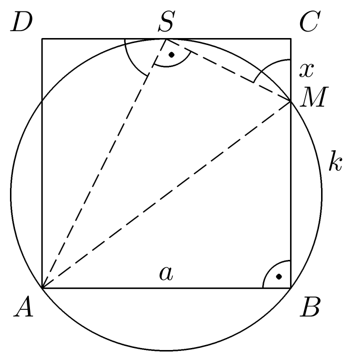


Obr. 2

Důkaz správnosti konstrukce. V sestrojeném trojúhelníku ABC uvažujme těžnice CM a AS, těžiště T a průsečík K úseček AS, CP. Označme U, V kolmé průměty bodů T, S na přímku AB. Protože $|CT| = 2|TM|$, je $|PU| = 2|UM|$, a proto $|PU| = \frac{2}{3}|PM|$. Označíme-li $c = |AB|$, je $|AP| = \frac{1}{5}c$, $|PV| = \frac{1}{2}(|AB| - |AP|) = \frac{2}{5}c$, $|PM| = \frac{1}{2}c - \frac{1}{5}c = \frac{3}{10}c$, $|PU| = \frac{2}{3}|PM| = \frac{1}{5}c$ a $|UV| = |PV| - |PU| = \frac{1}{5}c$. Protože $|AP| = |PU| = |UV|$, je také $|AK| = |KT| = |TS|$. Tím je správnost konstrukce dokázána.

2. V rovině je dán čtverec $ABCD$. Kružnice k prochází body A, B a dotýká se přímky CD. Označme M ($M \neq B$) průsečík kružnice k a strany BC. Určete poměr $|CM| : : |BM|$.

2. Protože střed kružnice k leží na ose strany AB, která je zároveň osou i protější strany CD, dotýká se kružnice k úsečky CD v jejím středu S (obr. 1). Protože úhel ABM je pravý, je AM průměrem kružnice k, a proto je pravý i úhel ASM. Odtud plyne, že $|\sphericalangle DSA| = 90° - |\sphericalangle CSM| = |\sphericalangle SMC|$, proto jsou trojúhelníky SMC a ASD podobné, takže $|CM| : |CS| = |DS| : |DA|$. Označíme-li $a = |DA|$ a $x = |CM|$, je $x : \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a : a$, tedy $x = \frac{1}{4}a$. Proto $|CM| : |BM| = 1 : 3$.



Obr. 1

Dodejme, že rovnost $x = \frac{1}{4}a$ lze odvodit i z Pythagorovy věty pro trojúhelníky AMB, AMS:

$$|AB|^2 + |BM|^2 = |AM|^2 = |AS|^2 + |SM|^2,$$

takže

$$a^2 + (a - x)^2 = \left(a^2 + (\tfrac{1}{2}a)^2\right) + \left((\tfrac{1}{2}a)^2 + x^2\right),$$

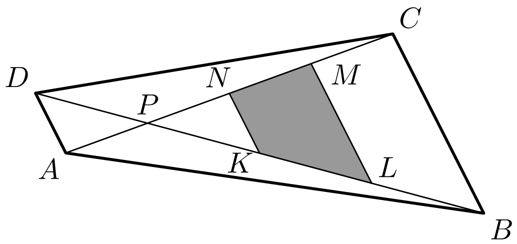
odkud po úpravě

$$x = \tfrac{1}{4}a.$$

Poznámka. Pokud žák zná pojem mocnosti bodu ke kružnici, může napsat $|CM| \cdot |CB| = |CS|^2$, odkud ihned plyne $|CM| = \frac{1}{4}a$.

2. *Ve čtyřúhelníku $ABCD$ se úhlopříčky protínají v bodě P, úhlopříčka AC je rozdělena body P, N a M na čtyři shodné úseky ($|AP| = |PN| = |NM| = |MC|$) a úhlopříčka BD je rozdělena body L, K a P na čtyři shodné úseky ($|BL| = |LK| = |KP| = |PD|$). Určete poměr obsahů čtyřúhelníků $KLMN$ a $ABCD$.*

Řešení. Trojúhelníky APD a NPK jsou souměrně sdružené podle středu P (obr. 1), AD a NK jsou tudíž rovnoběžné a $|AD| = |NK|$. Z rovnosti příslušných úseček dále plyne, že trojúhelníky KNP, LMP a BCP jsou podobné, proto $NK \parallel ML \parallel BC$ a navíc $|LM| = 2|KN|$ a $|BC| = 3|KN|$. Označíme-li s obsah trojúhelníku APD, je obsah trojúhelníku NKP roven s a obsah trojúhelníku MLP je $4s$ (má dvakrát větší výšku z vrcholu P než trojúhelník NKP z téhož vrcholu a jeho strana ML je dvakrát větší než strana NK). Obsah lichoběžníku $KLMN$ je proto $3s$.



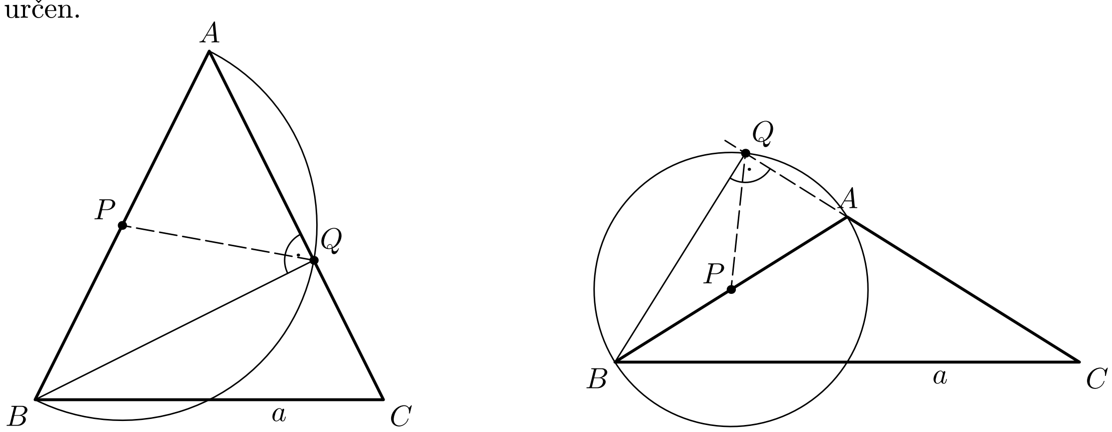
Obr. 1

Strana AP trojúhelníku APD je čtyřikrát menší než strana AC trojúhelníku ACD, výšky z vrcholu D jsou v obou trojúhelnících stejné, proto je obsah trojúhelníku ACD roven $4s$. Strana PN trojúhelníku PNK je čtyřikrát menší než strana AC trojúhelníku ACB, kdežto výška trojúhelníku PNK z vrcholu K je třikrát menší než výška trojúhelníku ABC z vrcholu B, proto je obsah trojúhelníku ACB roven $12s$. Obsah čtyřúhelníku $ABCD$ je roven součtu obsahů trojúhelníků ABC a ACD, tedy $16s$.

Poměr obsahů čtyřúhelníků $KLMN$ a $ABCD$ je roven $3 : 16$.

5. *Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou BC dané délky a, je-li dán střed P strany AB a bod Q $(Q \neq P)$, který je patou výšky z vrcholu B.*

Řešení. Úhel BQA je buď pravý, nebo $Q = A$. Proto bod Q leží na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem BA. (Na obr. 2 je znázorněn případ ostroúhlého i tupoúhlého trojúhelníku ABC.) Protože P je střed úsečky AB, je $|PQ|$ velikost poloměru této kružnice, proto velikost průměru $|AB|$ této kružnice je rovna $2|PQ|$. Trojúhelník ABC má délku ramene $2|PQ|$, a protože známe velikost základny, je tím jednoznačně určen.



Obr. 2

Odtud již plyne *konstrukce*. Nejdříve sestrojíme trojúhelník $A'B'C'$ shodný s trojúhelníkem ABC o velikostech stran $|A'B'| = |A'C'| = 2|PQ|$ a $|B'C'| = a$, který potom přemístíme tak, aby se střed strany $A'B'$ zobrazil na bod P a pata výšky z vrcholu B' na bod Q. To lze provést jednoznačně až na osovou souměrnost podle přímky PQ. Pokud tedy trojúhelník $A'B'C'$ existuje, má úloha dvě řešení souměrně sdružená podle osy PQ.

Diskuse je zřejmá. Trojúhelník ABC lze setrojit právě tehdy, když lze sestrojit rovnoramenný trojúhelník $A'B'C'$, tj. když $a < 4|PQ|$ (trojúhelníkové nerovnosti), v tomto případě má úloha právě dvě (shodná) řešení. Navíc pro $a < 2\sqrt{2}|PQ|$ bude trojúhelník ABC ostroúhlý, pro $a = 2\sqrt{2}|PQ|$ pravoúhlý a pro $2\sqrt{2}|PQ| < a < 4|PQ|$ tupoúhlý. *Důkaz* správnosti plyne z rozboru úlohy.

Jiné řešení. Označme R střed strany BC, ten je zároveň patou výšky z vrcholu A. Oba body Q a R tedy leží na Thaletově kružnici nad průměrem AB se středem P, proto $|PQ| = |PR| = \frac{1}{2}|AB|$. Jelikož úhel BQC je pravý, leží bod Q na Thaletově kružnici nad průměrem BC se středem R, takže $|RQ| = \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}a$. Trojúhelník PQR je proto podobný trojúhelníku ABC (koeficent podobnosti je $\frac{1}{2}$).

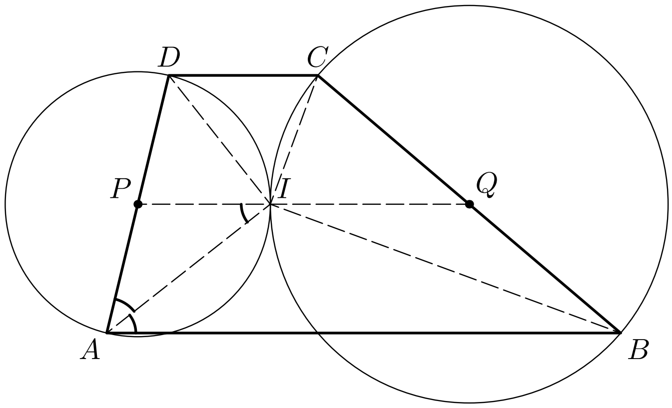
Při *konstrukci* nejdříve sestrojíme trojúhelník PQR. Na přímce rovnoběžné se střední příčkou PR procházející bodem Q najdeme bod $C \neq Q$ tak, aby $|RC| = \frac{1}{2}a$. Body A a B pak už sestrojíme snadno.

Pro dané body P, Q můžeme sestrojit třetí vrchol R trojúhelníku PQR dvěma způsoby. *Diskuse* je tedy stejná jako v předcházejícím řešení. *Důkaz* správnosti plyne z rozboru úlohy.

2. Nechť kružnice sestrojené nad rameny lichoběžníku jako nad průměry mají vnější dotyk. Dokažte, že dotykový bod těchto kružnic leží na ose úhlu, který obě ramena lichoběžníku svírají.

4. V rovině jsou dány body C, V, U takové, že $|CV| = 3\,\mathrm{cm}$, $|VU| = 3{,}5\,\mathrm{cm}$ a $|CU| = 4{,}5\,\mathrm{cm}$. Sestrojte ostroúhlý trojúhelník ABC tak, aby byl V průsečík jeho výšek a bod U byl souměrně sdružený s bodem A podle středu kružnice opsané trojúhelníku ABC.

2. Nechť $ABCD$ je takový lichoběžník se základnami AB a CD (obr. 1). Označme P střed ramene AD, Q střed ramene BC a I dotykový bod kružnic sestrojených nad

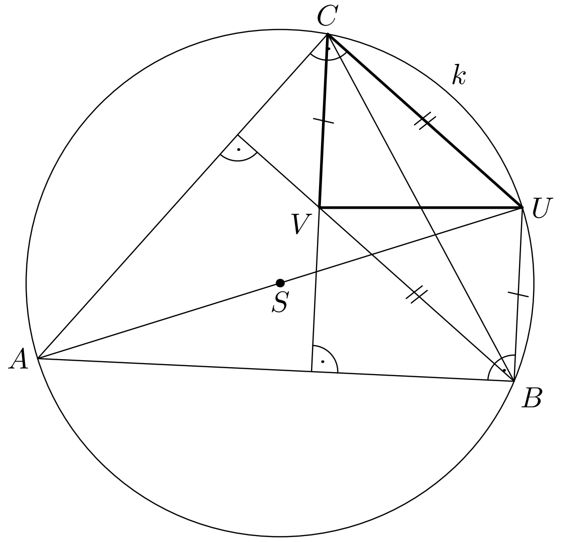


Obr. 1

rameny jako průměry. Bod P je středem kružnice sestrojené nad ramenem AD, proto jsou úsečky PA a PI shodné a API je rovnoramenný trojúhelník se základnou AI. Odtud plyne, že úhly PAI a AIP jsou shodné. Protože bod dotyku dvou kružnic leží na středné těchto kružnic, je I bodem střední příčky PQ lichoběžníku $ABCD$, která je rovnoběžná s jeho základnami. Úhly PIA a IAB jsou střídavé a mají proto stejnou velikost. Tedy úhly PAI a IAB jsou shodné a AI je osou úhlu DAB. Bod I leží na ose tohoto úhlu, proto má stejnou vzdálenost od jeho ramen AD a AB. Podobně se ukáže, že IB je osou úhlu ABC a bod I má stejnou vzdálenost od přímek AB a BC. Odtud již plyne, že bod I má stejnou vzdálenost od ramen AD a BC, a leží proto na ose úhlu, který tato ramena svírají.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za odhalení faktu, že I je bodem střední příčky, udělte 2 body.

4. Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, S střed kružnice k jemu opsané a V průsečík jeho výšek (obr. 2). Nechť U je bod souměrně sdružený s bodem A podle S. Bod U leží na kružnici k uvnitř toho oblouku BC, který neobsahuje bod A. Úsečka AU je průměrem kružnice k, proto podle Thaletovy věty jsou úhly UCA a UBA pravé. Jelikož výška BV je kolmá na stranu AC trojúhelníku ABC, jsou úsečky BV a UC rovnoběžné. Z podobného důvodu jsou rovnoběžné i úsečky CV a UB, takže $BUCV$ je rovnoběžník. Úsečky BC a UV mají tudíž společný střed.



Obr. 2

Odtud již plyne konstrukce. Sestrojíme bod B souměrně sdružený s bodem C podle středu úsečky UV. Bod A pak určíme jako průsečík kolmice k přímce BU procházející bodem B a kolmice k přímce CU procházející bodem C.

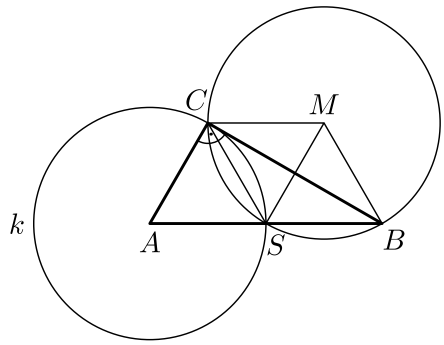
Ukažme nyní, že takto sestrojený trojúhelník ABC má všechny požadované vlastnosti. Bod B je sestrojen tak, že platí $BV \parallel UC$ a $CV \parallel UB$. Bod A je sestrojen tak, že platí $AB \perp UB$ a $AC \perp UC$, což znamená, že body B a C leží na Thaletově kružnici nad průměrem AU. Body A a U jsou tudíž souměrně sdružené podle středu této kružnice, která je opsána trojúhelníku ABC. Ze vztahů $AC \perp UC$ a $BV \parallel UC$ plyne $BV \perp AC$, takže bod V leží na výšce z vrcholu B ke straně AC sestrojeného trojúhelníku. Podobně ze vztahů $AB \perp UB$ a $CV \parallel UB$ plyne, že bod V leží na výšce z vrcholu C ke straně AB. Bod V je tedy průsečík výšek trojúhelníku ABC.

Úloha má za daných podmínek právě jedno řešení.

Za úplné řešení včetně konstrukce udělte 6 bodů. Za důkaz toho, že $CVBU$ je rovnoběžník, udělte 3 body, 2 body za popis konstrukce a 1 bod za důkaz její správnosti.

2. V rovině je dán pravoúhlý trojúhelník ABC takový, že kružnice $k(A; |AC|)$ protíná přeponu AB v jejím středu S. Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku BCS je shodná s kružnicí k.

2. Střed přepony S pravoúhlého trojúhelníku ABC je podle Thaletovy věty středem kružnice opsané tomuto trojúhelníku, platí tedy $|CS| = |AS| = |BS|$ (obr. 1). Jelikož body C a S leží na kružnici k, platí $|AS| = |AC|$, je proto trojúhelník ASC rovnostranný a velikost úhlu CSB je rovna $120°$.



Obr. 1

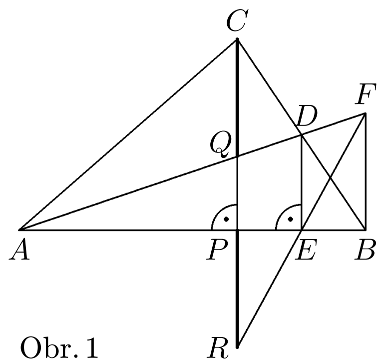
Je-li M střed kružnice opsané trojúhelníku BCS, platí $|CM| = |SM| = |BM|$, a protože $|CS| = |BS|$, jsou CMS a SMB shodné rovnoramenné trojúhelníky se základnami CS a BS. Velikost úhlu CSB je součtem velikostí shodných úhlů CSM a MSB, je proto velikost úhlu MSB rovna $\frac{1}{2} \cdot 120° = 60°$. Trojúhelník MSB je tedy rovnostranný a platí $|MS| = |BS|$.

Poloměr kružnice opsané trojúhelníku CSB je roven $|MS| = |BS| = |AS|$, což je poloměr kružnice k. Kružnice opsaná trojúhelníku BCS a kružnice k mají stejné poloměry, jsou tedy shodné. Tím je důkaz ukončen.

Poznámka: Po zjištění, že ASC je rovnostranný trojúhelník, je možné dokončit řešení i takto: je-li D bod souměrně sdružený s bodem A podle středu C, je trojúhelník ABC „polovinou“ rovnostranného trojúhelníku ABD, takže střed M jeho strany BD má od bodů B, S, C stejnou vzdálenost rovnou $\frac{1}{2}|AB|$.

Za úplné řešení je 6 bodů z toho 3 body za zdůvodnění, že ASC je rovnostranný trojúhelník.

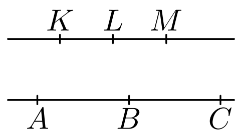
2. *Je dán trojúhelník ABC s ostrými vnitřními úhly při vrcholech A a B. Označme Q průsečík těžnice AD s výškou CP a E patu kolmice z bodu D na stranu AB. Dále nechť R je bod na polopřímce opačné k PC takový, že $|PR| = |CQ|$. Dokažte, že přímky AD a RE jsou různoběžné a že jejich průsečík leží na kolmici k přímce AB procházející bodem B.*



Obr. 1

Řešení. Ze zadání víme, že $|PR| = |CQ|$, proto je i $|QR| = |CP|$ (obr. 1). Úsečka DE je střední příčkou trojúhelníku CPB, proto je $|DE| = \frac{1}{2}|CP|$. Je tedy také $|DE| = \frac{1}{2}|QR|$. Protože je $DE \parallel QR$, nemůžou být úsečky RE a QD rovnoběžné (jinak by byl $REDQ$ rovnoběžník a platilo by $|DE| = |QR|$). Proto se přímky RE a QD protínají v bodě, který je na obrázku označen jako F, a úsečka DE je střední příčkou trojúhelníků CPB a QRF, jejichž strany CP a QR leží na stejné přímce. Proto je vzdálenost bodů F a B od přímky CR stejná, neboli přímky CR a FB jsou rovnoběžné, a tudíž přímka FB je (stejně jako přímka CR) kolmá k přímce AB.

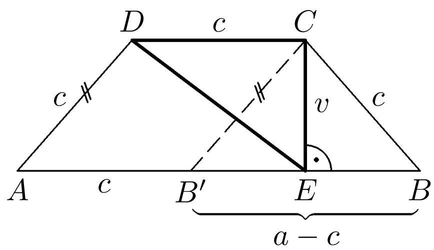
Návodné úlohy:



1. Na rovnoběžných přímkách jsou dány body A, B, C, K, L, M podle obrázku a přitom platí $|AB| = |BC| \neq |KL| = |LM|$. Vysvětlete, proč neplatí ani $AL \parallel BM$, ani $BK \parallel CL$. Označme P průsečík přímek AL, BM a Q průsečík přímek BK, CL. Dokažte, že $PQ \parallel KM \parallel AC$.
2. Je dán libovolný čtyřúhelník $ABCD$, jehož žádné dvě protilehlé strany nejsou rovnoběžné. Označme E střed strany AB a F střed strany CD. Protínají se vždy přímky AD, EF a BC v jednom bodě?

4. *Sestrojte lichoběžník $ABCD$ s výškou $3\,\mathrm{cm}$ a shodnými stranami BC, CD a DA, pro který platí: Na základně AB existuje takový bod E, že úsečka DE má délku $5\,\mathrm{cm}$ a dělí lichoběžník na dvě části se stejnými obsahy.*

Řešení. *Rozbor*: Označíme-li $|AB| = a$, $|CD| = c$ a výšku lichoběžníku v (obr. 2),



Obr. 2

můžeme pro jeho obsah S psát

$$S = \frac{1}{2}(a + c)v.$$

Obsah trojúhelníku AED je podle zadání roven

$$\frac{|AE| \cdot v}{2} = \frac{1}{2} \cdot S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(a + c)v,$$

odkud plyne, že $|AE| = \frac{1}{2}(a+c)$ (tj. úsečka AE má délku stejnou jako střední příčka lichoběžníku $ABCD$). Protože bod E leží na úsečce AB, platí

$$|EB| = |AB| - |AE| = a - \frac{1}{2}(a+c) = \frac{1}{2}(a-c),$$

takže je $a > c$. Označíme-li B' bod úsečky AB, pro který je $|AB'| = c$, bude $|B'B| = a-c$, a protože hledaný lichoběžník $ABCD$ je rovnoramenný, je rovnoramenný i trojúhelník $B'BC$, takže střed E úsečky $B'B$ je zároveň patou výšky z vrcholu C na základnu AB (obr. 2). Pomocí Pythagorovy věty vypočteme, že

$$c = \sqrt{|DE|^2 - v^2} = \sqrt{5^2 - 3^2}\,\mathrm{cm} = 4\,\mathrm{cm}.$$

Popis konstrukce:

1. $\triangle DEC$; $|DC| = 4\,\mathrm{cm}$, $|CE| = 3\,\mathrm{cm}$, $|\sphericalangle ECD| = 90°$;
2. p; $p \parallel CD$, $E \in p$;
3. $k(D, 4\,\mathrm{cm})$, $l(C, 4\,\mathrm{cm})$;
4. A; $A \in p \cap k$, úhel ADC je tupý;
5. B; $B \in p \cap l$, úhel BCD je tupý.

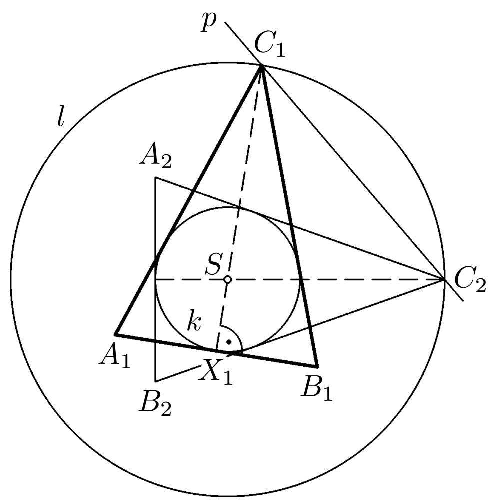
Úloha má jediné řešení.

Návodné úlohy:

1. Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$, jehož základny AB a CD mají délky $|AB| = 4v$ a $|CD| = 2v$, kde v je výška lichoběžníku, a jeho obsah je $48\,\mathrm{cm}^2$.
2. Je dán lichoběžník $ABCD$, kde $|BC| = |CD| = |DA|$. Na základně AB je dán bod E tak, že obsahy trojúhelníků AED, CDE a EBC jsou v poměru $3 : 2 : 1$. Určete velikosti vnitřních úhlů lichoběžníku $ABCD$.

6. *V rovině je dána přímka p a kružnice k. Sestrojte takový trojúhelník ABC, aby k byla kružnicí jemu vepsanou, její střed ležel ve čtvrtině jeho těžnice na stranu AB a aby vrchol C ležel na přímce p. Proveďte diskusi o počtu řešení v závislosti na vzájemné poloze přímky p a kružnice k.*

Řešení. *Rozbor*: Předpokládejme, že požadovaný trojúhelník ABC je sestrojen. Střed kružnice vepsané libovolnému trojúhelníku leží na osách jeho vnitřních úhlů. Podle zadání leží střed kružnice k na těžnici t_c trojúhelníku ABC, proto osa vnitřního úhlu při vrcholu C splývá s těžnicí t_c. Trojúhelník ABC je tedy rovnoramenný se základnou AB (obr. 3). Leží-li střed S kružnice k s poloměrem r ve čtvrtině těžnice t_c, leží tedy ve vzdálenosti r od strany AB a ve vzdálenosti $3r$ od vrcholu C. (Bod S nemůže mít od vrcholu C vzdálenost $\frac{1}{3}r$, neboť by bod C ležel ve vnitřní oblasti kružnice k, která je však trojúhelníku ABC vepsána, tudíž body A, B, C leží v její vnější oblasti.) Bod C je tedy průsečíkem přímky p a kružnice l se středem S a poloměrem $3r$.



Obr. 3

Popis konstrukce:
1. dáno: $k(S, r)$, p;
2. $l(S, 3r)$;
3. C; $C \in p \cap l$;
4. X; $X \in \rightarrow CS$, $|XC| = 4r$;
5. x; $x \perp XC$, $X \in x$;
6. tečny a, b z bodu C ke k (např. pomocí Thaletovy kružnice nad průměrem CS);
7. A, B; $A \in x \cap b$, $B \in x \cap a$.

Diskuse pro případ, že pořadí vrcholů A, B, C je proti směru pohybu hodinových ručiček:

úloha má dvě řešení $\iff$ $|Sp| < 3r$,
úloha má jedno řešení $\iff$ $|Sp| = 3r$,
úloha nemá žádné řešení $\iff$ $|Sp| > 3r$.

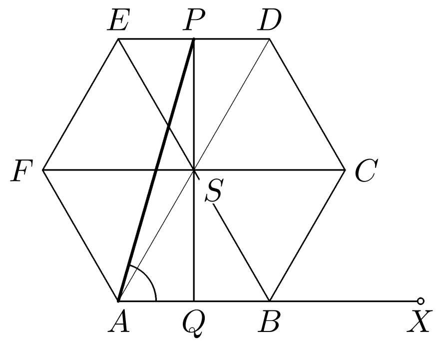
NÁVODNÉ ÚLOHY:
1. Jsou dány kružnice $k(S, r)$ a $l(O, \varrho)$, $S \neq O$, $r > \varrho$. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC tak, aby kružnice k mu byla opsána a kružnice l vepsána.
2. Dokažte, že v trojúhelníku ABC, který není rovnoramenný ani rovnostranný, leží osa vnitřního úhlu vycházející z vrcholu C mezi těžnicí t_c a výškou v_c.

Poznámka. V letáku se zadáními úloh je bohužel úloha 6 kategorie C zadána chybně — v textu chybí podmínka, že *vrchol C má ležet na dané přímce p.* Upozorněte laskavě žáky na tento nedostatek.

2. V rovině je dána úsečka AP. Sestrojte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ tak, aby bod P byl středem jeho strany DE.

4. Určete délku ramen rovnoramenného lichoběžníku se základnami délek 10 a 12 tak, aby délky všech jeho stran i úhlopříček byly vyjádřeny celými čísly.

2. V pravidelném šestiúhelníku $ABCDEF$ se středem S, v němž Q je střed strany AB a P je střed strany DE, známe velikost úhlu PAQ (obr. 1), neboť všechny pravidelné



Obr. 1

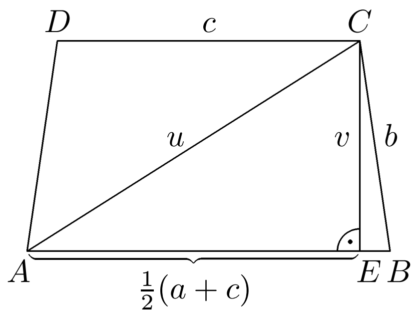
šestiúhelníky jsou navzájem podobné. V pravoúhlém trojúhelníku APQ tedy známe délku přepony AP a velikosti dvou úhlů (AQP je pravý úhel). Odtud vyplývá postup *konstrukce*:

1. úsečka AP,
2. Thaletova kružnice k nad průměrem AP,
3. polopřímka AX, jež svírá s úsečkou AP úhel velikosti PAQ (ten sestrojíme pomocí libovolného pravidelného šestiúhelníku),
4. bod Q jako průsečík kružnice k s polopřímkou AX,
5. střed S úsečky PQ,
6. kružnice se středem S a poloměrem $|SQ|$,
7. pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$.

Úloha má dvě řešení souměrně sdružená podle osy AP podle toho, v které polorovině s hraniční přímkou AP sestrojíme polopřímku AX (bod 3 konstrukce).

Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 2 body za rozbor, 2 body za popis konstrukce, 2 body za diskusi.

4. Označme E patu kolmice spuštěné z vrcholu C na základnu AB rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$ a jednotlivé délky úseček označme takto (obr. 2): $|AB| = a = 12$, $|BC| = b$, $|CD| = c = 10$, $|AC| = u$, $|CE| = v$. Potom je $|BE| = \frac{1}{2}(a - c) = 1$, $|AE| =$ $= \frac{1}{2}(a + c) = 11$.



Obr. 2

Podle Pythagorovy věty pro trojúhelníky AEC a EBC můžeme tedy psát

$$v^2 = u^2 - 11^2 = b^2 - 1^2, \tag{1}$$

neboli

$$u^2 - b^2 = 11^2 - 1^2 = 120.$$

Odtud je vidět, že čísla u a b jsou zároveň obě sudá, nebo obě lichá, proto v rozkladu

$$(u-b)(u+b) = 120 = 2 \cdot 60 = 4 \cdot 30 = 6 \cdot 20 = 10 \cdot 12$$

přicházejí v úvahu jen uvedené rozklady čísla 120 na sudé činitele.

Uvedeným rozkladům pak odpovídají čtyři soustavy rovnic pro neznámé u a b:

$$\begin{aligned} u-b&=2, & u-b&=4, & u-b&=6, & u-b&=10,\\ u+b&=60; & u+b&=30; & u+b&=20; & u+b&=12. \end{aligned}$$

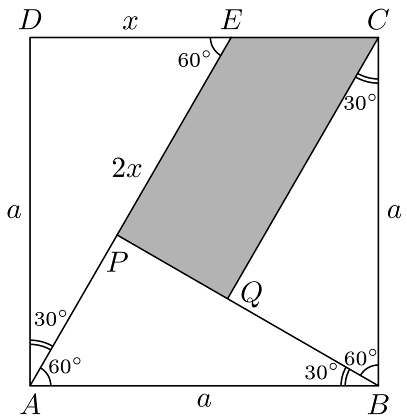
Jejich řešením (nejlépe tak, že vždy odečteme druhou rovnici od prvé) dostaneme pro délku ramene b lichoběžníku $ABCD$ čtyři možnosti, $b \in \{29, 13, 7, 1\}$. Z rovnosti (1) ovšem vidíme, že musí být $b > 1$, úloze tedy vyhovují jen první tři hodnoty.

Odpověď. Možná délka ramene lichoběžníku je buď 7, nebo 13, nebo 29.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za každé chybějící řešení odečtěte dva body. Ty odečtěte i za chybně uvedené řešení $b = 1$.

2. Na straně CD čtverce $ABCD$ je zvolen bod E tak, že úhel DAE má velikost $30°$. Bod P je patou kolmice vedené bodem B na přímku AE, bod Q patou kolmice vedené bodem C na přímku BP. Rozhodněte, zda je obsah lichoběžníku $PQCE$ menší než třetina obsahu čtverce $ABCD$.

2. Označme a délku strany čtverce $ABCD$. Trojúhelníky AED, BAP a CBQ jsou podobné podle věty uu, přičemž trojúhelníky BAP a CBQ jsou dokonce shodné (obr. 1). Trojúhelník AED je polovinou rovnostranného trojúhelníku o straně AE. Označíme-li $|ED| = x$, je $|AE| = 2x$.



Obr. 1

V pravoúhlém trojúhelníku AED platí $a = |AD| = \sqrt{|AE|^2 - |ED|^2} = \sqrt{4x^2 - x^2} = x\sqrt{3}$, odkud $x = \frac{\sqrt{3}}{3}a$. (Velikost x můžeme také spočítat užitím goniometrického vzorce $x : a = |ED| : |AD| = \operatorname{tg} 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.)

Trojúhelníky BAP a CBQ jsou polovinami rovnostranného trojúhelníku o straně a. Rovnostranný trojúhelník o straně délky a má výšku $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ a jeho obsah je $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. Součet obsahů trojúhelníků AED, BAP a CBQ je tudíž

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}a \cdot a + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{5\sqrt{3}}{12}a^2.$$

Jelikož obsah čtverce $ABCD$ je a^2, je poměr obsahů lichoběžníku $PQCE$ a čtverce $ABCD$ roven

$$\frac{a^2 - \frac{5}{12}\sqrt{3}a^2}{a^2} = \frac{12 - 5\sqrt{3}}{12},$$

což je číslo menší než 0,29.

Závěr: Obsah lichoběžníku $PQCE$ je menší než třetina obsahu čtverce $ABCD$.

Pro zajímavost uvedeme ještě jedno řešení, ve kterém ukážeme, že zkoumaný obsah lze odhadnout pomocí úvah o vzájemné poloze vhodných bodů (bez výpočtu délek a obsahu).

Jiné řešení. Protože nás zajímají jen poměry obsahů, můžeme předpokládat, že $ABCD$ je čtverec o straně 1. Ve středové souměrnosti podle středu O čtverce přejdou body E, P a Q v body, které označíme G, R a S (obr. 2). Z pravoúhlého trojúhelníku AED s úhlem 60° při vrcholu E plyne

$$|DE| = \frac{1}{2}|AE| > \frac{1}{2}|AD| = \frac{1}{2},$$

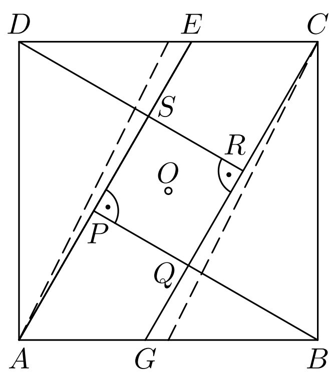
takže pro obsah rovnoběžníku $AGCE$ platí nerovnost

$$S(AGCE) < \frac{1}{2}.$$

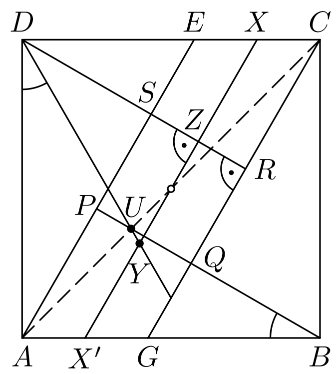
Zároveň se zdá, že shodné lichoběžníky $RCES$ a $AGQP$ mají větší obsah než čtverec $PQRS$. Pokud tomu tak opravdu je, musí být $S(RCES) > \frac{1}{3}S(AGCE)$, takže nutně platí

$$S(PQCE) = S(AGCE) - S(AGQP) = S(AGCE) - S(RCES) < \\ < \frac{2}{3}S(AGCE) < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

Tím bude úloha vyřešena.



Obr. 2



Obr. 3

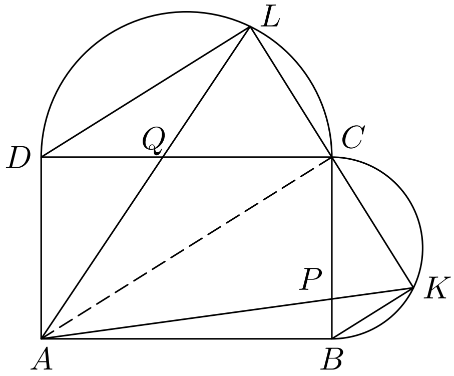
Strana SR čtverce $PQRS$ je současně výškou lichoběžníku $RCES$. Proto bude nerovnost $S(PQRS) < S(RCES)$ dokázána, když ověříme, že strana čtverce je kratší než střední příčka lichoběžníku. Tou je úsečka XZ, kde Z označuje střed úsečky SR, což je zároveň pata výšky rovnostranného trojúhelníku XYD (obr. 3). Označme U průsečík úhlopříčky AC daného čtverce s úsečkou PQ. Tímto bodem prochází i přímka DY, která je souměrně sdružená s přímkou BP právě podle osy AC, neboť $|\sphericalangle YDA| = |\sphericalangle ABP| = 30°$. To ovšem znamená, že bod Y, který je průsečíkem DU a XZ, leží vně čtverce $PQRS$! Proto je opravdu $|XZ| = |ZY| > |QR|$.

Obsah lichoběžníku $PQCE$ je tudíž menší než třetina obsahu čtverce $ABCD$.

Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 5 bodů buď za správné určení obsahu lichoběžníku $PQCE$, nebo za vhodný odhad, který postačí k rozhodnutí, která nerovnost je správná.

2. *Je dán obdélník $ABCD$. Nechť přímky p a q, které procházejí vrcholem A, protínají polokružnice vně připsané stranám BC a CD daného obdélníku po řadě v bodech K a L ($B \neq K \neq C \neq L \neq D$) a rovněž strany BC a CD po řadě v bodech P a Q tak, že trojúhelník ABP má stejný obsah jako trojúhelník KCP a zároveň trojúhelník AQD má stejný obsah jako trojúhelník CLQ. Dokažte, že body K, L, C leží na téže přímce.*

Řešení. Trojúhelníky ABP a KCP mají podle zadání stejné obsahy; připojíme-li ke každému z nich trojúhelník ACP (obr. 5), usoudíme, že stejné obsahy mají i trojúhelníky ABC a AKC. Protože strana AC je oběma těmto trojúhelníkům společná, obě k ní příslušné výšky musí být shodné. Body B a K tudíž mají stejnou vzdálenost od přímky AC (a leží ve stejné polorovině touto přímkou určené). To znamená, že $BK \parallel AC$. Podle Thaletovy věty ovšem platí $BK \perp CK$, takže platí rovněž $AC \perp CK$.



Obr. 5

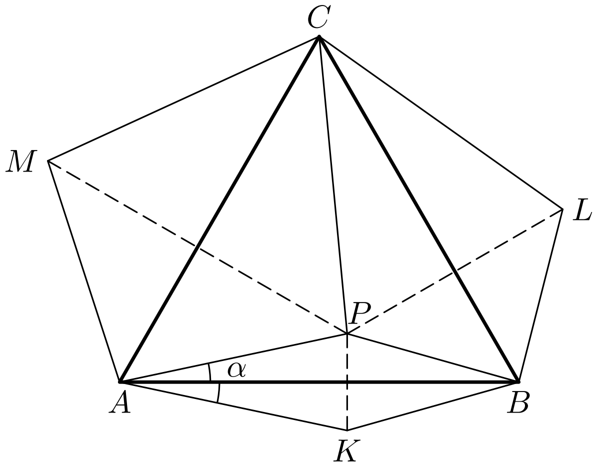
Podobně z rovnosti obsahů trojúhelníků AQD, CLQ a kolmosti přímek CL a DL odvodíme, že $AC \perp CL$. Dohromady to znamená, že úhel KCL je složen ze dvou pravých úhlů ACK a ACL. Body K a L tudíž leží na přímce, která prochází bodem C kolmo k úhlopříčce AC.

Návodné úlohy:

1. Nechť P značí průsečík úhlopříček obecného konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte, že přímky AB a CD jsou rovnoběžné, právě když trojúhelníky ADP a BCP mají stejný obsah. [Rovnost obsahů trojúhelníků ADP a BCP je ekvivalentní s rovností obsahů trojúhelníků ABC a ABD se společnou stranou AB.]
2. Sestrojte přímku, která prochází vrcholem A daného obdélníku $ABCD$, protíná stranu BC ve vnitřním bodě P a polokružnici vně připsanou straně BC v bodě K tak, že trojúhelníky ABP a KCP mají stejný obsah. [Podle první části řešení soutěžní úlohy odvoďte, že $CK \perp AC$.]

4. *Nechť P je libovolný vnitřní bod rovnostranného trojúhelníku ABC. Uvažujme obrazy K, L a M bodu P v osových souměrnostech s osami AB, BC a CA. Určete množinu všech bodů P takových, že trojúhelník KLM je rovnoramenný.*

Řešení. Označme $\alpha = |\sphericalangle BAP|$, $0° < \alpha < 60°$ (obr. 6). Protože úhly BAP



Obr. 6

a BAK jsou souměrně sdružené podle osy AB, platí rovněž $|\sphericalangle BAK| = \alpha$. Protože $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CAB| - |\sphericalangle BAP| = 60° - \alpha$, ze souměrnosti podle osy CA plyne rovnost $|\sphericalangle CAM| = 60° - \alpha$. Pro velikost úhlu KAM tudíž platí

$$|\sphericalangle KAM| = |\sphericalangle BAK| + |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle CAM| = \alpha + 60° + (60° - \alpha) = 120°.$$

Ze souměrností podle os AB a CA rovněž plynou rovnosti $|AK| = |AP| = |AM|$. Proto je trojúhelník KAM rovnoramenný a jeho úhel při hlavním vrcholu A má velikost $120°$. Podobně se zdůvodní, proč i trojúhelníky LBK a MCL jsou rovnoramenné a jejich vnitřní úhly při hlavních vrcholech B a C mají velikost $120°$.

Při posuzování podmínky, že trojúhelník KLM je rovnoramenný, musíme rozlišit, které z jeho stran KL, LM, MK jsou shodné. S ohledem na symetrii rozebereme podrobně pouze případ, kdy $|KL| = |MK|$. Z podobných rovnoramenných trojúhelníků KAM a LBK vyplývá, že jejich základny MK a KL jsou shodné, právě když jsou shodná jejich ramena AK a BK. Zapišme to pomocí délek úseček: rovnost $|KL| = |MK|$ platí, právě když platí rovnost $|AK| = |BK|$, neboli rovnost $|AP| = |BP|$. Poslední rovnost ovšem nastane, právě když bod P leží na ose strany AB. Obdobně se zjistí podmínky ekvivalentní rovnostem $|MK| = |LM|$ a $|KL| = |LM|$.

Odpověď: Trojúhelník KLM je rovnoramenný, právě když bod P leží na aspoň jedné z os stran daného rovnostranného trojúhelníku ABC. Hledaná množina je proto sjednocením tří úseček – výšek trojúhelníku ABC (bez jejich krajních bodů).

NÁVODNÉ ÚLOHY:

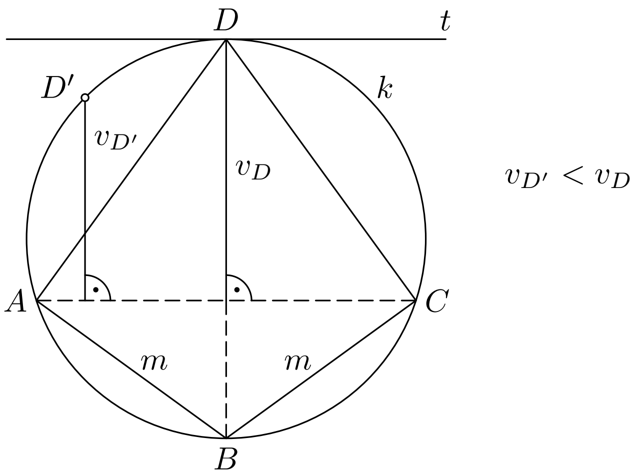
1. Nechť P je vnitřní bod konvexního úhlu BAC. Označme K a M obrazy bodu P v osových souměrnostech podle přímek AB a AC. Určete možné velikosti úhlu KAM v případech, kdy je úhel BAC a) ostrý, b) tupý. [a) $|\sphericalangle KAM| = 2 \cdot |\sphericalangle BAC|$, b) $|\sphericalangle KAM| = 360° - 2 \cdot |\sphericalangle BAC|$.]
2. Nechť P je vnitřní bod ostroúhlého trojúhelníku ABC s daným obsahem S. Označme K, L a M obrazy bodu P v osových souměrnostech podle přímek AB, BC a CA. Vypočtěte obsah šestiúhelníku $AKBLCM$ a zjistěte, kdy je tento šestiúhelník pravidelný. [Obsah je vždy $2S$, šestiúhelník je pravidelný pouze v případě, kdy je trojúhelník ABC rovnostranný a bod P je jeho těžiště.]

6. *Ze všech čtyřúhelníků, jež lze vepsat do kružnice o daném poloměru r a které mají dvě strany dané délky m, určete ten, který má největší obsah.*

Řešení. V celém řešení budeme předpokládat, že dané délky m a r splňují nerovnost $m < 2r$, jinak žádný čtyřúhelník požadovaných vlastností neexistuje. Strany délky m každého takového čtyřúhelníku jsou totiž tětivami kružnice o poloměru r a nejvýše jedna z nich může být jejím průměrem.

Zkoumané čtyřúhelníky rozdělíme do dvou skupin podle toho, zda jsou jejich strany dané délky m sousední, nebo protilehlé.

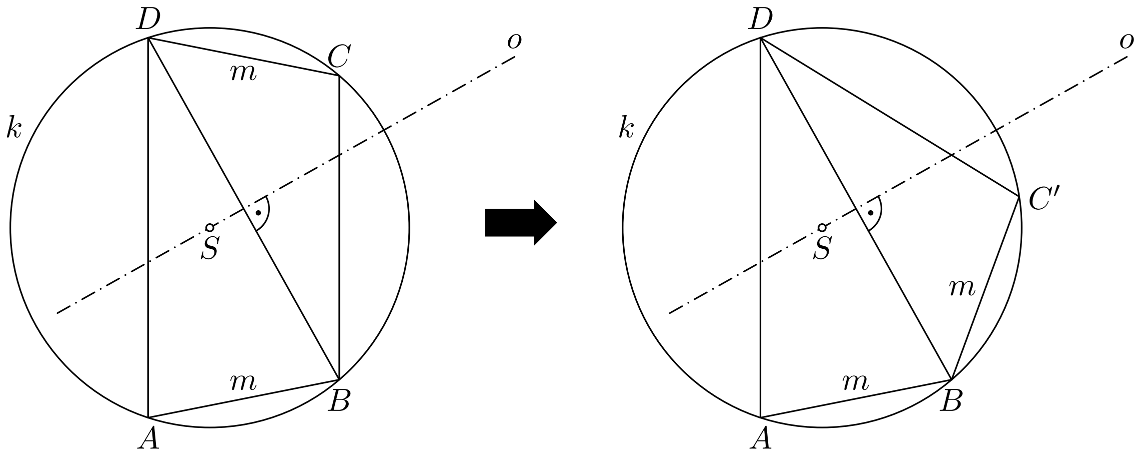
Libovolný čtyřúhelník z první skupiny označíme $ABCD$ tak, aby platilo $|AB| = |BC| = m$. Úhlopříčka rozdělí tento tětivový čtyřúhelník na dva trojúhelníky ABC a ACD (obr. 7), přitom je jasné, že první z nich, trojúhelník ABC, je poloměrem r



Obr. 7

opsané kružnice k a délkou m dvou jeho stran určen (až na shodnost) jednoznačně, takže má pevně určený obsah. Proto bude obsah takového čtyřúhelníku $ABCD$ maximální, právě když bude maximální obsah trojúhelníku ACD. Tento trojúhelník má určenou délku strany AC, takže jeho obsah bude maximální, právě když bude maximální jeho výška v_D z vrcholu D. Při pevné poloze trojúhelníku ABC bod D probíhá ten oblouk AC kružnice k, jenž neobsahuje bod B, takže výška v_D je zřejmě největší, právě když bod D je středem tohoto oblouku, leží tedy (stejně jako bod B) na ose úsečky AC. (Tvrzení zdůvodníme pomocí tečny t ke kružnici k, jež prochází nalezeným bodem D rovnoběžně s přímkou AC, obr. 7). Tak docházíme k závěru, že v první skupině má maximální obsah ten čtyřúhelník, který je deltoid (je-li $m \neq r\sqrt{2}$), respektive čtverec (je-li $m = r\sqrt{2}$).

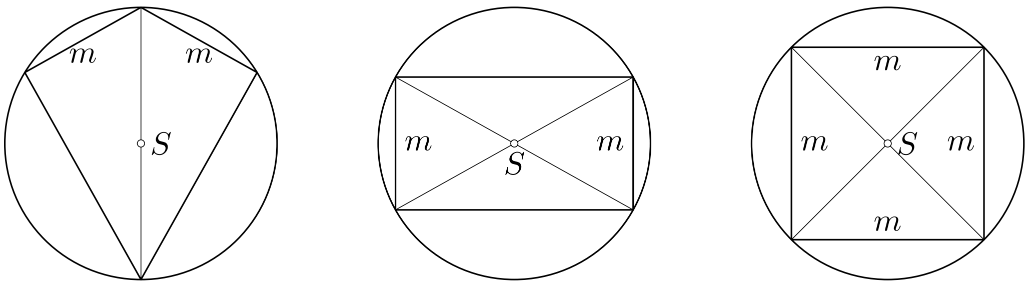
Přejděme nyní ke čtyřúhelníkům druhé skupiny. Libovolný z nich označme $ABCD$ tak, aby platilo $|AB| = |CD| = m$ (obr. 8).



Obr. 8

Obrázek ukazuje, jak k takovému čtyřúhelníku $ABCD$ sestrojit pomocný čtyřúhelník $ABC'D$, který má stejný obsah jako $ABCD$, je vepsán do téže kružnice k a má sousední strany AB a BC' dané délky m. Konstrukci teď popíšeme a zmíněné vlastnosti čtyřúhelníku $ABC'D$ podrobně zdůvodníme. Bod C' sestrojíme jako obraz bodu C v souměrnosti podle osy o úsečky BD; protože je kružnice k souměrná podle osy každé své tětivy, platí $C' \in k$. Trojúhelníky BCD a $DC'B$ jsou souměrně sdružené podle osy o, takže mají stejný obsah, tudíž stejný obsah mají i čtyřúhelníky $ABCD$ a $ABC'D$. Ze zmíněné souměrnosti rovněž plynou rovnosti $|CD| = |BC'|$ a $|BC| = |DC'|$, takže čtyřúhelníky $ABCD$ a $ABC'D$ se liší pouze „prohozením“ dvou sousedních stran. Tím jsou potřebné vlastnosti čtyřúhelníku $ABC'D$ zdůvodněny. Jak už víme z předchozího odstavce, čtyřúhelník $ABC'D$ má největší možný obsah, právě když platí rovnost $|C'D| = |AD|$, kterou můžeme přepsat jako rovnost $|BC| = |AD|$. Ta nastane, právě když je čtyřúhelník $ABCD$ rovnoběžník (neboť od počátku předpokládáme, že $|AB| = |CD|$). Každý rovnoběžník vepsaný do kružnice je ale pravoúhelník (součet protilehlých vnitřních úhlů tětivového čtyřúhelníku je $180°$, takové úhly jsou ale v případě rovnoběžníku shodné, a tedy pravé). Shrňme výsledek tohoto odstavce: ve druhé skupině čtyřúhelníků má maximální obsah ten čtyřúhelník, který je obdélník (je-li $m \neq r\sqrt{2}$), respektive čtverec (je-li $m = r\sqrt{2}$.)

Celkový závěr: Hledané čtyřúhelníky s maximálním obsahem tvoří v případě $m < 2r$, $m \neq r\sqrt{2}$, dvě skupiny: skupinu shodných deltoidů a skupinu shodných obdélníků; v případě $m = r\sqrt{2}$ jsou všechny hledané čtyřúhelníky shodné čtverce (obr. 9). (V případě $m \geqq 2r$ je množina uvažovaných čtyřúhelníků prázdná).



Obr. 9

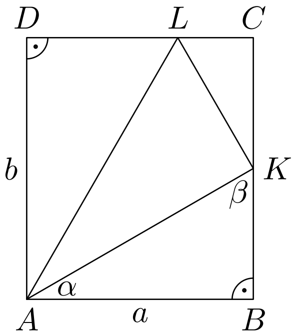
NÁVODNÉ ÚLOHY:

1. V kružnici k o poloměru 7 je dána tětiva AB délky 13. Zjistěte, jaký největší obsah může mít čtyřúhelník $AXBY$, leží-li jeho vrcholy X, Y na kružnici k. [Největší obsah 91 má deltoid, jehož úhlopříčka XY je průměrem kružnice k.]
2. Do jedné kružnice jsou vepsány dva pětiúhelníky $ABCDE$ a $ABFGH$, přičemž platí $|AB| = 4$, $|BC| = |GH| = 5$, $|CD| = |BF| = 6$, $|DE| = |HA| = 7$ a $|EA| = |FG| = 8$. Dokažte, že oba pětiúhelníky mají stejný obsah. [Rozložte pětiúhelníky na rovnoramenné trojúhelníky pomocí úseček spojujících jejich vrcholy se středem opsané kružnice.]

1. V rovině je dán obdélník $ABCD$, kde $|AB| = a < b = |BC|$. Na jeho straně BC existuje bod K a na straně CD bod L tak, že daný obdélník je úsečkami AK, KL a LA rozdělen na čtyři navzájem podobné trojúhelníky. Určete hodnotu poměru $a : b$.

3. Do kružnice o poloměru $r = 6$ vepište osmiúhelník $ABCDEFGH$, jehož strany AB, CD, EF a GH mají po řadě délky 3, 4, 5 a 6 a strany BC, DE, FG a HA jsou shodné.

1. V pravoúhlém trojúhelníku ABK označme $\alpha = |\sphericalangle BAK|$, $\beta = |\sphericalangle AKB| = 90° - \alpha$ (obr. 1). Stejné vnitřní úhly $90°$, α, β mají i trojúhelníky AKL a ADL, neboť jsou dle zadání



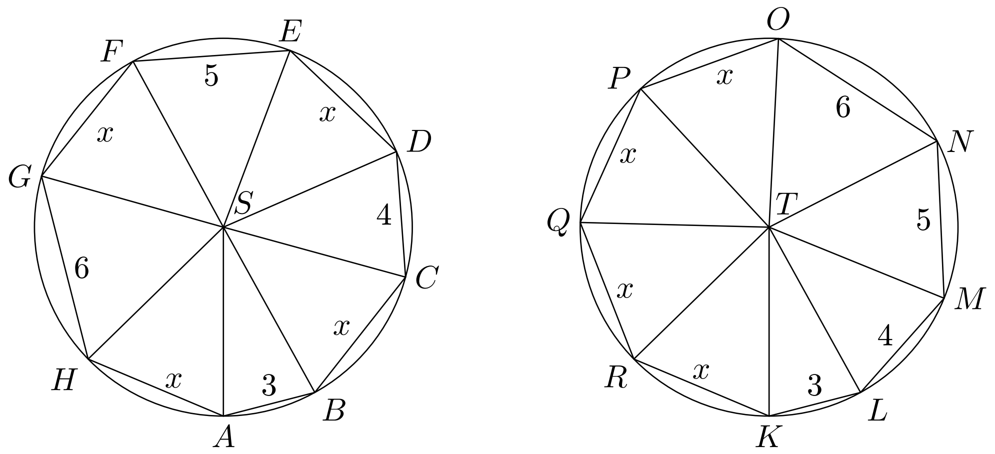
Obr. 1

trojúhelníku ABK podobné. Všimněme si jejich (ostrých) úhlů u společného vrcholu A. Protože $|\sphericalangle KAD| = 90° - \alpha = \beta$, jsou oba úhly KAL a LAD menší než β, takže se rovnají úhlu α. Pravý úhel BAD je tedy polopřímkami AK, AL rozdělen na tři shodné úhly velikosti α, odkud $\alpha = 30°$ (a $\beta = 60°$). Z pravoúhlých trojúhelníků ADL a ABK pak vyplývá, že $|AK| = |AB|/\cos 30° = 2a/\sqrt{3}$ a $|AL| = |AD|/\cos 30° = 2b/\sqrt{3}$. Odtud s ohledem na podmínku $a < b$ plyne nerovnost $|AK| < |AL|$, tudíž přeponou v trojúhelníku AKL je AL (delší z obou stran AK, AL). Pro poměr délek odvěsny AK a přepony AL pak platí $\cos 30° = |AK| : |AL| = a : b$, takže $a : b = \sqrt{3} : 2$.

Úlohu lze řešit mnoha obměněnými postupy, například rozlišit dva případy, kdy trojúhelník KAL má pravý úhel při vrcholu K respektive L, a v každém z nich vyjádřit vnitřní úhly všech čtyř podobných trojúhelníků (ve druhém případě pak ale vyjde $a : b = 2 : \sqrt{3} > 1$, což odporuje zadání úlohy).

Za úplné řešení udělte 6 bodů; 2 body za určení úhlů α, β, 2 body za výpočet poměru $a : b$, 2 body za výpočet či úvahu vylučující opačný poměr (tedy možnost $|\sphericalangle ALK| = 90°$).

3. *Rozbor*: Kromě hledaného osmiúhelníku $ABCDEFGH$ uvážíme ještě pomocný osmiúhelník $KLMNOPQR$, který je rovněž vepsán do kružnice o poloměru $r = 6$ a jehož strany splňují podmínky: $|KL| = 3$, $|LM| = 4$, $|MN| = 5$, $|NO| = 6$, $|OP| = |PQ| = |QR| = |RK|$ (obr. 2). Označme S, resp. T střed kružnice s vepsaným osmiúhelníkem



Obr. 2

$ABCDEFGH$, resp. $KLMNOPQR$. Podle věty *sss* platí shodnosti $\Delta ABS \simeq \Delta KLT$, $\Delta CDS \simeq \Delta LMT$, $\Delta EFS \simeq \Delta MNT$, $\Delta GHS \simeq \Delta NOT$, a proto jsou shodné středové úhly ASB a KTL, CSD a LTM, ESF a MTN, GSH a NTO. Dále podle věty *sss* jsou shodné trojúhelníky BCS, DES, FGS a HAS, stejně jako trojúhelníky OPT, PQT, QRT a RKT. Ze shodnosti jejich úhlů při hlavním vrcholu S, resp. T proto plyne

$$|\sphericalangle BSC| = \frac{360^\circ - |\sphericalangle ASB| - |\sphericalangle CSD| - |\sphericalangle ESF| - |\sphericalangle GSH|}{4} =$$

$$= \frac{360^\circ - |\sphericalangle KTL| - |\sphericalangle LTM| - |\sphericalangle MTN| - |\sphericalangle NTO|}{4} = |\sphericalangle OTP|.$$

Využili jsme toho, že středy S a T jsou *vnitřními* body obou osmiúhelníků (tudíž součet všech osmi středových úhlů je v obou případech 360°), neboť v opačném případě by jeden z osmi středových úhlů byl roven součtu sedmi ostatních; musel by to být úhel příslušný tětivě délky 6, ten je však zřejmě menší než součet úhlů příslušných tětivám délek 3, 4 a 5. Trojúhelníky BCS a OPT jsou proto shodné podle věty *sus*, tudíž čtveřice shodných stran obou osmiúhelníků mají jednu společnou délku. Dokážeme-li proto sestrojit pomocný osmiúhelník $KLMNOPQR$, je konstrukce osmiúhelníku $ABCDEFGH$ nasnadě.

Konstrukce: Na libovolné kružnici $t(T; 6)$ sestrojíme v jednom směru body K, L, M, N a O tak, aby $|KL| = 3$, $|LM| = 4$, $|MN| = 5$ a $|NO| = 6$. Úhel KTO (ten, který neobsahuje body L, M, N) pak rozdělíme na čtyři shodné díly: nejprve sestrojíme průsečík Q kružnice t s osou úhlu KTO, pak průsečíky P, R kružnice t s osami úhlů OTQ resp. QTK. Poté přistoupíme ke konstrukci hledaného osmiúhelníku $ABCDEFGH$: na kružnici $k(S, 6)$ zvolíme bod A a pak na ní v jednom směru sestrojíme postupně body B, C, …, H tak, aby $|AB| = 3$, $|BC| = |OP|$, $|CD| = 4$, $|DE| = |OP|$, $|EF| = 5$, $|FG| = |OP|$, $|GH| = 6$.

Důkaz správnosti: Ze shodnosti sedmi dvojic trojúhelníků $\Delta ABS \simeq \Delta KLT$, $\Delta BCS \simeq \simeq \Delta OPT, \dots, \Delta GHS \simeq \Delta NOT$ plyne shodnost úhlů HSA a RTK, a tedy i shodnost osmé dvojice trojúhelníků $\Delta HAS \simeq \Delta RKT$. Proto mají délky stran sestrojeného osmiúhelníku $ABCDEFGH$ (shodné se stranami $KLMNOPQR$) všechny potřebné vlastnosti.

Poznámka: O čtyřúhelníku $KLMNOPQR$ jsme nemuseli v celém řešení vůbec mluvit a vést úvahy takto: úhly shodné se středovými úhly ASB, CSD, ESF, GSH dokážeme sestrojit, pro společnou velikost ω shodných středových úhlů BSC, DSE, FSG a HSA pak platí rovnice

$$4\omega + |\sphericalangle ASB| + |\sphericalangle CSD| + |\sphericalangle ESF| + |\sphericalangle GSH| = 360^\circ, \tag{1}$$

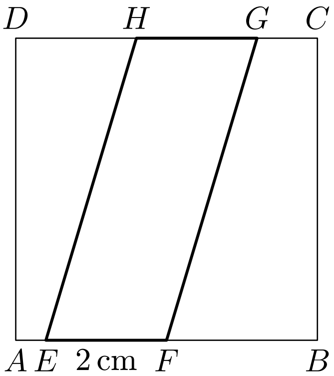
kterou lze snadno konstrukčně vyřešit; osmiúhelník $KLMNOPQR$ je ovšem k tomuto účelu ideální pomůckou.

Za sestavení rovnice (1) nebo nápad s pomocným osmiúhelníkem udělte 3 body (z toho 1 bod za správná odůvodnění potřebných shodností úhlů a trojúhelníků pomocí vět *sss* či *sus*), další 2 body za popis konstrukce řešení. Pokud v jinak úplném řešení chybí jakékoli zdůvodnění, že bod S je vnitřním bodem osmiúhelníku $ABCDEFGH$, strhněte 1 bod. Důkaz správnosti konstrukce (jež je zřejmá) není nutné uvádět.

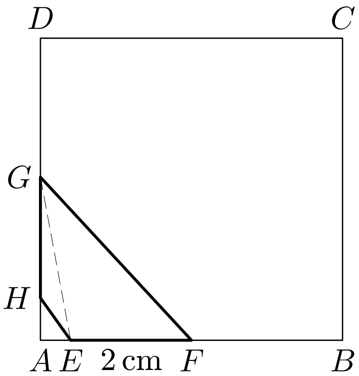
2. Je dán čtverec o straně délky 5 cm. Mezi všemi čtyřúhelníky, které leží v tomto čtverci tak, že dvě jejich strany mají délku 2 cm a leží na hranici čtverce, určete všechny ty, které mají maximální obsah.

2. Čtyřúhelník $EFGH$ můžeme do daného čtverce $ABCD$ umístit třemi způsoby:

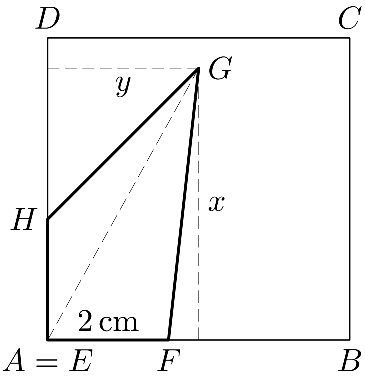
1. Dvě strany délky $2\,\mathrm{cm}$ leží na protilehlých stranách daného čtverce (obr. 1). Obsah každého takového čtyřúhelníku (rovnoběžníku) je $S = 5 \cdot 2\,\mathrm{cm}^2 = 10\,\mathrm{cm}^2$.



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

2. Obě strany délky $2\,\mathrm{cm}$ leží na sousedních stranách daného čtverce a přitom jsou protilehlými stranami čtyřúhelníku $EFGH$ (obr. 2). Obsah takového čtyřúhelníku je

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}|EF| \cdot |AG| + \frac{1}{2}|GH| \cdot |AE| = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\,\mathrm{cm} \cdot |AG| + \frac{1}{2} \cdot 2\,\mathrm{cm} \cdot |AE| \leqq \big(5 + (5-2)\big)\,\mathrm{cm}^2 = 8\,\mathrm{cm}^2 < 10\,\mathrm{cm}^2. \end{aligned}$$

3. Obě strany délky 2 cm leží na sousedních stranách daného čtverce a přitom jsou sousedními stranami čtyřúhelníku $EFGH$ (obr. 3). Označíme-li po řadě x a y vzdálenosti bodu G od stran AB a AD (tedy výšku trojúhelníku EFG na stranu EF a výšku trojúhelníku EHG na stranu EH), je obsah takového čtyřúhelníku

$$S = \frac{1}{2}|EF| \cdot x + \frac{1}{2}|AH| \cdot y \leqq 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 10\,\mathrm{cm}^2.$$

Přitom rovnost nastane, právě když $x = y = 5\,\mathrm{cm}$, tj. právě když $G = C$.

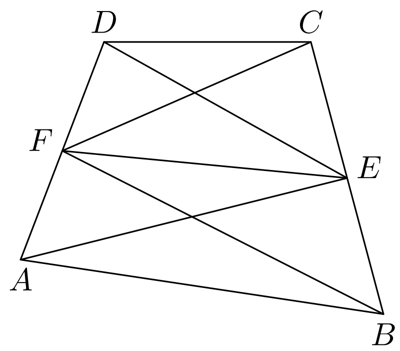
Závěr: Největší možný obsah ($10\,\mathrm{cm}^2$) mají všechny rovnoběžníky, jejichž dvě strany délky 2 cm leží na protějších stranách daného čtverce, a čtyři deltoidy, jejichž jedna úhlopříčka je zároveň úhlopříčkou daného čtverce.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Při postupu řešení analogickém uvedenému oceňte každou ze tří možností 2 body. Bod strhněte při absenci jasného závěru.

3. *V libovolném konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ označme E střed strany BC a F střed strany AD. Dokažte, že trojúhelníky AED a BFC mají stejný obsah, právě když jsou strany AB a CD rovnoběžné.*

Řešení. Příčka EF daného čtyřúhelníku $ABCD$ je v každém z trojúhelníků AED i BFC těžnicí (obr. 1), což znamená, že pro jejich obsahy platí

$$\begin{aligned} S(AED) &= 2S(FED) = 2S(FEA), \\ S(BFC) &= 2S(FEC) = 2S(FEB). \end{aligned} \tag{1}$$



Obr. 1

Oba trojúhelníky FED, FEC mají společnou stranu FE a jejich obsahy jsou stejné, právě když $CD \parallel FE$. Podobně i trojúhelníky FEA, FEB mají společnou stranu FE

a jejich obsahy jsou stejné, právě když $AB \parallel FE$. Proto mají-li trojúhelníky AED a BFC stejný obsah, je $CD \parallel FE$ a $AB \parallel FE$, tedy $AB \parallel CD$.

Je-li obráceně $AB \parallel CD$, je střední příčka EF lichoběžníku $ABCD$ rovnoběžná s oběma základnami AB a CD, takže dle předchozí úvahy $S(FED) = S(FEC)$ a podle (1) také $S(AED) = S(BFC)$. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

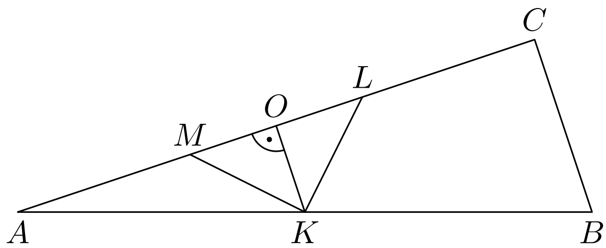
Návodné úlohy:

1. Dokažte, že v každém lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD jsou si rovny obsahy trojúhelníků ADP a BCP, kde P je průsečík úhlopříček lichoběžníku. [Uvažte, že právě o zmíněné trojúhelníky se liší trojúhelníky ABC a ABD.]
2. Dokažte, že v každém trojúhelníku ABC je obsah trojúhelníků ABP, BCP a CAP stejný, právě když P je těžištěm trojúhelníku ABC. [$S(APC) = S(BPC)$, právě když bod P leží na těžnici z vrcholu C.]

6. *V trojúhelníku ABC se stranou BC délky 2 cm je bod K středem strany AB. Body L a M rozdělují stranu AC na tři shodné úsečky. Trojúhelník KLM je rovnoramenný a pravoúhlý. Určete délky stran AB, AC všech takových trojúhelníků ABC.*

Řešení. Body L a M na straně AC zvolíme tak, aby $|AM| = |ML| = |LC|$. Těžnice KO trojúhelníku KLM je střední příčkou trojúhelníku ABC, platí tedy $|KO| = \frac{1}{2}|BC|$, $|AC| = 6|MO|$ a $|AB| = 2|AK|$. Rozlišíme tři možnosti:

(a) Nechť $|KL| = |KM|$ (obr. 2). Pak je $|\sphericalangle MKL| = |\sphericalangle MOK| = 90°$ a $|MO| =$



Obr. 2

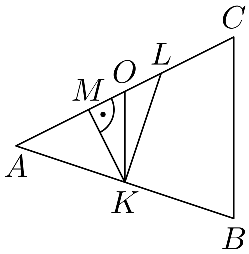
$= |KO|$. Z Pythagorovy věty pro trojúhelník AKO plyne

$$|AK| = \sqrt{(3|MO|)^2 + |KO|^2} = \sqrt{10|KO|^2} = \sqrt{10}|KO| = \tfrac{1}{2}\sqrt{10}|BC|,$$

takže

$$|AB| = 2|AK| = \sqrt{10}|BC| = 2\sqrt{10}\,\text{cm},$$
$$|AC| = 6|MO| = 6|KO| = 3|BC| = 6\,\text{cm}.$$

(b) Nechť $|ML| = |MK|$ (obr. 3). Pak je $|\sphericalangle KML| = 90°$ a $|AM| = |ML| =$



Obr. 3

$= |MK| = 2|MO|$. Z Pythagorovy věty pro trojúhelník KMO plyne

$$|KO| = \sqrt{|MO|^2 + (2|MO|)^2} = \sqrt{5}|MO|,$$

takže

$$|AC| = 6|MO| = \frac{3}{\sqrt{5}}|BC| = \frac{6\sqrt{5}}{5}\,\text{cm}.$$

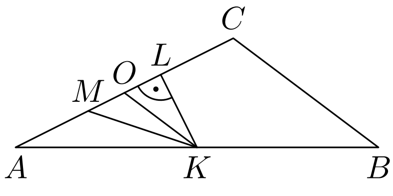
Z Pythagorovy věty pro trojúhelník AKM plyne

$$|AK| = \sqrt{|AM|^2 + |MK|^2} = \sqrt{2}|MK| = 2\sqrt{2}|MO| = \frac{2\sqrt{10}}{5}|KO| = \frac{\sqrt{10}}{5}|BC|,$$

takže

$$|AB| = 2|AK| = \frac{2\sqrt{10}}{5}|BC| = \frac{4\sqrt{10}}{5}\,\text{cm}.$$

(c) Nechť $|ML| = |KL|$ (obr. 4). Pak je $|\sphericalangle MLK| = 90°$. Je tedy $|KL| = |ML| =$



Obr. 4

$= 2|LO| = 2|MO|$ a $|AL| = |AM| + |ML| = 4|MO|$. Z Pythagorovy věty pro trojúhelník KLO tak plyne

$$|KO| = \sqrt{|LO|^2 + (2|LO|)^2} = \sqrt{5}|LO|,$$

takže

$$|AC| = 6|MO| = 6|LO| = \frac{3}{\sqrt{5}}|BC| = \frac{6\sqrt{5}}{5}\,\text{cm}.$$

Z Pythagorovy věty pro trojúhelník AKL plyne

$$|AK| = \sqrt{|AL|^2 + |LK|^2} = \sqrt{(4|LO|)^2 + (2|LO|)^2} =$$
$$= 2\sqrt{5}|LO| = 2|KO| = |BC| = 2\,\text{cm},$$

takže

$$|AB| = 2|AK| = 2|BC| = 4\,\text{cm}.$$

Návodné úlohy:

1. Trojúhelník má délky stran 4 cm, 5 cm, 6 cm. Určete velikosti výšek a těžnic tohoto trojúhelníku. [Návod: Označme x vzdálenost paty výšky od středu strany délky 4, pak podle Pythagorovy věty $(2+x)^2 + 6^2 = (2-x)^2 + 5^2$, atd.]
2. Obdélník $ABCD$ má strany délek a, b. Bod M je patou kolmice vedené vrcholem B k úhlopříčce AC. Vypočtěte délky úseček AM, CM, BM. [$|MB| = ab/\sqrt{a^2+b^2}$, $|AM| = \sqrt{a^2 - |MB|^2}$.]

3. Libovolným vnitřním bodem P úhlopříčky AC daného obdélníku $ABCD$ jsou vedeny rovnoběžky s jeho stranami, které protínají úsečky AB, BC, CD a DA po řadě v bodech K, L, M a N. Dokažte, že

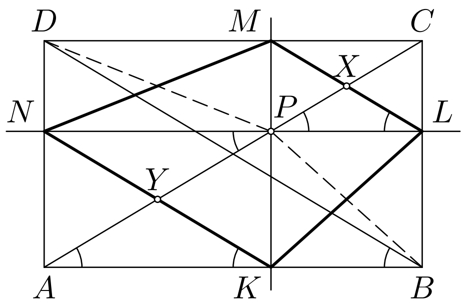
a) přímky LM a KN jsou rovnoběžky,

b) vzdálenost rovnoběžek LM a KN je konstantní (nezávisí na volbě bodu P),

c) pro obvod o čtyřúhelníku $KLMN$ platí nerovnost $o \geqq 2|AC|$.

4. Popište konstrukci lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD, kterému je možno opsat kružnici s poloměrem $r = 5\,\mathrm{cm}$, je-li dána vzdálenost $d = 2\,\mathrm{cm}$ jejího středu od průsečíku úhlopříček a $|\sphericalangle BAC| = 70°$.

3. a) AC a BD jsou úhlopříčky obdélníku $ABCD$, proto jsou úhly ABD a BAC shodné. AP a KN jsou úhlopříčky pravoúhelníku $AKPN$, proto jsou úhly AKN, KAP a APN shodné (obr. 1). PC a LM jsou úhlopříčky pravoúhelníku $PLCM$, proto jsou úhly PLM a LPC shodné. Úhly APN a LPC jsou shodné (vrcholové úhly), proto jsou shodné i úhly AKN, PLM a ABD, přímky LM a KN jsou tudíž rovnoběžné s úhlopříčkou BD daného obdélníku, a jsou tedy rovnoběžné navzájem.



Obr. 1

b) Jsou-li X a Y průsečíky přímek LM a KN s úhlopříčkou AC, je $|XY| = |XP| + |PY| = \frac{1}{2}|CP| + \frac{1}{2}|PA| = \frac{1}{2}(|CP| + |PA|) = \frac{1}{2}|CA|$. Úsečka XY má tedy délku nezávislou na poloze bodu P. Podle a) svírá přímka XY s přímkami KN a LM stejný úhel jako s přímkou BD, takže tento úhel rovněž nezávisí na poloze bodu P. Proto je i vzdálenost přímek LM a KN nezávislá na poloze bodu P (a je jednozačně určena velikostí $|XY|$ a úhlem MXP, přičemž $|\sphericalangle MXP| = 2|\sphericalangle ABD|$).

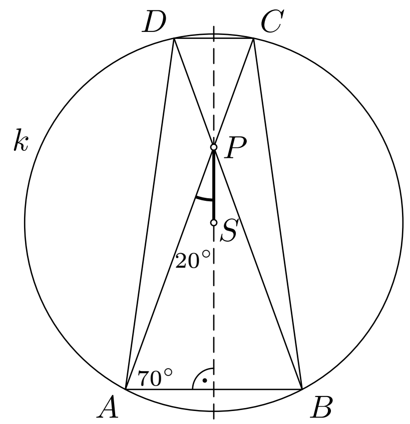
c) KL a BP jsou úhlopříčky pravoúhelníku $KBLP$, jsou proto shodné. Podobně jsou MN a PD shodné úhlopříčky pravoúhelníku $NPMD$, LM a PC shodné úhlopříčky pravoúhelníku $PLCM$ a NK a AP shodné úhlopříčky pravoúhelníku $AKPN$. Pro obvod čtyřúhelníku $KLMN$ tak platí

$$\begin{aligned} o = |KL| + |LM| + |MN| + |NK| = (|KL| + |MN|) + (|LM| + |NK|) = \\ = (|BP| + |PD|) + (|PC| + |AP|) \geqq |BD| + |AC| = 2|AC|, \end{aligned}$$

kde jsme využili trojúhelníkovou nerovnost $|BP| + |PD| \geqq |BD|$ pro trojici bodů B, D, P.

Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 2 body za důkaz tvrzení a), 2 body za důkaz tvrzení b) a 2 body za důkaz tvrzení c).

4. Všimněme si lichoběžníku $ABCD$, jemuž lze opsat kružnici. Přímka jdoucí jejím středem S kolmo k oběma základnám AB a CD je osou souměrnosti obou tětiv AB a CD, tedy i osou souměrnosti celého lichoběžníku $ABCD$. Jeho ramena AD a BC jsou tudíž shodná a průsečík P úhlopříček AC a BD leží též na ose úseček AB a CD. Jelikož je podle zadání $|\sphericalangle BAC| = 70°$, je $|\sphericalangle APS| = 20°$ (obr. 2).



Obr. 2

Popis konstrukce: Sestrojíme úsečku SP, kde $|SP| = d = 2\,\mathrm{cm}$, a kružnici $k(S; 5\,\mathrm{cm})$. Bodem P vedeme polopřímky PX a PY tak, aby $|\sphericalangle SPX| = |\sphericalangle SPY| = 20°$. Průsečíky polopřímek PX a PY s kružnicí k jsou body A a B. Potom průsečíky vnitřků polopřímek AP a BP s kružnicí k jsou body C a D.

Úloha má jediné řešení.

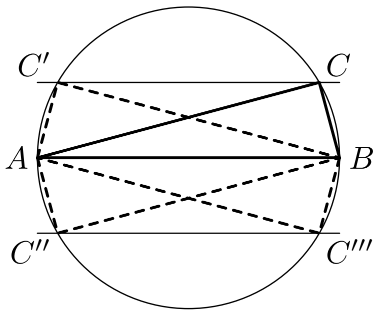
Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 2 body za zdůvodnění toho, že body S a P leží na ose strany AB, 3 body za popis konstrukce a 1 bod za určení počtu řešení.

3. Je dána úsečka AB. Sestrojte bod C tak, aby se obsah trojúhelníku ABC rovnal $1/8$ obsahu S čtverce o straně AB a součet obsahů čtverců o stranách AC a BC se rovnal S. Kolik má úloha řešení pro dané umístění úsečky AB v rovině?

3. Podmínka, že obsah trojúhelníku ABC se má rovnat $\frac{1}{8}$ obsahu S čtverce o straně AB, znamená, že výška trojúhelníku ABC na stranu AB má délku $\frac{1}{4}|AB|$, takže bod C musí ležet na jedné ze dvou rovnoběžek s přímkou AB vzdálených $\frac{1}{4}|AB|$ od přímky AB.

Podmínka, že součet obsahů čtverců o stranách AC a BC se má rovnat obsahu čtverce o straně AB, znamená podle Pythagorovy věty pro trojúhelník ABC, že je tento trojúhelník pravoúhlý s přeponou AB, takže bod C musí ležet na kružnici se středem ve středu přepony AB a poloměrem $\frac{1}{2}|AB|$.

Konstrukce bodu C je tedy jednoduchá. Obě zmíněné rovnoběžky zřejmě protnou kružnici nad průměrem AB ve čtyřech bodech (obr. 1). Vzhledem k tomu, že se jedná o polohovou úlohu, má úloha čtyři řešení.

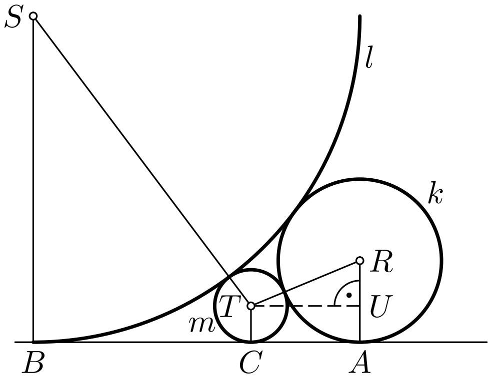


Obr. 1

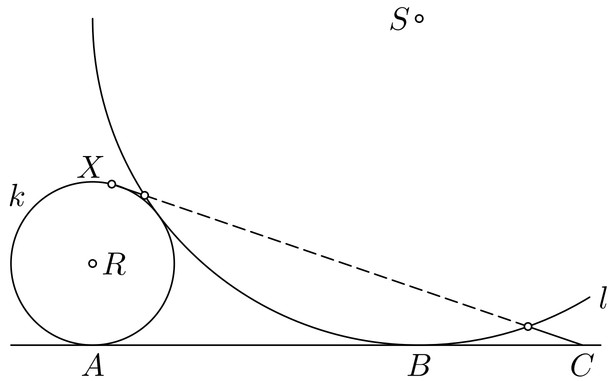
Za úplné řešení je 6 bodů, z toho 2 body za správné určení počtu řešení. Za zjištění, že bod C leží na určených rovnoběžkách s přímkou AB, udělte 2 body. Za důkaz, že bod C leží na Thaletově kružnici nad průměrem AB, udělte 2 body. Za uvedení, že úloha má dvě řešení, udělte 1 bod, za uvedení, že úloha má čtyři řešení, udělte 2 body. Pokud nebude uveden žádný počet řešení, neudělte žádný z 2 bodů určených k tomuto účelu.

2. *Kružnice k, l, m se po dvou vně dotýkají a všechny tři mají společnou tečnu. Poloměry kružnic k, l jsou 3 cm a 12 cm. Vypočtěte poloměr kružnice m. Najděte všechna řešení.*

Řešení. Označme po řadě R, S, T středy a A, B, C body dotyku kružnic k, l, m na společné tečně a $r = 3$, $s = 12$ a t jejich poloměry (délky a obsahy budeme počítat bez jednotek kvůli jednoduššímu dosazování). V lichoběžníku (který v případě rovnosti $r = t$ je ovšem obdélníkem) $ARTC$ (obr. 1) je $|RT| = r+t$. Označíme-li U průsečík přímky AR a přímky vedené bodem T rovnoběžně s AC, je $|RU| = |r-t|$. Z pravoúhlého trojúhelníku RUT plyne $|UT| = |AC| = \sqrt{(r+t)^2 - (r-t)^2} = 2\sqrt{rt} = 2\sqrt{3t}$. Analogicky bychom z lichoběžníků $CTSB$ a $ARSB$ dostali vztahy $|BC| = 2\sqrt{st} = 4\sqrt{3t}$ a $|AB| = 2\sqrt{rs} = 2\sqrt{3 \cdot 12} = 12$.



Obr. 1



Obr. 2

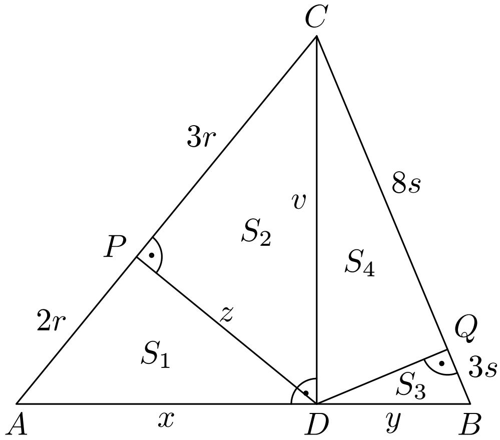
Uvažujme nejdříve případ, kdy bod C leží mezi body A a B. Je pak $2\sqrt{3t}+4\sqrt{3t} = 12$, odkud $t = \frac{4}{3}$. Jestliže bod A leží mezi body C a B, dostaneme obdobně rovnici $2\sqrt{3t} + 12 = 4\sqrt{3t}$, odkud $t = 12$. Rovnice $12 + 4\sqrt{3t} = 2\sqrt{3t}$, kterou dostaneme pro polohu bodu B mezi body A a C, nemá zjevně žádné řešení. Že takový případ není možný, je vidět i z obr. 2, protože každá kružnice, která se dotýká kružnice k v bodě X různém od A a přitom obsahuje bod C polopřímky opačné k polopřímce BA, musí ve svém vnitřku obsahovat i tětivu kružnice l (vyznačenou na obrázku), takže se jí nemůže dotýkat.

Poloměr kružnice m je tedy $\frac{4}{3}$ cm nebo 12 cm.

Návodné úlohy:

1. Určete poloměry tří kružnic, jejichž středy tvoří vrcholy trojúhelníku se stranami délek a, b, c, a každé dvě mají vnější dotyk.
2. Kružnice k, l se středy K, L a poloměry r, s mají vnější dotyk v bodě T a kromě společné tečny t v tomto bodě se dotýkají ještě další společné tečny: kružnice k v bodě A, kružnice l v bodě B. Bod C je průsečíkem přímek AB, t. Dokažte, že trojúhelníky KCL, ATB jsou pravoúhlé. [Ukažte pomocí Pythagorovy věty, že $|CA| = |CT| = |CB| = \sqrt{rs}$, viz úlohu 50–C–II–2.]

5. *V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme D patu výšky z vrcholu C a P, Q odpovídající paty kolmic vedených bodem D na strany AC a BC. Obsahy trojúhelníků ADP, DCP, DBQ, CDQ označme postupně S_1, S_2, S_3, S_4. Vypočtěte $S_1 : S_3$, jestliže $S_1 : S_2 = 2 : 3$, $S_3 : S_4 = 3 : 8$.*



Obr. 3

Řešení. Označme $x = |AD|$, $y = |BD|$, $v = |CD|$ (obr. 3). Z podobnosti trojúhelníků ADP a DCP plyne $x^2 : v^2 = S_1 : S_2 = 2 : 3$. Podobně z podobnosti trojúhelníků DBQ, CDQ plyne $y^2 : v^2 = S_3 : S_4 = 3 : 8$. Odtud $x^2 : y^2 = (2 \cdot 8) : (3 \cdot 3) = 16 : 9$, $x : y = 4 : 3$. Trojúhelníky ADC, DBC mají společnou výšku, proto $(S_1 + S_2) : (S_3 + S_4) = x : y = 4 : 3$. Za S_2 sem dosadíme $\frac{3}{2}S_1$, za S_4 dosadíme $\frac{8}{3}S_3$ a po úpravě dostaneme $S_1 : S_3 = 88 : 45$.

Jiné řešení. Z poměru obsahů trojúhelníku ADP a trojúhelníku CDP se společnou výškou DP plyne, že je $|AP| : |CP| = 2 : 3$, takže můžeme psát $|AP| = 2r$, $|CP| = 3r$, podobně $|BQ| = 3s$, $|CQ| = 8s$. Označme $x = |AD|$, $y = |BD|$, $v = |CD|$ a $z = |PD|$ (obr. 3). Z pravoúhlých trojúhelníků ADP, ADC, PDC plyne $x^2 = 4r^2 + z^2$, $z^2 + 9r^2 = v^2 = 25r^2 - x^2$. Odtud $z^2 = 16r^2 - x^2 = 16r^2 - (4r^2 + z^2)$, neboli $2z^2 = 12r^2$, $z = r\sqrt{6}$, $x = r\sqrt{10}$, $v = r\sqrt{15}$, $S_1 = r^2\sqrt{6}$. Analogicky bychom dostali z trojúhelníků BDQ, BDC, QDC, že $v = 2s\sqrt{22}$, $y = s\sqrt{33}$, $S_3 = 3s^2\sqrt{6}$, tedy užitím vztahu $v^2 = 15r^2 = 88s^2$ dostaneme výsledek $S_1 : S_3 = 88 : 45$.

Návodné úlohy:

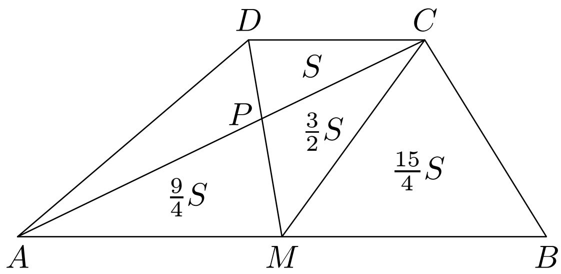
1. Lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD délek $12\,\mathrm{cm}$ a $6\,\mathrm{cm}$ je svými úhlopříčkami rozdělen na 4 trojúhelníky. Určete jejich obsahy, jestliže se obsah lichoběžníku rovná $45\,\mathrm{cm}^2$. [Obsahy jsou 5, 10, 10 a $20\,\mathrm{cm}^2$.]
2. Konvexní čtyřúhelník je úhlopříčkami rozdělen na čtyři trojúhelníky, tři z nich mají obsahy $2\,\mathrm{cm}^2$, $3\,\mathrm{cm}^2$ a $4\,\mathrm{cm}^2$. Určete obsah čtvrtého. [Výsledek je $6\,\mathrm{cm}^2$, $\frac{8}{3}\,\mathrm{cm}^2$ nebo $\frac{3}{2}\,\mathrm{cm}^2$. Označíme-li S_1, S_2, S_3, S_4 obsahy trojúhelníků v pořadí, v jakém spolu sousedí, platí $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$.]

1. Základna AB lichoběžníku $ABCD$ je třikrát delší než základna CD. Označme M střed strany AB a P průsečík úsečky DM s úhlopříčkou AC. Vypočítejte poměr obsahů trojúhelníku CDP a čtyřúhelníku $MBCP$.

3. Kružnice k, l s vnějším dotykem leží obě v obdélníku $ABCD$, jehož obsah je $72\,\mathrm{cm}^2$. Kružnice k se přitom dotýká stran CD, DA a AB, zatímco kružnice l se dotýká stran AB a BC. Určete poloměry kružnic k a l, jestliže poloměr kružnice k je v centimetrech vyjádřen celým číslem.

1. Výpočet založíme na dvou známých pravidlech: (1) Jsou-li dva trojúhelníky podobné s koeficientem podobnosti k, je poměr jejich obsahů roven k^2. (2) Leží-li nějaké tři body X, Y, Z v jedné přímce a bod V mimo ni, je poměr obsahů trojúhelníků XYV a YZV roven poměru $|XY| : |YZ|$.

Ze shodnosti střídavých úhlů mezi rovnoběžkami AB a CD plyne, že trojúhelníky AMP a CDP jsou podle věty *uu* podobné, a to s koeficientem $|AM| : |CD| = \frac{3}{2}$. Označíme-li S obsah trojúhelníku CDP, je obsah trojúhelníku AMP roven $\left(\frac{3}{2}\right)^2 S = \frac{9}{4}S$ a z rovností $|AP| : |CP| = |MP| : |DP| = \frac{3}{2}$ plyne, že obsah každého z trojúhelníků APD a MPC je roven $\frac{3}{2}$ obsahu trojúhelníku CDP, tedy $\frac{3}{2}S$. Obsahy trojúhelníků AMC a BMC jsou stejné, a rovnají se tedy $\frac{9}{4}S + \frac{3}{2}S = \frac{15}{4}S$ (obr. 1). Odtud plyne, že obsah čtyřúhelníku $MBCP$ je $\frac{3}{2}S + \frac{15}{4}S = \frac{21}{4}S$, hledaný poměr je proto $4 : 21$.

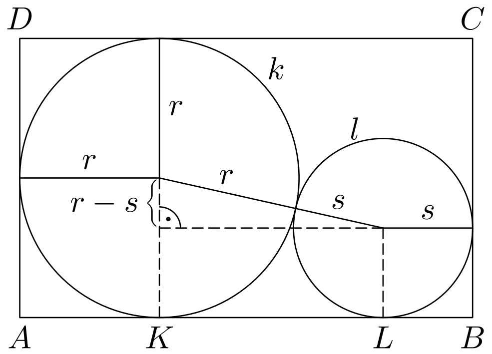


Obr. 1

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za určení poměru obsahů trojúhelníků AMP a CDP. Výpočty obsahů se mohou samozřejmě lišit podle volby základního obsahu, pomocí něhož vyjadřujeme obsahy ostatních trojúhelníků v obrázku. (Pravidla, uvedená v úvodu našeho řešení, budou řešitelé pro konkrétní dvojice trojúhelníků odvozovat vyjadřováním jejich obsahů pomocí základen a výšek.)

3. Označme r, s poloměry kružnic k, l (v centimetrech) a K, L jejich body dotyku se stranou AB (obr. 2). Je pak $|AK| = r$, $|LB| = s$, a jak snadno spočteme z Pythagorovy věty (viz též 3. úlohu školního kola kategorie C)

$$|KL| = \sqrt{(r+s)^2 - (r-s)^2} = 2\sqrt{rs}.$$



Obr. 2

Pro délky stran obdélníku $ABCD$ platí $|AD| = 2r$, $|AB| = r + 2\sqrt{rs} + s = (\sqrt{r} + \sqrt{s})^2$. Podle předpokladu má být

$$2r\bigl(\sqrt{r} + \sqrt{s}\bigr)^2 = 72,$$

neboli po zkrácení dvěma a odmocnění

$$r + \sqrt{rs} = 6.$$

Odtud plyne, že $r < 6$, a pro velikost poloměru s dostáváme vyjádření

$$rs = (6-r)^2,$$

$$s = \frac{(6-r)^2}{r}. \tag{1}$$

Z podmínek úlohy dále plyne, že s nemůže být větší než r, protože jinak by kružnice l neležela v daném obdélníku, a protože i kružnice k musí ležet v daném obdélníku, musí být $|AB| \geqq |AD| = 2r$. Z nerovnosti $s \leqq r$ podle (1) dostaneme podmínku $36 - 12r + r^2 \leqq r^2$, tj. $r \geqq 3$. Z nerovnosti $|AB| \geqq 2r$ pak plyne $72 = |AB| \cdot |AD| \geqq 4r^2$, neboli $r^2 \leqq 18$, což pro celočíselné r znamená, že $r \leqq 4$. Pro poloměr r nám tak vycházejí jen dvě možnosti, $r \in \{3, 4\}$, odpovídající hodnoty poloměru s vypočteme ze vztahu (1).

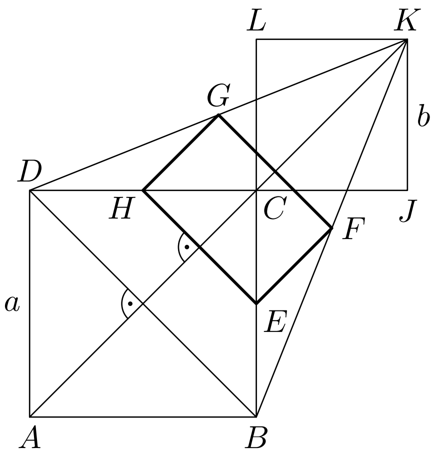
Úloha má právě dvě řešení: $r = s = 3\,\mathrm{cm}$ a $r = 4\,\mathrm{cm}$, $s = 1\,\mathrm{cm}$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů bez ohledu na to, zda řešitel vymezil jediné dvě možnosti výpočtem, nebo z pěti možností vyloučil postupně ty, které nevyhovují daným podmínkám. Za každé nesprávné řešení (třeba když žák uvede jako možný výsledek $r = 5$, $s = \frac{1}{5}$) strhněte bod.

2. Vrchol C čtverců $ABCD$ a $CJKL$ je vnitřním bodem úsečky AK i úsečky DJ, body E, F, G a H jsou po řadě středy úseček BC, BK, DK a DC. Určete obsah čtyřúhelníku $EFGH$ pomocí obsahů S a T čtverců $ABCD$ a $CJKL$.

3. Kružnice k, l, m se dotýkají společné tečny ve třech různých bodech a jejich středy leží v přímce. Kružnice k a l stejně jako kružnice l a m mají vnější dotyk. Určete poloměr kružnice l, jestliže poloměry kružnic k a m jsou 3 cm a 12 cm.

2. Označme $a=\sqrt{S}$, $b=\sqrt{T}$ strany čtverců $ABCD$, $CJKL$. Úsečka EH je střední příčkou trojúhelníku BCD (obr. 1), úsečka FG je střední příčkou v trojúhelníku BKD,



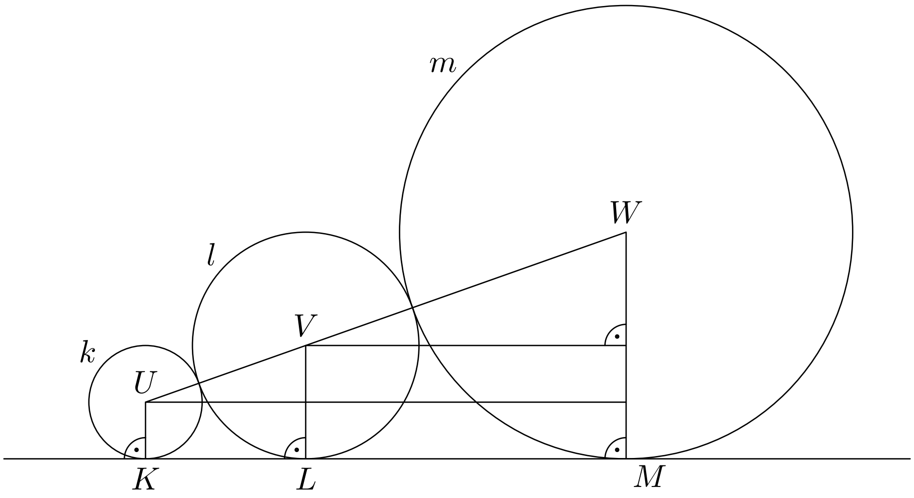
Obr. 1

proto je $2|EH| = 2|FG| = |BD|$ a úsečky EH, FG jsou rovnoběžné s BD. Podobně je úsečka HG střední příčkou v trojúhelníku DCK a úsečka EF je střední příčkou v trojúhelníku BCK. Proto je $2|HG| = 2|EF| = |CK|$ a úsečky HG, EF jsou rovnoběžné s CK, a tedy kolmé na JL a BD. Rovnoběžník $EFGH$ je tudíž obdélník s obsahem

$$|EF|\cdot|FG| = a\,\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot b\,\frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\sqrt{ST}.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za objev, že čtyřúhelník $EFGH$ je obdélník, udělte 3 body, další 3 body za určení jeho obsahu.

3. Vzájemná poloha kružnic a jejich společné tečny musejí vypadat jako na obr. 2, kde jsme písmeny K, L, M označili body dotyku kružnic k, l, m na společné tečně, U,



Obr. 2

V, W jejich středy a r poloměr kružnice l (v centimetrech). Z pravoúhlých lichoběžníků $KLVU$, $LMWV$, $KMWU$ plyne podle Pythagorovy věty

$$|KL|^2 = (r+3)^2 - (r-3)^2 = 12r,$$
$$|LM|^2 = (12+r)^2 - (12-r)^2 = 48r$$

a

$$|KM|^2 = (3+2r+12)^2 - (12-3)^2 = 4r^2 + 60r + 144.$$

Jelikož $|KL| + |LM| = |KM|$, dostaneme z prvních dvou vztahů

$$|KM|^2 = (|KL|+|LM|)^2 = |KL|^2 + 2|KL||LM| + |LM|^2 = 60r + 2\sqrt{12 \cdot 48}\, r,$$

což spolu s třetím vztahem dává po úpravě pro r rovnici

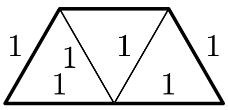
$$4r^2 - 48r + 144 = 0.$$

Protože $4r^2 - 48r + 144 = 4(r^2 - 12r + 36) = 4(r-6)^2$, má tato rovnice jediné řešení $r = 6$ a poloměr kružnice l je tedy 6 cm.

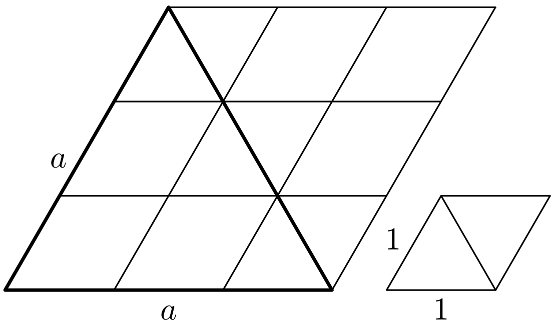
Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za vyjádření délek úseček KL, LM, KM pomocí r udělte 3 body, další 3 body za správný výpočet poloměru r.

2. *Najděte všechny trojúhelníky, které lze rozřezat na lichoběžníky se stranami délek 1 cm, 1 cm, 1 cm a 2 cm.*

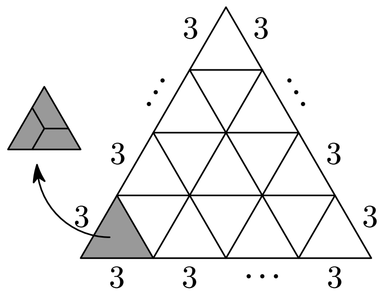
Řešení. Lichoběžníky se stranami délek 1 cm, 1 cm, 1 cm a 2 cm jsou všechny navzájem shodné a skládají se ze tří rovnostranných trojúhelníků (obr. 1a). (Základny každého lichoběžníku mají dvě různé délky, v našem případě to musí být 2 cm a 1 cm.) Budeme je nazývat *základní lichoběžníky.* Rovnostranný trojúhelník s délkou strany 1 cm nazveme *základní trojúhelník.*



Obr. 1a



Obr. 1b



Obr. 2

Vidíme, že každý z hledaných trojúhelníků lze rozřezat na konečný počet základních trojúhelníků. Proto jsou velikosti jeho vnitřních úhlů násobky šedesáti stupňů. Vnitřní úhly každého trojúhelníku jsou tři a součet jejich velikostí je $180°$, má tedy smysl hledat jen trojúhelníky rovnostranné. Z podmínky rozřezání na konečný počet základních trojúhelníků dále plyne, že délka strany hledaného trojúhelníku vyjádřená v centimetrech je přirozené číslo. Označíme-li ji a, lze náš trojúhelník rozřezat právě na a^2 základních trojúhelníků. To lze odvodit například vydělením jeho obsahu $S_a = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$ a obsahu $S_1 = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ základního trojúhelníku. Obecněji platí: dva trojúhelníky, které jsou podobné s koeficientem k, mají obsahy v poměru k^2.

Jiné odvození počtu základních trojúhelníků v rovnostranném trojúhelníku se stranou a cm plyne z doplnění trojúhelníku na kosočtverec podle obr. 1b, kde bylo zvoleno $a = 3$. Kosočtverec je složen ze dvou rovnostranných trojúhelníků se stranou délky a cm. Lze jej tedy rozřezat na a^2 kosočtverců (jeden je zobrazen v pravé dolní části obrázku), z nichž každý je složen ze dvou základních trojúhelníků a kterým rovněž budeme říkat základní. Odtud plyne, že rovnostranný trojúhelník obsahuje stejný počet základních trojúhelníků, jako jemu příslušný kosočtverec obsahuje základních kosočtverců.

Zjistili jsme, že každý z hledaných trojúhelníků je rovnostranný se stranou délky a cm ($a \in \mathbb{N}$) a že je složen z a^2 základních trojúhelníků. Protože každý základní lichoběžník obsahuje právě tři základní trojúhelníky, musí být číslo a^2, a tedy i číslo a dělitelné třemi. Z obr. 2 pak plyne, že každý rovnostranný trojúhelník se stranou délky $3n$ cm, kde $n = 1, 2, \ldots$, lze rozřezat na základní lichoběžníky.

Závěr: Podmínkám úlohy vyhovují jen rovnostranné trojúhelníky s délkou strany $a = 3n$ cm, kde n je přirozené číslo.

Úlohy k procvičení:

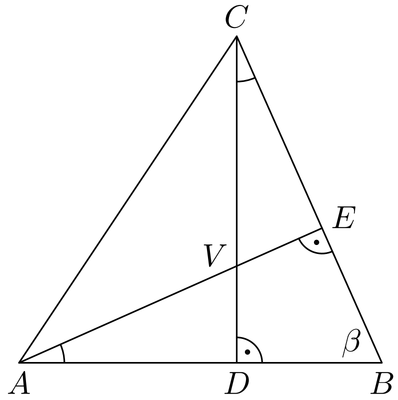
1. Daný rovnostranný trojúhelník rozdělte na: a) 18, b) 19, c) 20 rovnostranných, ne nutně shodných trojúhelníků. [41–Z7–II–1]
2. Rozdělte čtverec se stranou délky 12 cm na tři obdélníky s co nejmenšími stejnými obvody. [49–Z6–I–2]

3. Určete všechny čtverce, které se dají beze zbytku rozřezat na T-tetramina (obrazce  složené ze čtyř jednotkových čtverců). [41–Z8–I–6]

6. *Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC, v němž D je pata výšky z vrcholu C a V průsečík výšek. Dokažte, že $|AD| \cdot |BD| = |AB| \cdot |VD|$, právě když $|CD| = |AB|$.*

Řešení. Při označení podle obr. 4 platí:

$$|\sphericalangle ADV| = |\sphericalangle CDB| = 90^\circ,$$
$$|\sphericalangle VAD| = |\sphericalangle BAE| = 90^\circ - \beta = |\sphericalangle BCD|.$$



Obr. 4

Jsou tedy trojúhelníky ADV a CDB podobné podle věty *uu*. Z této podobnosti plyne

$$\frac{|AD|}{|CD|} = \frac{|VD|}{|BD|}$$

a odtud $|AD|\cdot|BD| = |CD|\cdot|VD|$. Zdůrazněme, že tato rovnost platí pro každý ostroúhlý trojúhelník ABC. Vztah $|AD| \cdot |BD| = |AB| \cdot |VD|$ ze zadání úlohy tedy platí, právě když $|CD| = |AB|$.

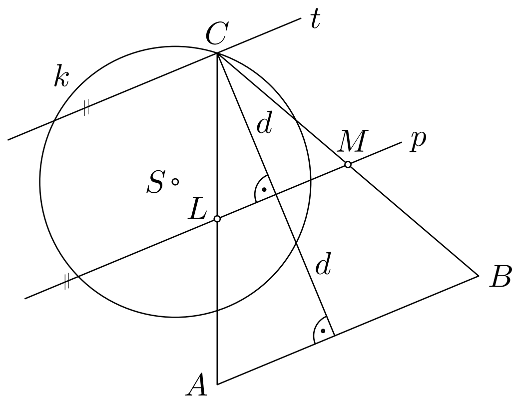
Úlohy k procvičení:

1. Úhlopříčky konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ se protínají v bodě F. Dokažte, že strany BC a AD jsou rovnoběžné, právě když $|AE| \cdot |BE| = |CE| \cdot |DE|$.
2. Nechť V je průsečík výšek trojúhelníku ABC a A', B', C' paty jeho výšek z vrcholů A, B, C. Dokažte, že platí: $|AV| \cdot |A'V| = |BV| \cdot |B'V| = |CV| \cdot |C'V|$.
3. Nechť AC je delší úhlopříčka rovnoběžníku $ABCD$ a body E a F jsou paty kolmic z vrcholu C na přímky AB a AD. Dokažte, že platí $|AB| \cdot |AE| + |AD| \cdot |AF| = |AC|^2$. [Návod: Označte G patu kolmice z bodu B na úsečku AC a dokažte nejprve podobnost trojúhelníků ABG, ACE a podobnost trojúhelníků CBG, ACF.]

1. V rovině jsou dány dva různé body L, M a kružnice k. Sestrojte trojúhelník ABC co největšího obsahu tak, aby jeho vrchol C ležel na kružnici k, bod L byl středem strany AC a bod M středem strany BC.

3. Rovnoramennému lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD lze vepsat kružnici se středem O. Určete obsah S lichoběžníku, jsou-li dány délky úseček OB a OC.

1. Při *rozboru* uvažme libovolný trojúhelník ABC s vrcholem C na kružnici k, jehož strany AC, BC mají středy po řadě v bodech L, M (obr. 1). Protože LM je střední příčkou takového trojúhelníku, je jeho obsah roven čtyřnásobku obsahu trojúhelníku LMC. Tento trojúhelník má pevnou stranu LM, takže jeho obsah je největší, právě když je největší jeho výška z vrcholu C, tedy vzdálenost d bodu C od přímky p určené body L, M.



Obr. 1

Dodejme, že místo srovnání obsahů trojúhelníků ABC a LMC dojdeme ke stejné podmínce také takto: trojúhelník ABC má stranu AB pevné délky $c = 2|LM|$ a výšku $v_c = 2d$. Proto je jeho obsah $\frac{1}{2}cv_c$ roven $2|LM| \cdot d$, takže je největší možný, když je taková vzdálenost d.

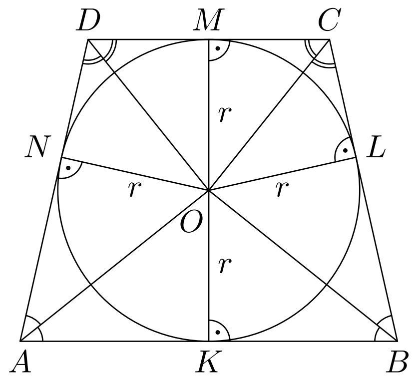
Pro který bod $C \in k$ je vzdálenost d největší? Veďme bodem C přímku t rovnoběžnou s přímkou p. Je-li vzdálenost d největší možná, musí celá kružnice k ležet ve stejné polorovině s hraniční přímkou t jako přímka p (volbou bodu $C \in k$ uvnitř opačné poloroviny bychom vzdálenost d zvětšili). Přímka t je proto nutně tečnou kružnice k (rovnoběžnou s danou přímkou p) a bod C je jejím dotykovým bodem.

Odtud již plyne *konstrukce*: bod C určíme jako ten ze dvou průsečíků kružnice k s kolmicí na přímku p vedenou středem S kružnice k, který má od přímky p větší vzdálenost (mají-li ji oba průsečíky stejnou, vybereme kterýkoliv z nich). Body A, B pak sestrojíme jako obrazy bodu C v souměrnosti podle středu L, resp. M.

Diskuse: Tečny kružnice k rovnoběžné s přímkou LM mají od této přímky dvě *různé* vzdálenosti, právě když střed S kružnice k na přímce LM *neleží*; tehdy má úloha jediné řešení. V opačném případě, kdy střed S na přímce LM leží, má úloha dvě řešení.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za nalezení podmínky maximální vzdálenosti C od LM, 2 body za postup konstrukce a 1 bod za správně určení obou možných počtů řešení. Intuitivně jasné určení nejvzdálenějšího bodu kružnice k od přímky LM není nutné zdůvodňovat (třetí odstavec řešení).

3. Označme postupně K, L, M, N body dotyku vepsané kružnice po řadě se stranami AB, BC, CD, DA (obr. 2). Protože $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník, jeho vnitřní úhly u vrcholů A, B, C, D mají po řadě velikosti α, α, $180^\circ - \alpha$ a $180^\circ - \alpha$. Úsečky OA, OB,



Obr. 2

OC, OD ležící na osách těchto úhlů proto spolu se čtyřmi navzájem shodnými úsečkami OK, OL, OM, ON rozdělují celý lichoběžník na osm pravoúhlých trojúhelníků, které se shodují v jedné odvěsně a mají ostré vnitřní úhly $\frac{1}{2}\alpha$ a $90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Těchto osm trojúhelníků lze tudíž rozdělit do dvou čtveřic shodných trojúhelníků: jednu z nich tvoří trojúhelníky

OAK, OAN, OBK, OBL a druhou trojúhelníky OCL, OCM, ODM a ODN. Odtud plyne, že obsah S lichoběžníku $ABCD$ je roven čtyřnásobku součtu obsahů trojúhelníků OBL a OCL, tedy čtyřnásobku obsahu trojúhelníku OBC. Podle vnitřních úhlů u vrcholů B a C vidíme, že trojúhelník OBC je pravoúhlý s odvěsnami OB a OC, takže má obsah $\frac{1}{2}|OB| \cdot |OC|$ a hledaný celkový obsah S je tudíž $S = 2|OB| \cdot |OC|$.

Poznámka. Malá obměna části předchozího postupu: je-li O střed kružnice vepsané tečnovému čtyřúhelníku $ABCD$, je snadné ukázat, že jeho obsah je roven dvojnásobku součtu obsahů trojúhelníků OAB a OCD stejně jako trojúhelníků OBC a ODA. Poslední dva trojúhelníky jsou u našeho rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$ shodné.

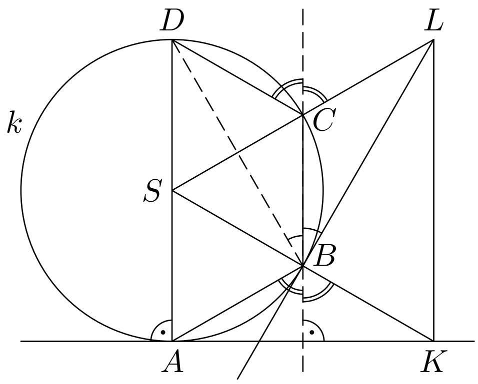
Jiné řešení. Pro výšku v a strany a, b, c, d lichoběžníku $ABCD$ s vepsanou kružnicí $k(O, r)$ platí rovnosti $v = 2r$ a $a+c = b+d$. Z první z nich plyne, že střed O leží na střední příčce lichoběžníku, jejíž délka $\frac{1}{2}(a + c)$ je podle druhé rovnosti rovna $\frac{1}{2}(b + d)$. V našem případě ovšem platí $b = d$, takže střední příčka je shodná s oběma rameny a bod O je jejím středem, neboť rovnoramenný lichoběžník je osově souměrný. Dohromady dostáváme, že bod O leží na kružnici sestrojené nad průměrem BC, a proto je OBC pravoúhlý trojúhelník o obsahu $\frac{1}{2}|OB|\cdot|OC|$. Jeho výška na přeponu BC je však poloměrem r vepsané kružnice k, tudíž obsah trojúhelníku OBC je rovněž roven $\frac{1}{2}b\cdot r$. Porovnáním obou vyjádření dostaneme rovnost $|OB| \cdot |OC| = b \cdot r$. Pro hledaný obsah S našeho lichoběžníku proto platí

$$S = \frac{a + c}{2} \cdot v = b \cdot 2r = 2 \cdot |OB| \cdot |OC|.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho při prvním postupu 3 body za zdůvodnění, že daný lichoběžník je složen ze dvou čtveřic shodných trojúhelníků, nebo za rovnost typu $S_{OAB} + S_{OCD} = S_{OBC} + S_{ODA}$. Za hlubší poznatek $S = 4 \cdot S_{OBC}$ už udělte 4 body. 1 bodem oceňte zjištění, že OBC je pravoúhlý trojúhelník, stejně jako postup, kdy řešitel pouze rozdělí daný lichoběžník na čtyři dvojice shodných trojúhelníků a dalšího pokroku v úvahách o jejich obsahu nedosáhne.

2. Kružnice k se středem S je opsána pravidelnému šestiúhelníku $ABCDEF$. Tečna v bodě A ke kružnici k protne přímku SB v bodě K a tečna v bodě B protne přímku SC v bodě L. Dokažte, že čtyřúhelníku $KLCB$ lze opsat kružnici, která je shodná s kružnicí k.

2. Tečna ke kružnici k v bodě A je kolmá na průměr AD, a tedy i na stranu BC daného šestiúhelníku (obr. 1). Zároveň přímky SB a AB svírají s BC šedesátistupňový úhel, takže jsou souměrně sdružené podle osy BC. Bod K je tudíž souměrně sdružený s bodem A podle osy BC.



Obr. 1

Podobně tečna BL je kolmá na BS, takže svírá s přímkou BC úhel $30°$ stejně jako přímka BD. Přímka BL je tudíž souměrně sdružená s přímkou BD podle osy BC. Také přímky SC a CD jsou souměrně sdružené dle osy BC, takže bod L je podle téže osy souměrně sdružený s bodem D.

Dostali jsem tak, že čtyřúhelník $KLCB$ je souměrně sdružený s lichoběžníkem $ADCB$, kterému je opsána kružnice k. Vrcholy čtyřúhelníku $KLCB$ proto leží na kružnici souměrně sdružené s kružnicí k podle osy BC. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

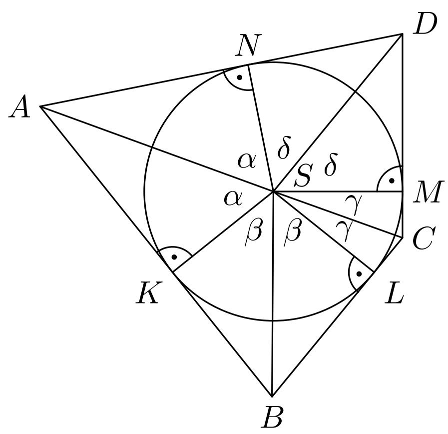
Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za rozhodnutí řešitele dokazovat hypotézu o shodnosti čtyřúhelníků $ABCD$ a $KLCB$. Při využití osové souměrnosti udělte 2 body za důkaz sdruženosti bodů A,

K a 2 body za sdruženost bodů D, L. Místo souměrnosti lze dokazovat shodnost příslušných trojúhelníků. Lze také nejdříve sestrojit obrazy A', D' vrcholů A a D v souměrnosti podle osy BC a pak ukázat, že $A' = K$ a $D' = L$.

2. *Čtyřúhelníku $ABCD$ je vepsána kružnice se středem S. Určete rozdíl $|\sphericalangle ASD| -$ $- |\sphericalangle CSD|$, jestliže $|\sphericalangle ASB| - |\sphericalangle BSC| = 40°$.*

Řešení. Paty kolmic ze středu S vepsané kružnice ke stranám AB, BC, CD a DA označme po řadě písmeny K, L, M a N (obr. 1). Pravoúhlé trojúhelníky ASK a ASN jsou shodné podle věty Ssu. Mají totiž společnou přeponu AS a shodné odvěsny SK a SL, jejichž délka je rovna poloměru vepsané kružnice. Ze shodnosti těchto trojúhelníků plyne jednak známé tvrzení o délkách tečen ($|AK| = |AN|$), jednak shodnost úhlů ASK a ASN, jejichž společnou velikost označíme α:

$$|\sphericalangle ASK| = |\sphericalangle ASN| = \alpha.$$



Obr. 1

Analogicky zjistíme shodnost trojúhelníků SBK a SBL, dále pak SCL a SCM, nakonec SDM a SDN. Na základě uvedených shodností zjistíme, že lze položit

$$|\sphericalangle BSK| = |\sphericalangle BSL| = \beta, \quad |\sphericalangle CSL| = |\sphericalangle CSM| = \gamma, \quad |\sphericalangle DSM| = |\sphericalangle DSN| = \delta.$$

Odtud a z obr. 1 pak plyne

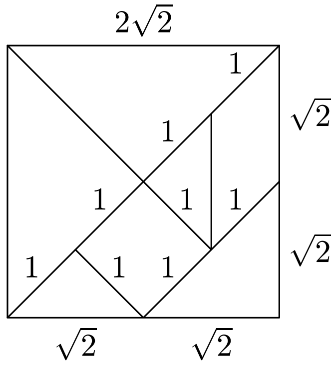
$$|\sphericalangle ASD| - |\sphericalangle CSD| = (\alpha + \delta) - (\gamma + \delta) = \alpha - \gamma =$$
$$= (\alpha + \beta) - (\gamma + \beta) = |\sphericalangle ASB| - |\sphericalangle BSC| = 40^\circ.$$

Závěr: $|\sphericalangle ASD| - |\sphericalangle CSD| = 40^\circ$.

Úlohy k procvičení:

1. Tečny vedené ke kružnici $k(O, r)$ z bodu A se dotýkají kružnice k v bodech T a U. Dokažte: a) $|AT| = |AU|$, b) $|\sphericalangle AOT| = |\sphericalangle AOU|$.
2. Čtyřúhelníku $ABCD$ je vepsána kružnice se středem O. Dokažte, že a) $|\sphericalangle DOC| = |\sphericalangle DAO| + |\sphericalangle ABO|$, b) $AB \parallel CD \Rightarrow |\sphericalangle AOD| = 90^\circ$.
3. Tečny vedené ke kružnici $k(O, r)$ z bodu A se dotýkají kružnice k v bodech T a U. Třetí tečna protíná úsečky AT a AU po řadě v bodech B a C. Určete obvod trojúhelníku ABC, je-li $|AT| = 12\,\text{cm}$. [24 cm: pro bod V dotyku tečny BC platí $|CV| = |CU|$ a $|BV| = |BT|$, takže $|BC| = |CU| + |BT|$.]

4. *Tangram je skládačka, kterou lze vyrobit z papíru rozřezáním vystřiženého čtverce na sedm dílů podle čar vyznačených na obrázku. Předpokládejme, že délka strany*

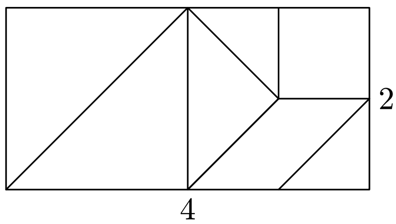


čtverce je $2\sqrt{2}$ *cm. Rozhodněte, zda lze z dílů tangramu složit:*

a) obdélník 2 *cm* $\times$ 4 *cm,*

b) obdélník $\sqrt{2}$ *cm* $\times$ $4\sqrt{2}$ *cm.*

Řešení. a) Obdélník složit lze (obr. 2).



Obr. 2

b) Celková délka „iracionálních“ stran všech dílů tangramu je $10\sqrt{2}$ cm. Je tedy rovna obvodu obdélníku, který máme složit. Odtud a z textu pomocné úlohy 1 plyne, že všechny „iracionální“ strany dílů tangramu musejí být umístěny na hranici skládaného obdélníku. To však není možné, neboť protilehlé „iracionální“ strany kosodélníkového dílu mají vzdálenost menší než 1 cm, kdežto nejmenší vzdálenost protilehlých stran obdélníku je $\sqrt{2}$ cm.

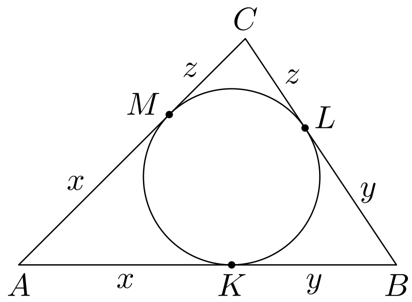
Závěr: Obdélník 2 cm × 4 cm lze z tangramu složit, ale obdélník $\sqrt{2}\,\mathrm{cm} \times 4\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ složit nelze.

Úlohy k procvičení:

1. Dokažte, že pro celá nezáporná čísla a, b, c, d platí: Délku úsečky lze vyjádřit ve tvaru $a + b\sqrt{2}$ a současně ve tvaru $c + d\sqrt{2}$, právě když $a = c$ a $b = d$. [Rovnost $a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$ je ekvivalentní se vztahem $a - c = (d - b)\sqrt{2}$, jehož levá strana je celé číslo, kdežto pravá strana je pro $d \neq b$ iracionální. Rovnost nastává, jen když platí $a = c$ a $b = d$.]
2. Dokažte, že z tangramu nelze složit kosodélník se základnou délky 2 cm a výškou 4 cm. [Z dílů tangramu lze sestavit pouze ty úhly, jejichž velikost je násobkem 45°. Proto má kosodélník velikosti vnitřních úhlů 45° a 135°. Má-li výšku 4 cm, má jeho delší strana délku $4\sqrt{2}$ cm. Tangram má sedm dílů, z nichž jedině čtverec má všechny strany celočíselné délky. Podél obou delších stran kosodélníku je proto nutno umístit po jedné „iracionální“ straně každého ze šesti zbývajících „iracionálních“ dílů. Zbydou tak právě dvě strany délky $\sqrt{2}$ cm, jež musejí být uvnitř skládaného kosodélníku. Jedna z nich zřejmě patří dílu tvaru kosodélníku (neboť ten nemůže mít pro svou malou výšku obě protilehlé „iracionální“ strany na hranici skládaného obrazce), druhá dílu tvaru trojúhelníku s „iracionálními“ odvěsnami. V důsledku věty z předchozí úlohy musí být tyto strany umístěny podél téže přímky. To však není možné, protože mohou být umístěny jedině ve směrech navzájem kolmých.]
3. Určete všechny dvojice (a, b) přirozených čísel, pro něž platí $a + b\sqrt{5} = b + a\sqrt{5}$. [56–C–I–1]
4. Určete všechny dvojice (a, b) přirozených čísel, jejichž rozdíl $a - b$ je pátou mocninou některého prvočísla a pro něž platí $a - 4\sqrt{b} = b + 4\sqrt{a}$. [56–C–S–3]
5. Najděte všechny dvojice (a, b) nezáporných reálných čísel, pro které platí
$$\sqrt{a^2 + b} + \sqrt{b^2 + a} = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{a + b}.$$
[48–C–S–1]

1. Trojúhelník ABC splňuje při obvyklém značení délek stran podmínku $a \leqq b \leqq c$. Vepsaná kružnice se dotýká stran AB, BC a AC po řadě v bodech K, L a M. Dokažte, že z úseček AK, BL a CM lze sestrojit trojúhelník, právě když platí $b + c < 3a$.

1. Označme $x = |AK| = |AM|$, $y = |BL| = |BK|$, $z = |CM| = |CL|$ (obr. 1) shodné



Obr. 1

úseky tečen z jednotlivých vrcholů trojúhelníku k vepsané kružnici. Zřejmě platí:

$$a = y + z, \quad b = z + x, \quad c = x + y. \tag{1}$$

Z uvedených rovností vidíme, že daná podmínka

$$b + c < 3a \tag{2}$$

je ekvivalentní nerovnosti

$$x < y + z, \tag{3}$$

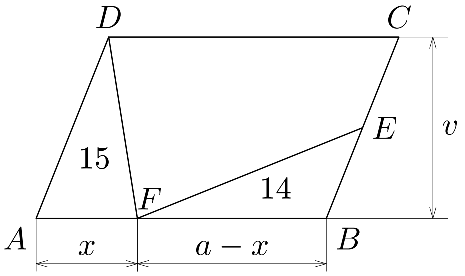
což je nutná podmínka existence trojúhelníku se stranami délek x, y a z.

Dosazením z (1) do podmínek $b \leqq c$ a $a \leqq b$ zjistíme, že $z \leqq y$ a $y \leqq x$. To znamená, že další dvě trojúhelníkové nerovnosti $y < z + x$ a $z < x + y$ jsou automaticky splněny, takže nerovnost (3), a tím i (2) je podmínkou postačující. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

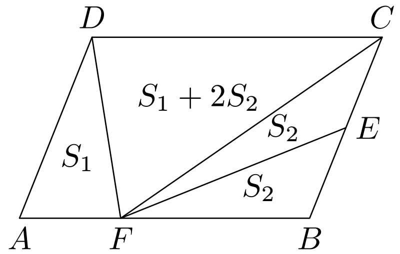
Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 1 bod za nalezení rovností (1), 2 body za zjištění ekvivalence vztahů (2) a (3) a 3 body za důkaz, že podmínka (3) je nejen nutná, ale i postačující.

2. V daném rovnoběžníku $ABCD$ je bod E střed strany BC a bod F leží uvnitř strany AB. Obsah trojúhelníku AFD je 15 cm^2 a obsah trojúhelníku FBE je 14 cm^2. Určete obsah čtyřúhelníku $FECD$.

2. Označme v vzdálenost bodu C od přímky AB, $a = |AB|$ a $x = |AF|$. Pro obsahy trojúhelníků AFD a FBE (obr. 1) platí: $\frac{1}{2}x \cdot v = 15$, $\frac{1}{2}(a - x) \cdot \frac{1}{2}v = 14$. Odtud $xv = 30$, $av - xv = 56$. Sečtením obou rovnic nalezneme obsah rovnoběžníku $ABCD$: $S_{ABCD} = av = 86\,\mathrm{cm}^2$. Obsah čtyřúhelníku $FECD$ je tedy $S_{FECD} = S_{ABCD} - (S_{AFD} + S_{FBE}) = 57\,\mathrm{cm}^2$.



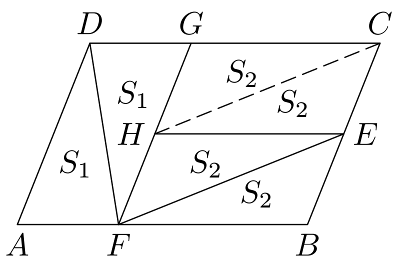
Obr. 1



Obr. 2

Jiné řešení. Trojúhelníky BEF a ECF mají stejnou výšku z vrcholu F a shodné základny BE a EC. Proto jsou obsahy obou trojúhelníků stejné. Z obr. 2 vidíme, že obsah trojúhelníku CDF je polovinou obsahu rovnoběžníku $ABCD$ (oba útvary mají společnou základnu CD a stejnou výšku), druhou polovinu tvoří součet obsahů trojúhelníků AFD a BCF. Odtud $S_{FECD} = S_{ECF} + S_{CDF} = S_{ECF} + (S_{AFD} + S_{BCF}) = S_{AFD} + 3S_{FBE} = 57\,\mathrm{cm}^2$.

Jiné řešení. Do rovnoběžníku přikreslíme úsečky FG a EH rovnoběžné se stranami BC a AB tak, jak znázorňuje obr. 3. Rovnoběžníky $AFGD$ a $FBEH$ jsou svými úhlopříč-



Obr. 3

kami DF a EF rozděleny na dvojice shodných trojúhelníků. Je tedy $S_{GDF} = S_{AFD} = 15\,\mathrm{cm}^2$ a $S_{HFE} = S_{BEF} = 14\,\mathrm{cm}^2$. Ze shodnosti rovnoběžníků $HECG$ a $FBEH$ navíc snadno nahlédneme, že všechny čtyři trojúhelníky FBE, EHF, HEC a CGH jsou shodné, takže obsah čtyřúhelníku $FECD$ je $S_{AFD} + 3S_{FBE} = 57\,\mathrm{cm}^2$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za každou číselnou chybu nebo nepodstatnou chybu při zdůvodňování výpočtu některého obsahu strhněte bod, za hrubou chybu při zdůvodnění strhněte dva body. Je-li úloha nedořešena, udělte dva body za každou správně vypočtenou část obsahu čtyřúhelníku $FECD$.

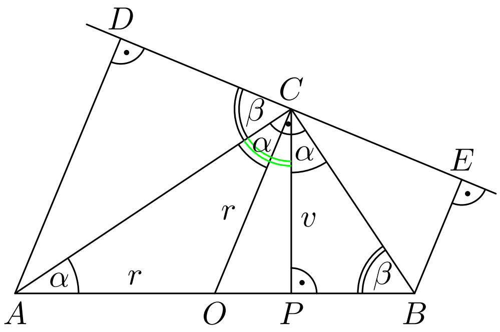
2. *Pravoúhlému trojúhelníku ABC s přeponou AB je opsána kružnice. Paty kolmic z bodů A, B na tečnu k této kružnici v bodě C označme D, E. Vyjádřete délku úsečky DE pomocí délek odvěsen trojúhelníku ABC.*

Řešení. Označme odvěsny trojúhelníku ABC obvyklým způsobem a, b a protilehlé úhly α, β. Střed přepony AB (střed opsané kružnice) označíme O (obr. 1).

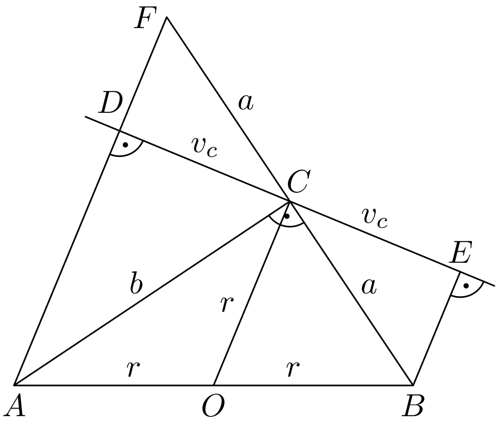
Výška $v = CP$ rozděluje trojúhelník ABC na trojúhelníky ACP a CBP podobné trojúhelníku ABC podle věty *uu* ($\alpha + \beta = 90°$), úsečka OC je kolmá na DE a navíc $|OC| = |OA| = r$ (poloměr opsané kružnice). Odtud $|\sphericalangle OCA| = |\sphericalangle OAC| = \alpha$ a $|\sphericalangle DCA| = 90° - |\sphericalangle OCA| = \beta$.

Pravoúhlé trojúhelníky ACP a ACD se společnou přeponou AC se tudíž shodují i v úhlech při vrcholu C. Jsou proto shodné, dokonce souměrně sdružené podle přímky AC. Analogicky jsou trojúhelníky CBP a CBE souměrně sdružené podle BC. Je tedy $|CD| = |CE| = v$, tudíž $|DE| = 2v = 2ab/\sqrt{a^2+b^2}$, neboť z dvojího vyjádření dvojnásobku obsahu trojúhelníku ABC plyne $v = ab/|AB|$, přičemž $|AB| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Poznámka. Místo dvojího vyjádření obsahu můžeme k výpočtu výšky CP využít podobnost trojúhelníků CBP a ABC: $\sin\alpha = |CP|/|AC| = |BC|/|AB|$.



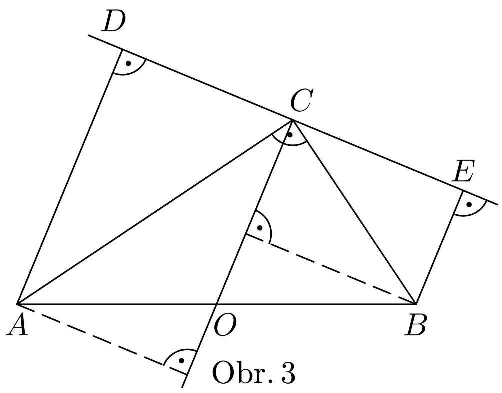
Obr. 1



Obr. 2

Jiné řešení. Úsečka OC je střední příčkou lichoběžníku $DABE$, neboť je rovnoběžná se základnami a prochází středem O ramene AB. Je proto D obrazem bodu E v souměrnosti podle středu C. Obraz F bodu B v téže souměrnosti leží na polopřímce AD za bodem D (obr. 2). Je $|CF| = |BC| = a$, úhel ACF je pravý, trojúhelníky AFC a ABC jsou tedy shodné. Vidíme, že CD je výška v trojúhelníku AFC shodná s výškou v_c trojúhelníku ABC, a DE je jejím dvojnásobkem. Velikost výšky v_c dopočítáme stejně jako v předchozím řešení.

Jiné řešení. Úsečky CD a CE (obr. 3) jsou shodné s výškami rovnoramenných trojúhelníků ACO, BCO na společnou stranu OC. Protože tyto dva trojúhelníky mají ve srovnání s třetím trojúhelníkem ABC poloviční obsah a i jejich společná strana OC je oproti přeponě AB poloviční, jsou obě výšky na stranu OC trojúhelníků ACO, BCO shodné s výškou na stranu AB trojúhelníku ABC. Jeho výšku dopočítáme jako v prvním řešení.



Obr. 3

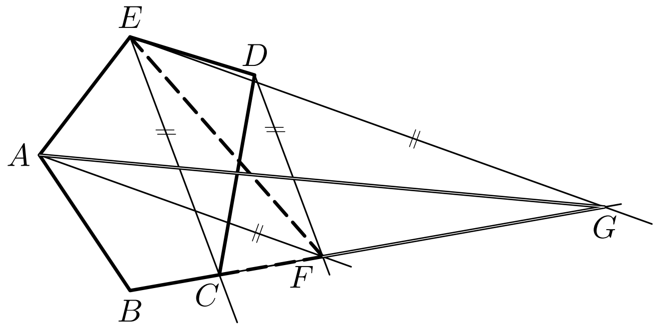
Odpověď. $|DE| = 2ab/\sqrt{a^2 + b^2}$.

Návodné úlohy:

1. Vyjádřete výšku v_c pravoúhlého trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C pomocí stran a, b, c tohoto trojúhelníku.
2. Nechť k je kružnice opsaná pravoúhlému trojúhelníku ABC s přeponou AB délky c. Označme S střed strany AB a D a E průsečíky os stran BC a AC s týmž obloukem AB kružnice k. Vyjádřete obsah trojúhelníku DSE pomocí délky přepony c. [$c^2/8$]
3. Vyjádřete obsah rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB a CD pomocí délek a, c jeho základen a délky b jeho ramen. [$\frac{1}{4}(a + c)\sqrt{4b^2 - (a - c)^2}$]
4. V obdélníku $ABCD$ platí $|AB| > |BC|$. Oblouk AC kružnice, jejíž střed leží na straně AB, protíná stranu CD v bodě M. Dokažte, že přímky AM a BD jsou navzájem kolmé. [48–C–I–2]

4. *Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$. Na polopřímce BC sestrojte takový bod G, aby obsah trojúhelníku ABG byl shodný s obsahem daného pětiúhelníku.*

Řešení. *Rozbor*: Nejprve uvažme bod F, který je průsečíkem přímky BC a rovnoběžky s EC jdoucí bodem D (protože $E \notin BC$, jsou EC a BC různoběžky, obr. 4). Obsahy trojúhelníků ECD a ECF jsou shodné (mají společnou stranu EC a shodnou výšku na tuto stranu), obsah pětiúhelníku $ABCDE$ je tedy shodný s obsahem čtyřúhelníku $ABFE$.



Obr. 4

Dále uvažme bod G, který je průsečíkem přímky BC a rovnoběžky s AF jdoucí bodem E. Potom jsou opět obsahy trojúhelníků AFE a AFG shodné, a jsou proto shodné i obsahy čtyřúhelníku $ABFE$ a trojúhelníku ABG. Bod G tak má požadovanou vlastnost.

Hledaný bod je na polopřímce BC jediný, neboť pro různé body X, Y na polopřímce BC mají trojúhelníky ABX a ABY různé výšky na společnou stranu AB, mají tedy různé obsahy.

Popis konstrukce:

1. p; $p \parallel EC$, $D \in p$;
2. F; $F \in p \cap BC$;
3. q; $q \parallel AF$, $E \in q$;
4. G; $G \in q \cap BC$;

Úloha má jediné řešení.

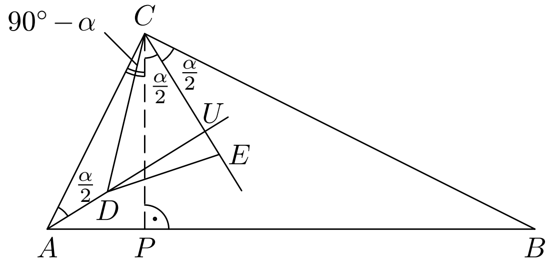
Návodné úlohy:

1. Označme P průsečík úhlopříček daného konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Dokažte, že přímky AB a CD jsou rovnoběžné, právě když trojúhelníky ADP a BCP mají stejný obsah. [Rovnost obsahů trojúhelníků ADP a BCP je ekvivalentní s rovností obsahů trojúhelníků ABC a ABD se společnou stranou AB.]
2. V kružnici o poloměru 2 je dána tětiva AB délky 3. Určete, jaký největší obsah může mít čtyřúhelník $AXBY$, leží-li jeho vrcholy X, Y na kružnici k. [Největší obsah 6 má deltoid, jehož úhlopříčka XY je průměrem kružnice k.]
3. Je dán obdélník $ABCD$. Nechť přímky p a q, které procházejí vrcholem A, protínají polokružnice vně připsané stranám BC a CD daného obdélníku po řadě v bodech K a L ($B \neq K \neq C \neq L \neq D$) a rovněž strany BC a CD po řadě v bodech P a Q tak, že trojúhelník ABP má stejný obsah jako trojúhelník KCP a zároveň trojúhelník AQD má stejný obsah jako trojúhelník CLQ. Dokažte, že body K, L, C leží na téže přímce. [53–C–I–2]

2. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB označme α velikost vnitřního úhlu při vrcholu A, zřejmě pak platí $|\sphericalangle ACP| = 90^\circ - \alpha$, $|\sphericalangle PCB| = \alpha$. Střed D kružnice vepsané trojúhelníku APC leží na ose úhlu PAC, takže $|\sphericalangle DAC| = \frac{1}{2}\alpha$, a podobně i $|\sphericalangle PCE| = \frac{1}{2}\alpha$. Odtud pro velikost úhlu AUC v trojúhelníku AUC, kde U je průsečík polopřímek AD a CE (obr. 1), vychází

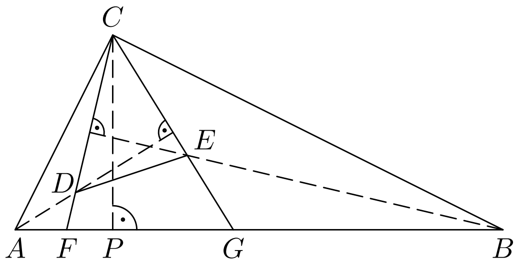
$$|\sphericalangle AUC| = 180^\circ - (90^\circ - \alpha + \tfrac{1}{2}\alpha) - \tfrac{1}{2}\alpha = 90^\circ.$$

To znamená, že polopřímka AD je kolmá na CE, úsečka DU je tudíž výška v trojúhelníku DEC. Úplně stejně zjistíme, že i polopřímka BE (jinak osa úhlu ABC) je kolmá na CD. Dostáváme tak, že průsečík polopřímek AD a BE, což je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC, je zároveň i průsečíkem výšek trojúhelníku DEC.



Obr. 1

Jiné řešení. Označme F a G odpovídající průsečíky přímek CD a CE se stranou AB (obr. 2). Podle tvrzení 2. úlohy školního kola je trojúhelník CAG rovnoramenný se základ-

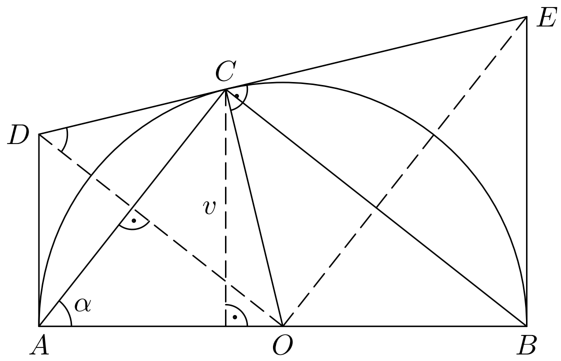


Obr. 2

nou CG. Osa AD úhlu CAG rovnoramenného trojúhelníku CAG je tudíž i jeho osou souměrnosti a je proto kolmá na základnu CG, tedy i na CE. Podobně zjistíme, že i trojúhelník CBF je rovnoramenný se základnou CF, takže osa BE úhlu FBC je kolmá na CF, tedy i na CD. Průsečík obou os AD a BE je tak nejen středem kružnice vepsané trojúhelníku ABC, ale i průsečíkem výšek trojúhelníku CDE, což jsme měli dokázat.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. V opačném případě oceňte 1 bodem jednotlivé dílčí poznatky vedoucí k řešení (například výpočet jednoho z úhlů ACP či PCE). Za odhalení rovnoramenného trojúhelníku CAG či CBF a odkaz na školní úlohu udělte 3 body stejně jako za jiný důkaz kolmosti AD a CE či BE a CD.

4. Označme O střed opsané kružnice, tedy střed přepony AB daného pravoúhlého trojúhelníku ABC, a v velikost jeho výšky na přeponu (obr. 3). Trojúhelník EDO je zřejmě



Obr. 3

rovněž pravoúhlý, protože jeho strany DO a EO jsou kolmé na odvěsny trojúhelníku ABC; přitom jeho výškou na přeponu je úsečka OC (o velikosti $\frac{1}{2}c$). Vzhledem k souměrnosti úsečky AC podle osy OD platí pro jeho úhel při vrcholu D, že $|\sphericalangle CDO| = 90^\circ - |\sphericalangle COD| = 90^\circ - |\sphericalangle AOD| = \alpha$. Trojúhelníky EDO a ABC jsou tudíž podobné (uu). Koeficient k této podobnosti je dán poměrem délek odpovídajících výšek na přepony, takže $k = |OC|/v = \frac{1}{2}c/v$, a protože $vc = 2S$, je

$$k = \frac{c^2}{4S}.$$

V uvedené podobnosti odpovídá přeponě AB přepona DE, proto pro její velikost platí

$$|DE| = kc = \frac{c^3}{4S}.$$

Jiné řešení. Ze souměrnosti tečen z bodu ke kružnici plyne, že oba trojúhelníky ACD i BCE jsou rovnoramenné, $|AD| = |DC|$, $|BE| = |CE|$. Rovnoramenné jsou i trojúhelníky ACO a BCO, kde O je střed přepony AB (ramena obou trojúhelníků mají velikost poloměru kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku ABC, což je $\frac{1}{2}c$). Ukážeme, že jde o dvě dvojice podobných trojúhelníků $ACD \sim BCO$ a $ACO \sim BCE$. K tomu si stačí všimnout, že ve čtyřúhelníku $AOCD$, který je složen ze dvou shodných pravoúhlých trojúhelníků, platí $|\sphericalangle CDA| = 180^\circ - |\sphericalangle AOC| = |\sphericalangle COB|$. Rovnoramenné trojúhelníky ACD a BCO jsou tedy podobné podle věty uu. Z této podobnosti plyne rovnost $|CD| : |CA| = |CO| : |CB|$, takže při běžném označení odvěsen dostáváme $|CD| = \frac{1}{2}cb/a$, a z podobnosti trojúhelníků ACO a BCE pak $|CE| = \frac{1}{2}ca/b$. Celkem tak je

$$|DE| = |DC| + |CE| = \frac{cb}{2a} + \frac{ca}{2b} = \frac{cb^2 + ca^2}{2ab} = \frac{c(a^2 + b^2)}{2 \cdot 2S} = \frac{c^3}{4S}.$$

Poznámky. Podobnost zmíněných rovnoramenných trojúhelníků můžeme odvodit také tak, že si všimneme rovnosti odpovídajících úhlů ACO a BCE při základnách: oba totiž doplňují úhel OCB do pravého úhlu (ACB, resp. OCE). Proto $ACO \sim BCE$.

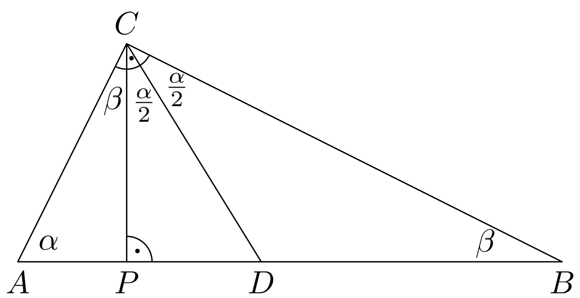
Další možnost skýtá objevení rovnosti $|\sphericalangle ADO| = |\sphericalangle BAC| = \alpha$ (ramena jednoho úhlu jsou kolmá na ramena druhého). Z pravoúhlého trojúhelníku ODA tak máme $|AO| : |AD| = \operatorname{tg} |\sphericalangle ADO| = \operatorname{tg} \alpha = a : b$, takže $|CD| = |AD| = \frac{1}{2}cb/a$, a analogicky pro pravoúhlý trojúhelník OEB.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za odhalení vhodné rovnosti úhlů udělte 3 body, za výpočet délky úsečky DE další 3 body.

2. V pravoúhlém trojúhelníku ABC označíme P patu výšky z vrcholu C na přeponu AB. Průsečík úsečky AB s přímkou, která prochází vrcholem C a středem kružnice vepsané trojúhelníku PBC, označíme D. Dokažte, že úsečky AD a AC jsou shodné.

2. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB pro velikosti α, β úhlů při vrcholech A, B platí $\alpha+\beta=90°$, proto je $|\sphericalangle ACP| = 90° - \alpha = \beta$ a $|\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle DCP| = \frac{1}{2}(90° - \beta) = \frac{1}{2}\alpha$, neboť přímka CD je osa úhlu BCP (obr. 1). Pro vnější úhel ADC trojúhelníku BCD tak zřejmě platí $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle DBC| + |\sphericalangle BCD| = \beta + \frac{1}{2}\alpha = |\sphericalangle DCA|$.

Zjistili jsme, že trojúhelník ADC má u vrcholů C, D shodné vnitřní úhly, je tedy rovnoramenný, a proto $|AD| = |AC|$.



Obr. 1

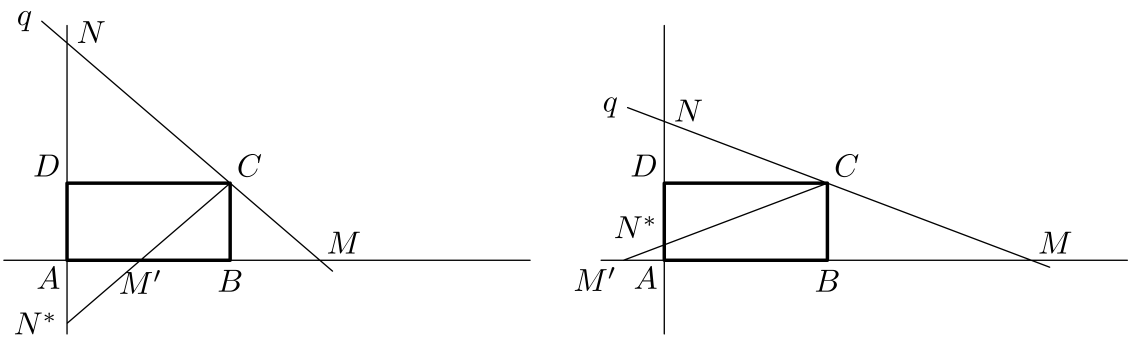
2. *Vrcholem C pravoúhelníku ABCD veďte přímky p a q, které mají s daným pravoúhelníkem společný pouze bod C, přičemž přímka p má od bodu A největší možnou vzdálenost a přímka q vymezuje s přímkami AB, AD trojúhelník co nejmenšího obsahu.*

Řešení. Pata P kolmice z bodu A na přímku p procházející bodem C leží na Thaletově kružnici nad průměrem AC. Vzdálenost bodu A od přímky p, tj. délka úsečky AP, je tedy nejvýše rovna velikosti průměru AC. Přitom rovnost nastane, právě když je přímka p kolmá na úhlopříčku AC. Přitom je zřejmé, že taková přímka p má s daným pravoúhelníkem společný pouze bod C.

Zvolme nyní libovolnou přímku q tak, aby měla s pravoúhelníkem $ABCD$ společný jen bod C. Její průsečíky s přímkami AB, AD označme M a N (v uvedeném pořadí). Dále označme M' obraz bodu M v souměrnosti podle přímky BC a N^* obraz bodu N v souměrnosti podle přímky CD. Protože $|\sphericalangle NCD| + |\sphericalangle MCB| = 180° - |\sphericalangle BCD| = 90°$, plyne z právě uvedených souměrností rovnost $|\sphericalangle MCM'| = 2|\sphericalangle MCB| = 2(90° - |\sphericalangle NCD|) = 180° - 2|\sphericalangle NCD| = 180° - |\sphericalangle NCN^*|$. Body C, M' a N^* leží tudíž na téže polopřímce s počátkem C. Pro obsah trojúhelníku AMN tak vždy platí (obr. 2)

$$S_{AMN} = S_{ABCD} + S_{BMC} + S_{DCN} = S_{ABCD} + S_{M'BC} + S_{DN^*C} \geqq 2S_{ABCD},$$

s rovností, právě když polopřímka $CM' = CN^*$ bude procházet vrcholem A daného pravoúhelníku, tj. právě když $M' = A = N^*$ (pak budou BC a CD středními příčkami trojúhelníku AMN).



Obr. 2

Závěr. Přímku q, pro kterou je obsah trojúhelníku AMN minimální, sestrojíme jako přímku CM, kde M je obraz bodu A v osové souměrnosti s osou BC.

Přímka p s největší možnou vzdáleností od bodu A za daných podmínek, je kolmice na úsečku AC sestrojená v bodě C.

Poznámka. K právě uvedenému řešení může žáky inspirovat aktivita se skládáním papíru popsaná v úloze 2.1. Místo skládáním papíru lze situaci modelovat na počítači v některém z nástrojů dynamické geometrie, například v Cabri geometrii nebo v Geonextu.

Jiné řešení. Označme P patu kolmice z bodu A na hledanou přímku p a φ velikost odchylky přímek p a AC. Pro vzdálenost d přímky p od bodu A platí $d = |AP| = |AC| \sin\varphi \leqq |AC|$. Přímka p má tedy největší možnou vzdálenost od bodu A, právě když je kolmá na AC.

Uvažujme libovolnou přímku q, která má s pravoúhelníkem $ABCD$ společný jen bod C, a budeme hledat, za jakých podmínek ohraničuje spolu s přímkami AB a AD trojúhelník nejmenšího obsahu. Použijeme označení z obr. 2 a zavedeme $a = |AB| = |DC|$, $x = |BM|$, $b = |AD| = |BC|$ a $y = |DN|$. Pomocí těchto veličin vyjádříme obsah trojúhelníku AMN a odhadneme jej užitím A-G nerovnosti:

$$S_{AMN} = \frac{1}{2}(a+x)(b+y) = \frac{1}{2}(ab+xy+ay+bx) \geqq \frac{1}{2}\big(ab+xy+2\sqrt{ab\cdot xy}\big). \qquad (1)$$

Z podobnosti trojúhelníků $BMC \sim DCN$ dostáváme $|DN|/|BC| = |DC|/|BM|$, což vzhledem ke zvolenému označení dává $xy = ab$. Po dosazení do (1) a po jednoduché úpravě tak dostaneme $S_{AMN} \geqq 2ab = 2S_{ABCD}$. Přitom rovnost nastane, právě když platí $ay = bx$. Spolu s podmínkou $xy = ab$ představují oba vztahy soustavu rovnic s neznámými x, y, jejímž vyřešením dostaneme $x = a$ a $y = b$. Dospěli jsme tedy ke stejnému výsledku jako v prvním řešení, kde jsme též uvedli konstrukci přímky q.

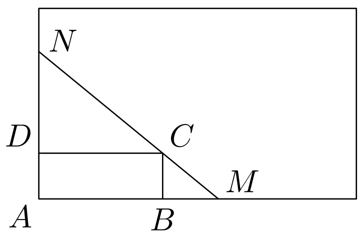
Jiné řešení. Postupujeme stejně jako v předchozím řešení s tím rozdílem, že nejprve z podobnosti trojúhelníků $BMC \sim DCN$ určíme $y = ab/x$ a potom odhadneme obsah trojúhelníku AMN pomocí tvrzení z úlohy 5.2 takto:

$$\begin{aligned} S_{AMN} &= \frac{1}{2}(a+x)(b+y) = \frac{1}{2}(a+x)\Big(b+\frac{ab}{x}\Big) = \\ &= \frac{1}{2}\Big(2ab+bx+\frac{a^2b}{x}\Big) = ab+\frac{1}{2}ab\Big(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\Big) \geqq 2ab. \end{aligned}$$

Rovnost nastává, právě když $\dfrac{x}{a} = \dfrac{a}{x}$, což je ekvivalentní s podmínkou $x = a$.

Úlohy k procvičení:

2.1. Na list papíru tvaru obdélníku narýsujte podle obrázku pravoúhelník $ABCD$ tak, aby jeho strany AB a AD splývaly s okrajem papíru. Pak sestrojte přímku, aby měla s pravoúhelníkem společný jen bod C a její průnik listem papíru tvořil úsečku MN, podél níž papír rozřízněte. Vzniklý papírový model trojúhelníku AMN s narýsovaným obdélníkem $ABCD$ přehněte podél úseček BC a DC. Tuto činnost několikrát opakujte, přitom pro tentýž pravoúhelník $ABCD$ volte různé délky úsečky BM. Co lze z výsledku usoudit o poměru obsahů trojúhelníku AMN a pravoúhelníku $ABCD$? Hypotézu dokažte.

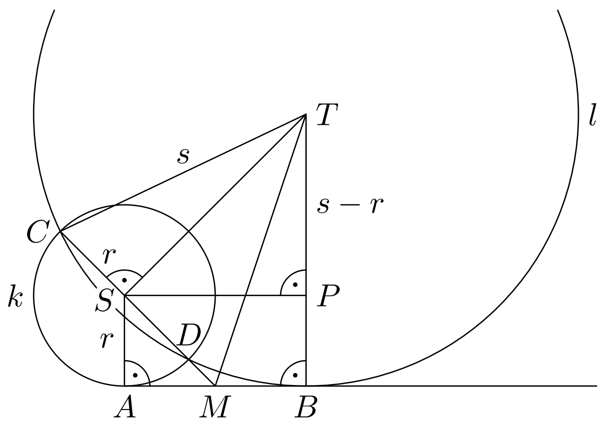


2.2. Dokažte, že pro libovolná nezáporná čísla a, b platí $\frac{1}{2}(a+b) \geqq \sqrt{ab}$, přičemž rovnost nastane, právě když $a = b$. [Žákům lze poradit substituci $a = u^2$ a $b = v^2$ nebo $a = m-d$ a $b = m+d$, kde $m = \frac{1}{2}(a+b)$ a $0 \leqq |d| \leqq \frac{1}{2}m$.]

2.3. Je dán ostrý úhel KBL a bod M jeho vnitřku. Sestrojte bodem M přímku p tak, aby vytínala z úhlu KBL trojúhelník ABC nejmenšího možného obsahu. [Kuřina, F.: Umění vidět v matematice, str. 101]
2.4. Je dán ostrý úhel XVY a jeho vnitřní bod C. Sestrojte na rameni VX bod A a na rameni VY bod B tak, aby vzniklý trojúhelník ABC měl co nejmenší obvod. [Polák, J.: Středoškolská matematika v úlohách II, str. 262]

4. *Kružnice $k(S;r)$ se dotýká přímky AB v bodě A. Kružnice $l(T;s)$ se dotýká přímky AB v bodě B a protíná kružnici k v krajních bodech C, D jejího průměru. Vyjádřete délku a úsečky AB pomocí poloměrů r, s. Dokažte dále, že průsečík M přímek CD, AB je středem úsečky AB.*

Řešení. Protože kružnice l má za tětivu průměr CD kružnice k a dané kružnice nejsou totožné, platí pro jejich poloměry nerovnost $s > r$. Označíme-li P patu kolmice z bodu S na úsečku BT (obr. 4), pak z Pythagorovy věty pro pravoúhlé trojúhelníky



Obr. 4

CST a SPT plyne

$$|ST|^2 = s^2 - r^2 \quad \text{a} \quad |ST|^2 = |SP|^2 + (s-r)^2. \tag{1}$$

Odtud pro velikost úsečky SP vychází

$$|SP|^2 = (s^2 - r^2) - (s-r)^2 = 2r(s-r).$$

A protože $ABPS$ je pravoúhelník, dostáváme

$$|AB| = |SP| = \sqrt{2r(s-r)}.$$

Z pravoúhlých trojúhelníků AMS a MTS dále podle první rovnosti v (1) plyne

$$|AM|^2 = |SM|^2 - r^2 = |MT|^2 - |ST|^2 - r^2 = |MT|^2 - s^2,$$

přitom z pravoúhlého trojúhelníku MBT máme

$$|BM|^2 = |MT|^2 - s^2.$$

Je proto $|AM| = |BM|$, a bod M je tedy středem úsečky AB.

Poznámka. Závěr, že M je středem úsečky AB, plyne okamžitě z mocnosti bodu M k oběma kružnicím (bod M leží na tzv. chordále obou kružnic). Tyto pojmy jsou však pro soutěžící kategorie C dosud neznámé a nebudou nezbytné ani pro řešení dalších soutěžních kol.

Úlohy k procvičení:

4.1. Kružnice k, l, m se po dvou vně dotýkají a všechny tři mají společnou tečnu. Poloměry kružnic k, l jsou 3 cm a 12 cm. Vypočtěte poloměr kružnice m. Najděte všechna řešení. [55–C–I–2]

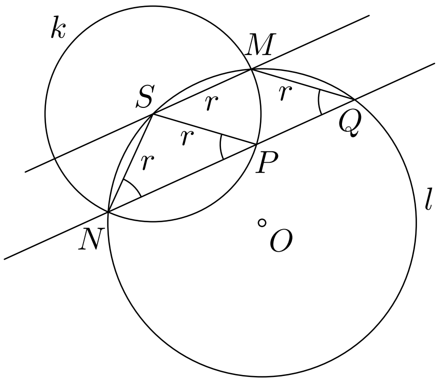
4.2. Kružnice k, l, m se dotýkají společné tečny ve třech různých bodech a jejich středy leží v přímce. Kružnice k a l stejně jako kružnice l a m mají vnější dotyk. Určete poloměr kružnice l, jestliže poloměry kružnic k a m jsou 3 cm a 12 cm. [55–C–S–3]

4.3. Kružnice k, l s vnějším dotykem leží obě v obdélníku $ABCD$, jehož obsah je 72 cm^2. Kružnice k se přitom dotýká stran CD, DA a AB, zatímco kružnice l se dotýká stran AB a BC. Určete poloměry kružnic k a l, jestliže poloměr kružnice k je v centimetrech vyjádřen celým číslem. [55–C–II–3]

4.4. Do kružnice k o poloměru r jsou vepsány dvě kružnice k_1, k_2 o poloměru $\frac{1}{2}r$, jež se vzájemně dotýkají. Kružnice l se vně dotýká kružnic k_1, k_2 a s kružnicí k má vnitřní dotyk. Kružnice m má vnější dotyk s kružnicemi k_2 a l a vnitřní dotyk s kružnicí k. Vypočtěte poloměry kružnic l a m. [55–B–I–6]

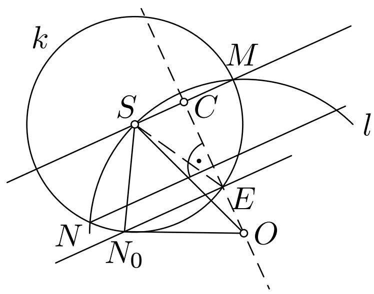
3. Je dána kružnice k se středem S. Kružnice l má větší poloměr než kružnice k, prochází jejím středem a protíná ji v bodech M a N. Přímka, která prochází bodem N a je rovnoběžná s přímkou MS, vytíná na kružnicích tětivy NP a NQ. Dokažte, že trojúhelník MPQ je rovnoramenný.

3. Poloměr kružnice k označme r. Označení vrcholů P, Q v trojúhelníku MPQ není důležité, proto bez újmy na obecnosti označme jako P ten z bodů přímky vedené bodem N rovnoběžně s přímkou MS, který leží na kružnici k. Bod Q pak leží na kružnici l a čtyřúhelník $NQMS$ je lichoběžník vepsaný kružnici l (obr. 1). Je tedy rovnoramenný s rameny MQ a NS délky r. Navíc i úsečky SP a SM mají délku r. Z rovnoramenného trojúhelníku NPS a rovnoramenného lichoběžníku $NQMS$ plyne rovnost úhlů $|\sphericalangle SPN| = |\sphericalangle SNP| = |\sphericalangle MQP|$. Příčka PQ tedy protíná přímky SP a MQ pod stejně velkými úhly, a proto (podle věty o souhlasných úhlech) jsou přímky SP a MQ rovnoběžné. Čtyřúhelník $PQMS$ je tudíž rovnoběžník, a protože $|SM| = |SP| = r$, je to dokonce kosočtverec. Odtud je již zřejmé, že trojúhelník MPQ je rovnoramenný s rameny PQ a MQ délky r.



Obr. 1

Poznámka. Existence tětiv NP a NQ v zadání je zaručena díky předpokladu, že kružnice l má větší poloměr než kružnice k. Označíme-li C střed úsečky SM a E ten průsečík kružnice k s osou úsečky SM, který leží v polorovině SMO, bude střed O kružnice l ležet na polopřímce CE až za bodem E (obr. 2). Další průsečík N obou kružnic proto



Obr. 2

padne do pásu mezi rovnoběžkami SM a N_0E v polorovině OCS, kde N_0 je čtvrtý vrchol kosočtverce s vrcholy S, M, E. K tomu stačí ukázat, že kružnice l protne polopřímku EN_0

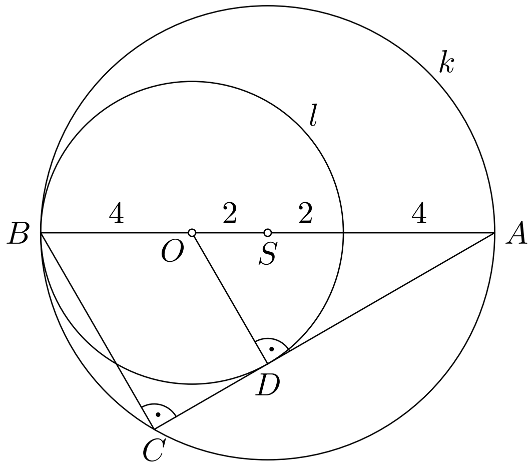
až za bodem N_0, že tedy její poloměr OS je větší než délka úsečky ON_0. Toto srovnání dvou stran trojúhelníku OSN_0 snadno plyne z porovnání jeho vnitřních úhlů: úhel u vrcholu N_0 je největší, neboť oba úhly při protilehlé straně OS jsou menší než $60°$ (trojúhelník ESN_0 je rovnostranný). Snadno nahlédneme, že každá z rovnoběžek uvedeného pásu protíná každou z obou kružnic ve dvou bodech (vždy souměrně sdružených podle příslušné osy kolmé na SM).

Tím je prokázána nejen existence obou tětiv NP a NQ, ale i to, že jejich krajní body P a Q leží na stejnou stranu od bodu N (jako na obr. 1), neboť oba body zřejmě leží v polorovině opačné ke zmiňované polorovině OCS.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za zdůvodnění, že $NQMS$ je rovnoramenný lichoběžník, 1 bod za důkaz shodnosti úhlů SNP a SPN, 2 body za důkaz, že $PQMS$ je rovnoběžník a 1 bod za zdůvodnění $|PQ| = |MQ| = r$. Existenci obou tětiv vyšetřovanou v závěrečné poznámce není nutné dokazovat, protože je předpokladem úlohy.

2. Kružnice $k(S; 6\,\mathrm{cm})$ a $l(O; 4\,\mathrm{cm})$ mají vnitřní dotyk v bodě B. Určete délky stran trojúhelníku ABC, kde bod A je průsečík přímky OB s kružnicí k a bod C je průsečík kružnice k s tečnou z bodu A ke kružnici l.

2. Bod dotyku kružnice l s tečnou z bodu A označme D (obr. 1). Z vlastností tečny ke kružnici plyne, že úhel ADO je pravý. Zároveň je pravý i úhel ACB (Thaletova věta).



Obr. 1

Trojúhelníky ABC a AOD jsou tak podobné podle věty uu, neboť se shodují v úhlech ACB, ADO a ve společném úhlu při vrcholu A. Z uvedené podobnosti plyne

$$\frac{|BC|}{|OD|} = \frac{|AB|}{|AO|}. \tag{1}$$

Ze zadaných číselných hodnot vychází $|OD| = |OB| = 4\,\mathrm{cm}$, $|OS| = |SB| - |OB| = 2\,\mathrm{cm}$, $|OA| = |OS| + |SA| = 8\,\mathrm{cm}$ a $|AB| = 12\,\mathrm{cm}$. Podle (1) je tedy $|BC| : 4\,\mathrm{cm} = 12 : 8$ a odtud $|BC| = 6\,\mathrm{cm}$. Z Pythagorovy věty pro trojúhelník ABC nakonec zjistíme, že $|AC| = \sqrt{12^2 - 6^2}\,\mathrm{cm} = 6\sqrt{3}\,\mathrm{cm}$.

Za úplné a správně zdůvodněné řešení udělte 6 bodů. Z toho 2 body za obrázek a zdůvodnění pravých úhlů, 2 body za zdůvodnění podobnosti trojúhelníků a sestavení potřebné rovnice, 2 body za dopočítání délek stran BC a AC.

3. *Máme čtverec $ABCD$ se stranou délky 1 cm. Body K a L jsou středy stran DA a DC. Bod P leží na straně AB tak, že $|BP| = 2|AP|$. Bod Q leží na straně BC tak, že $|CQ| = 2|BQ|$. Úsečky KQ a PL se protínají v bodě X. Obsahy čtyřúhelníků $APXK$, $BQXP$, $QCLX$ a $LDKX$ označíme postupně S_A, S_B, S_C, S_D (obr. 1).*

a) Dokažte, že $S_B = S_D$.

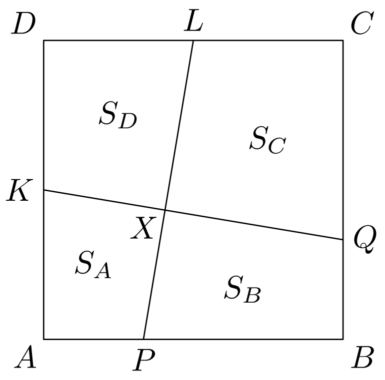
b) Vypočtěte rozdíl $S_C - S_A$.

c) Vysvětlete, proč neplatí $S_A + S_C = S_B + S_D$.

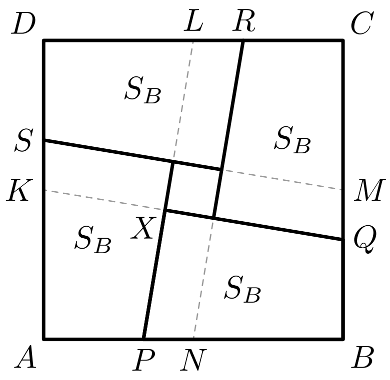
Řešení. a) Čtyřúhelníky $ABQK$ a $DAPL$ jsou shodné (jeden z nich je obrazem druhého v otočení o 90° se středem ve středu čtverce $ABCD$). Proto mají i stejný obsah, tedy $S_A + S_B = S_A + S_D$. Z toho hned dostáváme $S_B = S_D$.

b) Snadno se nám podaří vypočítat obsah pravoúhlého lichoběžníku $ABQK$, neboť známe délky základen i výšku. Dostaneme $S_A + S_B = (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12}\,\mathrm{cm}^2$. Podobně výpočtem obsahu lichoběžníku $PBCL$ dostaneme $S_C + S_B = (\frac{1}{2} + \frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12}\,\mathrm{cm}^2$. Odečtením první získané rovnosti od druhé dostáváme $S_C - S_A = \frac{7}{12} - \frac{5}{12} = \frac{1}{6}\,\mathrm{cm}^2$.

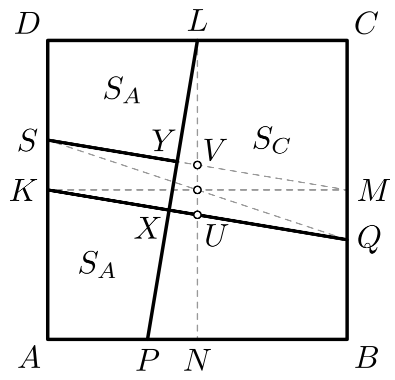
c) Nerovnost mezi obsahy $S_A + S_C$ a $S_B + S_D$ (jejichž přímé výpočty jsou nad síly žáků 1. ročníku) můžeme zdůvodnit následujícím způsobem. Součet těchto dvou obsahů



Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3

je $1\,\mathrm{cm}^2$, takže se nerovnají, právě když je jeden z nich menší než $\frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$. Bude to obsah $S_B + S_D$ (rovný $2S_B$, jak už víme), když ukážeme, že obsah S_B je menší než $\frac{1}{4}\,\mathrm{cm}^2$. Uděláme to tak, že do celého čtverce $ABCD$ umístíme bez překrytí čtyři exempláře dotyčného čtyřúhelníku $PBQX$. Jak, to je patrné z obr. 2, kde M, N značí středy stran BC, AB a R, S body, jež dělí strany CD, DA v poměru $1:2$.

Jiné řešení části c). Tentokrát místo nerovnosti $S_B + S_D < \frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$ dokážeme ekvivalentní nerovnost $S_A + S_C > \frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$. Proto se pokusíme „přemístit" čtyřúhelník $APXK$ tak, aby ležel při čtyřúhelníku $XQCL$ a aby se jejich obsahy daly i geometricky sečíst. Úhly AKQ a DLP jsou shodné a $|AK| = |DL|$, proto můžeme čtyřúhelník $APXK$ přemístit ve čtverci $ABCD$ do jeho „rohu" D tak, že se ke čtyřúhelníku $XQCL$ „přimkne" podél strany LX svou stranou LY, kde Y je průsečík úseček SM a PL z původního řešení (obr. 3). Obsah $S_A + S_C$ je pak obsahem šestiúhelníku $DSYXQC$. Proč je větší než $\frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$, lze zdůvodnit například takto:

Úsečka spojující bod L se středem U úsečky KQ protne úsečku SM v jejím středu V. Čtyřúhelník $UQMV$ má obsah rovný polovině obsahu rovnoběžníku $KQMS$, tedy rovný obsahu trojúhelníku KMS. Proto má šestiúhelník $DSVUQC$ obsah rovný obsahu čtyřúhelníku $KMCD$, tj. polovině obsahu čtverce $ABCD$. Obsah $S_A + S_C$ je ještě větší, a to o obsah čtyřúhelníku $XUVY$. Je tedy vskutku $S_A + S_C > \frac{1}{2}\,\mathrm{cm}^2$.

Návodné a doplňující úlohy:

N1. Je dán lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB a průsečíkem úhlopříček P. Víme, že obsah trojúhelníku ABP je 16 a obsah trojúhelníku BCP je 10.
a) Vypočítejte obsah trojúhelníku ADP.
b) Vypočítejte obsah lichoběžníku $ABCD$.
[Trojúhelníky ABC a ABD mají společnou stranu AB a stejné výšky na tuto stranu, mají tedy stejný obsah. Proto mají stejný obsah i trojúhelníky ADP a BCP. Obsah trojúhelníku CDP vypočteme například z jeho podobnosti s trojúhelníkem ABP, poměr podobnosti je $|AP|/|CP| = S_{ABP}/S_{CBP}$. Dostaneme $S_{ABCD} = 169/4$.]

N2. Ve čtverci $ABCD$ o straně délky 1 označme K, L po řadě středy stran AB, AD. Přímky CK a BL se protínají v bodě M, přímky CL a KD se protínají v bodě N. Ukažte, že součet obsahů trojúhelníků KBM, KLN a CDN není větší než $3/8$. [Přímo vypočítat obsahy jednotlivých trojúhelníků jde jen těžko. Pomohlo by přemístit tyto trojúhelníky „více k sobě", aby se jejich obsahy daly geometricky sečíst. Například díky osové souměrnosti podle přímky AC je trojúhelník KLN shodný s trojúhelníkem KLM. A obsah trojúhelníku KBL už vypočítáme snadno, je to $1/8$. Zbývá ukázat, že obsah trojúhelníku DCN je menší než $1/4$. To je hned vidět z toho, že trojúhelník DCN je částí trojúhelníku DCL s obsahem $1/4$.]

D1. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme D patu výšky z vrcholu C a P, Q odpovídající paty kolmic vedených bodem D na strany AC a BC. Obsahy trojúhelníků ADP, DCP, DBQ, CDQ označme postupně S_1, S_2, S_3, S_4. Vypočítejte $S_1 : S_3$, jestliže $S_1 : S_2 = 2:3$ a $S_3 : S_4 = 3:8$. [C–55–I–5]

D2. V libovolném konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ označme E střed strany BC a F střed strany AD. Dokažte, že trojúhelníky AED a BFC mají stejný obsah, právě když jsou strany AB a CD rovnoběžné. [C–54–I–3]

D3. Spojnice středů stran AB a CD konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ rozdělí tento čtyřúhelník na dvě části o stejném obsahu. Ukažte, že přímky AB a CD jsou rovnoběžné. [Označme S a T po řadě středy stran AB a CD. Trojúhelníky DST a CST mají stejný obsah (stejně dlouhé strany DT a CT, společnou výšku). Proto trojúhelníky ADS a BCS mají stejný obsah, a protože mají stejně dlouhé strany AS a BS, musejí mít i stejné výšky, body D a C jsou tedy stejně vzdáleny od přímky AB.]

D4. Najděte všechny konvexní čtyřúhelníky $ABCD$ s následující vlastností: v rovině čtyřúhelníku $ABCD$ existuje bod P takový, že každá přímka vedená bodem P rozdělí čtyřúhelník $ABCD$ na dvě části o stejném obsahu. [49–A–II–4]

6. *Je dán lichoběžník $ABCD$. Střed základny AB označme P. Uvažujme rovnoběžku se základnou AB, která protíná úsečky AD, PD, PC, BC postupně v bodech K, L, M, N.*

a) Dokažte, že $|KL| = |MN|$.

b) Určete polohu přímky KL tak, aby platilo i $|KL| = |LM|$.

Řešení. a) Přímky AB, CD a KL jsou rovnoběžné, proto v dané situaci dovedeme najít vícero dvojic trojúhelníků podobných vždy podle věty *uu*. Tyto podobnosti lze výhodně zapsat pomocí poměrů vzdáleností, což využijeme v důkazu toho, že úsečky KL a MN mají stejnou délku.

Označme x vzdálenost přímek AB a KL a y vzdálenost přímek KL a CD. Pomocí těchto vzdáleností nyní vyjádříme koeficienty podobnosti odpovídajících trojúhelníků.

Trojúhelníky APD a KLD jsou podobné, proto

$$\frac{|KL|}{|AP|} = \frac{y}{x+y}.$$

Trojúhelníky BPC a NMC jsou podobné, proto

$$\frac{|MN|}{|PB|} = \frac{y}{x+y}.$$

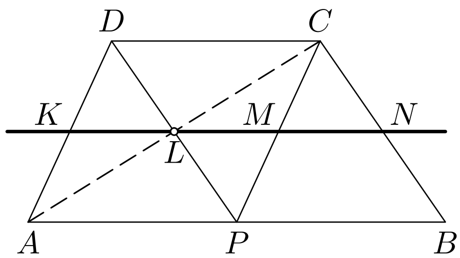
Spojením obou rovností dostáváme

$$\frac{|KL|}{|AP|} = \frac{y}{x+y} = \frac{|MN|}{|PB|},$$

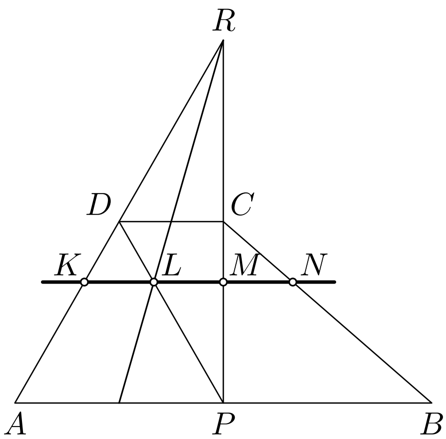
a protože $|AP| = |PB|$, plyne odtud $|KL| = |MN|$.

b) Chceme sestrojit bod L úsečky PD takový, že $|KL| = |LM|$. Rozebereme dva případy podle toho, zda je či není přímka PC rovnoběžná s přímkou AD.

Jestliže je přímka PC rovnoběžná s AD, je $APCD$ rovnoběžník a jediný vyhovující bod L je střed úsečky PD neboli průsečík úhlopříček rovnoběžníku $APCD$ (podmínka $|KL| = |LM|$ tu vyjadřuje shodnost trojúhelníků KLD a MLP, která nastane, právě když $|LD| = |LP|$, obr. 4).



Obr. 4



Obr. 5

Jestliže se přímky PC a AD protínají v nějakém bodě R (obr. 5), bude bod L průsečíkem úsečky DP s přímkou, na níž leží těžnice trojúhelníku APR z vrcholu R. Plyne to z poznatku, že s úsečkou AP jsou podle středu R stejnolehlé všechny v úvahu připadající úsečky KM, a proto středy všech těchto úseček leží na přímce jdoucí bodem R a středem úsečky AP.

Z uvedených konstrukcí plyne, že vyhovující bod L je vždy jediný, existuje tudíž právě jedna rovnoběžka s přímkou AB s požadovanými vlastnostmi.

Poznámka. Jak jsme uvedli v řešení, pokud jsou přímky PC a AD rovnoběžné, je hledaným bodem L, pro který platí $|KL| = |LM|$, průsečík úhlopříček rovnoběžníku $APCD$. Pokud přímky PC a AD rovnoběžné nejsou, tj. $APCD$ je lichoběžník, je i v tomto případě průsečík jeho úhlopříček výborným kandidátem pro takový bod L. Výpočtem s využitím podobnosti se dá ukázat, že tomu tak vskutku je, takže hledaným bodem L je v každém případě průsečík úhlopříček čtyřúhelníku $APCD$ (viz též úlohu N1).

Návodné a doplňující úlohy:

N1. V lichoběžníku $ABCD$ s průsečíkem úhlopříček P sestrojme rovnoběžku se základnou AB procházející bodem P. Tato přímka protne ramena AD a BC v bodech K a L. Ukažte, že bod P je středem úsečky KL. Vypočítejte délku úsečky KL, jestliže víte, že $|AB| = a$, $|CD| = c$. [Využijeme podobnost dvojic trojúhelníků DKP a DAB, CPL a CAB, PAB a PCD. Označíme-li v_1 výšku trojúhelníku PAB a v_2 výšku trojúhelníku PCD, je $|KP| = |LP| = a \cdot v_2/(v_1 + v_2)$. Odtud $|KL| = 2ac/(a + c)$.]

N2. Je dán lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB. Nechť X, Y jsou po řadě průsečíky dvojic přímek AD a BC, AC a BD. Dokažte, že body X, Y a středy základen lichoběžníku $ABCD$ leží na jedné přímce. [Stejnolehlost se středem v bodě X zobrazující úsečku AB na úsečku CD zobrazí střed jedné základny do středu druhé základny, proto středy základen a bod X leží v přímce. Analogicky leží v přímce středy základen a bod Y. Je vhodné zkusit i řešení využívající jen podobnost trojúhelníků bez odkazu na vlastnosti stejnolehlosti.]

D1. Je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD. Označme E střed strany AB, F střed úsečky DE a G průsečík úseček BD a CE. Vyjádřete obsah lichoběžníku $ABCD$ pomocí jeho výšky v a délky d úsečky FG za předpokladu, že body A, F, C leží na jedné přímce. [56–C–I–4]

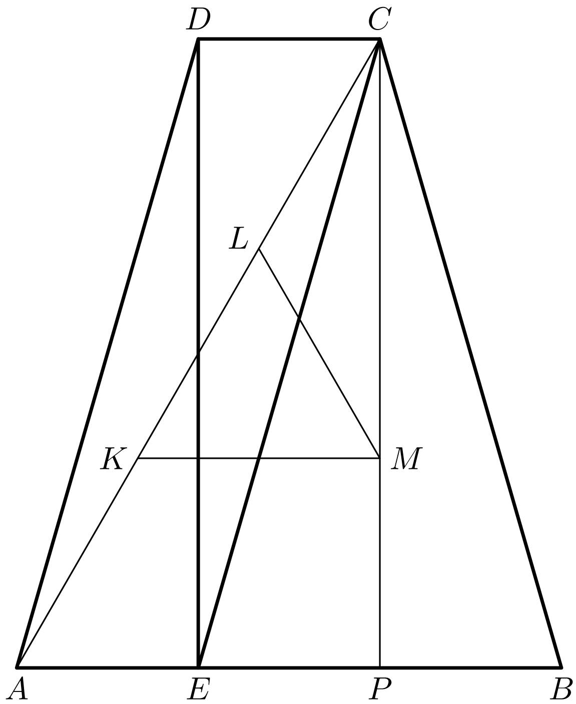
D2. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ s výškou 3 cm a shodnými stranami BC, CD a DA, pro nějž platí: Na základně AB existuje bod E takový, že úsečka DE má délku 5 cm a dělí lichoběžník na dvě části se stejnými obsahy. [52–C–I–4]

3. Lichoběžník $ABCD$ má základny AB a CD po řadě délek 18 cm a 6 cm. Pro bod E strany AB platí $2|AE| = |EB|$. Těžiště trojúhelníků ADE, CDE, BCE, jež označíme po řadě K, L, M, tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku.

a) Dokažte, že přímky KM a CM svírají pravý úhel.

b) Vypočtěte délky ramen lichoběžníku $ABCD$.

3. Čtyřúhelník $AECD$ je rovnoběžník, protože jeho strany AE a CD jsou rovnoběžné a stejně dlouhé (obě měří 6 cm). Na jeho úhlopříčce AC tak leží těžnice trojúhelníku ADE z vrcholu A i těžnice trojúhelníku CDE z vrcholu C, a proto na této přímce leží i body K a L (obr. 1). Navíc víme, že těžiště trojúhelníku dělí jeho těžnice v poměru $2:1$, proto jsou úsečky AK, KL a LC stejně dlouhé.



Obr. 1

Bod L je středem úsečky KC, proto na ose souměrnosti úsečky KM leží nejen výška rovnostranného trojúhelníku KLM, ale i střední příčka trojúhelníku KMC. Proto je přímka CM kolmá na KM.

Zbývá vypočítat délky ramen lichoběžníku $ABCD$. Označme P střed úsečky EB. Protože CM je kolmá na KM, je těžnice CP kolmá na EB, takže trojúhelník EBC je rovnoramenný, a tudíž i daný lichoběžník $ABCD$ je rovnoramenný. Délku ramene BC nyní vypočteme z pravoúhlého trojúhelníku PBC, v němž známe délku odvěsny PB. Pro druhou odvěsnu CP zřejmě platí

$$|CP| = \frac{3}{2}|CM| = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\,|KM|,$$

jak snadno plyne z vlastností trojúhelníku KMC. A protože $|KM| = \frac{2}{3}|AP|$ z podobnosti trojúhelníků KMC a APC, je (počítáno v centimetrech)

$$|CP| = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\,|KM| = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3}|AP| = \sqrt{3} \cdot \frac{2}{3}|AB| = 12\sqrt{3}.$$

Potom

$$|BC| = \sqrt{|PB|^2 + |PC|^2} = \sqrt{36 + 12^2 \cdot 3} = 6\sqrt{1 + 12} = 6\sqrt{13}.$$

Ramena daného lichoběžníku mají délku $6\sqrt{13}\,$cm.

Alternativní důkaz kolmosti přímek KM a CM: Protože bod L je středem úsečky KC a zároveň $|LK| = |LM|$, neboť trojúhelník KLM je rovnostranný, leží bod M na Thaletově kružnici nad průměrem KC, takže trojúhelník KMC je pravoúhlý.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 3 body za důkaz kolmosti přímek KM a CM a 3 body za výpočet délek obou ramen lichoběžníku $ABCD$. Neúplné řešení hodnoťte podle pokroku, kterého žák dosáhl. V uvedeném řešení by rozdělení bodů bylo následující: důkaz kolmosti KM a CM — 3 body, z toho 1 bod za odůvodnění toho, že bod L je středem úsečky KC; výpočet délky úsečky KM — 1 bod; výpočet délky jednotlivých ramen — po 1 bodu.

2. Je dán čtverec se stranou délky 6 cm. Najděte množinu středů všech příček čtverce, které ho dělí na dva čtyřúhelníky, z nichž jeden má obsah $12\,\mathrm{cm}^2$. (Příčkou čtverce rozumíme úsečku, jejíž krajní body leží na stranách čtverce.)

2. Jestliže příčka dělí čtverec na dva čtyřúhelníky, musejí její koncové body ležet na protilehlých stranách čtverce. V takovém případě jsou oba čtyřúhelníky lichoběžníky nebo pravoúhelníky (pro potřeby tohoto řešení budeme pravoúhelník považovat za speciální lichoběžník). Označme daný čtverec $ABCD$, koncové body příčky označme K a L. Předpokládejme, že bod K leží na straně AD, potom bod L leží na straně BC. Jeden ze čtyřúhelníků $KABL$ a $KDCL$ má podle zadání obsah $12\,\mathrm{cm}^2$; nechť je to např. lichoběžník $KABL$.

Obsah lichoběžníku vypočteme jako součin jeho výšky s délkou střední příčky. Výška je v našem případě rovna délce strany čtverce, tedy $6\,\mathrm{cm}$. Jeho střední příčka má tudíž délku $2\,\mathrm{cm}$. Z toho plyne, že střed úsečky KL musí ležet na ose strany AB ve vzdálenosti $2\,\mathrm{cm}$ od středu strany AB. Platí to i naopak: jestliže střed úsečky KL leží v popsané poloze, bude čtyřúhelník $KABL$ lichoběžník s obsahem $12\,\mathrm{cm}^2$.

Budeme-li místo lichoběžníku $KABL$ uvažovat lichoběžník $KDCL$, vyjde střed příčky KL na osu úsečky CD ve vzdálenosti $2\,\mathrm{cm}$ od středu strany CD.

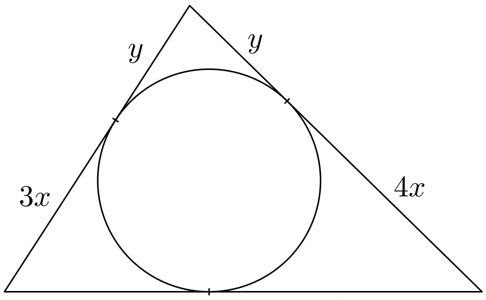
Pokud příčka KL spojuje body na stranách AB a CD, dostaneme další dva možné body ležící na spojnici středů úseček AD a BC. Hledanou množinu tedy tvoří čtyři body, které leží na příčkách spojujících středy protilehlých stran čtverce ve vzdálenosti $1\,\mathrm{cm}$ od jeho středu.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Jestliže řešitel nezdůvodní, že nalezené body mají požadovanou vlastnost (má jen důkaz nutné podmínky), udělte nejvýše 5 bodů. Za objevení jednoho z bodů zkoumané množiny bez důkazu správnosti dejte jen 1 bod a za popis správné množiny bez důkazu správnosti 2 body.

2. *Délky stran trojúhelníku jsou v metrech vyjádřeny celými čísly. Určete je, má-li trojúhelník obvod* 72 m *a je-li nejdelší strana trojúhelníku rozdělena bodem dotyku vepsané kružnice v poměru* 3 : 4.

ŘEŠENÍ. Využijeme obecného poznatku, že body dotyku vepsané kružnice dělí hranici trojúhelníku na šest úseček, a to tak, že každé dvě z nich, které vycházejí ze stejného vrcholu trojúhelníku, jsou shodné. (Tečny z daného bodu k dané kružnici jsou totiž souměrně sdružené podle spojnice daného bodu se středem dané kružnice.)

V naší úloze je nejdelší strana trojúhelníku rozdělena na úseky, jejichž délky označíme $3x$ a $4x$, zatímco délku úseků z vrcholu oproti nejdelší straně označíme y (obr. 1). Strany trojúhelníku mají tudíž délky $7x$, $4x + y$ a $3x + y$, kde x, y jsou neznámá kladná čísla (délky bereme bez jednotek). Má-li být $7x$ délka nejdelší strany, musí platit $7x > 4x + y$ neboli $3x > y$. Zdůrazněme, že hledaná čísla x, y nemusejí být nutně celá, podle zadání to však platí o číslech $7x$, $4x + y$ a $3x + y$.



Obr. 1

Údaj o obvodu trojúhelníku zapíšeme rovností

$$72 = 7x + (3x + y) + (4x + y) \quad \text{neboli} \quad 36 = 7x + y.$$

Protože $7x$ je celé číslo, je celé i číslo $y = 36 - 7x$; a protože podle zadání i čísla $4x + y$ a $3x + y$ jsou celá, je celé i číslo $x = (4x + y) - (3x + y)$. Proto od této chvíle už hledáme dvojice *celých* kladných čísel x, y, pro něž platí

$$3x > y \quad \text{a} \quad 7x + y = 36.$$

Odtud ovšem plyne $7x < 36 < 7x + 3x = 10x$, tedy $x \leqq 5$ a současně $x \geqq 4$.

Pro $x = 4$ je tak $y = 8$ a $(7x, 4x + y, 3x + y) = (28, 24, 20)$, pro $x = 5$ je $y = 1$ a $(7x, 4x + y, 3x + y) = (35, 21, 16)$. Strany trojúhelníku tedy jsou $(28, 24, 20)$ nebo $(35, 21, 16)$. (Trojúhelníkové nerovnosti jsou zřejmě splněny.)

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

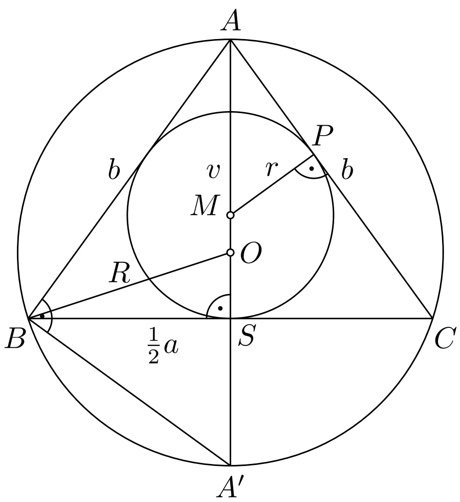
1. Pomocí délek a, b, c stran obecného trojúhelníku vyjádřete délky úseček, na které jsou tyto strany rozděleny body dotyku kružnice, která je dotyčnému trojúhelníku vepsána. Na příkladu pak ukažte, že tyto délky nemusejí být vyjádřeny celými čísly, i když strany trojúhelníku taková vyjádření mají. [Jedná se o dvě úsečky délky $x = \frac{1}{2}(a + b - c)$, dvě úsečky délky $y = \frac{1}{2}(b + c - a)$ a dvě úsečky délky $z = \frac{1}{2}(c + a - b)$. Tyto délky nejsou celočíselné, jsou-li například všechny tři délky a, b, c vyjádřeny lichými čísly.]
2. Sestrojíme-li ze tří úseček jakýchkoliv délek p, q, r úsečky délek $a = p + q$, $b = q + r$ a $c = r + p$, budou tyto tři nové úsečky délkami stran některého trojúhelníku. Vysvětlete a pak uveďte, jaký význam v takovém trojúhelníku budou mít původní délky p, q, r. [Ověřit algebraicky trojúhelníkové nerovnosti $a + b > c > |a - b|$ je triviální, neboť jde o zřejmé nerovnosti $p + 2q + r > p + r > |p - r|$. V trojúhelníku o stranách a, b, c jsou

délky p, q, r délkami úseček, na které jsou strany a, b, c rozděleny body dotyku vepsané kružnice, jak plyne z výsledku úlohy 1.]

3. Trojúhelník ABC splňuje při obvyklém značení délek stran podmínku $a \leqq b \leqq c$. Vepsaná kružnice se dotýká stran AB, BC a AC po řadě v bodech K, L a M. Dokažte, že z úseček AK, BL a CM lze sestrojit trojúhelník, právě když platí $b + c < 3a$. [57–C–II–1]
4. Dokažte, že v každém pravoúhlém trojúhelníku je součet poloměrů vepsané kružnice a opsané kružnice roven aritmetickému průměru délek obou odvěsen. [První řešení úlohy 59–A–S–2.]
5. Určete délku přepony pravoúhlého trojúhelníku, znáte-li poloměr r kružnice vepsané a poloměr R kružnice připsané k přeponě tohoto trojúhelníku (tj. kružnice, která se dotýká zvnějšku přepony a prodloužení obou odvěsen trojúhelníku). [45–C–I–6]

5. *Je dán rovnoramenný trojúhelník se základnou délky a a rameny délky b. Pomocí nich vyjádřete poloměr R kružnice opsané a poloměr r kružnice vepsané tomuto trojúhelníku. Pak ukažte, že platí $R \geqq 2r$, a zjistěte, kdy nastane rovnost.*

Řešení. Označme S střed základny BC daného rovnoramenného trojúhelníku ABC, O střed jeho opsané kružnice, M střed vepsané kružnice a P patu kolmice z bodu M na rameno AC (obr. 2).



Obr. 2

Z pravoúhlého trojúhelníku BSA umíme pomocí Pythagorovy věty vyjádřit velikost v výšky AS, přičemž v pravoúhlém trojúhelníku BSO s přeponou délky R pro odvěsnu OS platí $|OS| = \big||AS| - |AO|\big| = |v - R|$ (musíme si uvědomit, že v tupoúhlém trojúhelníku ABC bude bod S ležet mezi body A a O!). Dostáváme tak dvě rovnosti

$$v^2 = b^2 - \frac{a^2}{4},$$

$$R^2 = \frac{a^2}{4} + (v - R)^2,$$

jejichž sečtením vyjde

$$v^2 + R^2 = b^2 + (v - R)^2 \quad \text{neboli} \quad b^2 = 2vR.$$

Dosazením z první rovnice $v = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$ do poslední rovnosti dostaneme hledaný vzorec pro R.

Dodejme, že rovnost $b^2 = 2vR$, kterou jsme právě odvodili a z níž už snadno plyne kýžený vzorec pro poloměr R, je Eukleidovou větou o odvěsně AB pravoúhlého trojúhelníku ABA' s přeponou AA', jež je průměrem kružnice opsané trojúhelníku ABC (obr. 2).

Nalezený vzorec pro poloměr R zapíšeme přehledně spolu s druhým hledaným vzorcem pro poloměr r, jehož odvození se teprve budeme věnovat:

$$R = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}} \quad \text{a} \quad r = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2(a + 2b)}. \tag{$*$}$$

Druhý ze vzorců $(*)$ lze získat okamžitě ze známého vztahu $r = 2S/(a + b + c)$ pro poloměr r kružnice vepsané do obecného trojúhelníku o stranách a, b, c a obsahu S; v našem případě stačí pouze dosadit $b = c$ a $2S = av$, kde $v = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 - a^2}$ podle úvodní části řešení.

Další dva způsoby odvození druhého ze vzorců $(*)$ založíme na úvaze o pravoúhlém trojúhelníku AMP, jehož strany mají délky

$$|AM| = v - r, \quad |MP| = r, \quad |AP| = |AC| - |PC| = b - |SC| = b - \frac{a}{2}.$$

Pro tento trojúhelník můžeme zapsat Pythagorovu větu, nebo využít jeho podobnost s trojúhelníkem ACS, konkrétně zapsat rovnost sinů jejich společného úhlu při vrcholu A. Podle toho dostaneme rovnice

$$(v - r)^2 = r^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right)^2, \quad \text{resp.} \quad \frac{r}{v - r} = \frac{\frac{1}{2}a}{b},$$

jež jsou, jak snadno nahlédneme, obě lineární vzhledem k neznámé r a mají řešení

$$r = \frac{v}{2} - \frac{1}{2v} \cdot \left(b - \frac{a}{2}\right)^2, \quad \text{resp.} \quad r = \frac{av}{a + 2b}.$$

Po dosazení za v v obou případech obdržíme kýžený vzorec pro r. Ve druhém případě je to zřejmé, v prvním to předvedeme:

$$r = \frac{v}{2} - \frac{1}{2v} \cdot \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{v^2 - b^2 + ab - \frac{1}{4}a^2}{2v} = \frac{2ab - a^2}{4v} =$$
$$= \frac{a(2b - a)}{2\sqrt{(2b - a)(2b + a)}} = \frac{a\sqrt{2b - a}}{2\sqrt{2b + a}} = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2(a + 2b)}.$$

Ještě zbývá dokázat nerovnost $R \geqq 2r$. Využijeme k tomu odvozených vzorců $(*)$, ze kterých dostáváme (připomínáme, že $2b > a > 0$)

$$\frac{R}{2r} = R \cdot \frac{1}{2r} = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}} \cdot \frac{a + 2b}{a\sqrt{4b^2 - a^2}} = \frac{b^2}{a(2b - a)}.$$

Nerovnost $R \geqq 2r$ tudíž platí, právě když $b^2 \geqq a(2b - a)$. Poslední nerovnost je ovšem ekvivalentní s nerovností $(a-b)^2 \geqq 0$, jejíž platnost je už zřejmá. Tím je důkaz nerovnosti $R \geqq 2r$ hotov. Navíc vidíme, že rovnost v ní nastane jedině v případě, kdy $(a - b)^2 = 0$ neboli $a = b$, tedy právě když je výchozí trojúhelník nejen rovnoramenný, ale i rovnostranný.

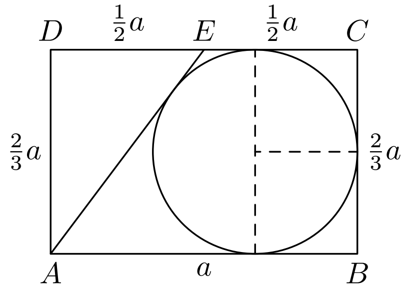
Návodné a doplňující úlohy:

1. Pro obecný trojúhelník ABC o stranách a, b, c a obsahu S platí pro poloměr r kružnice vepsané vzorec $r = 2S/(a + b + c)$. Dokažte. [Střed M vepsané kružnice rozděluje uvažovaný trojúhelník ABC na tři menší trojúhelníky BCM, ACM, ABM o obsazích $\frac{1}{2}ar$, $\frac{1}{2}br$, $\frac{1}{2}cr$, jejichž součet se rovná S, odkud plyne dokazovaný vzorec.]
2. Kružnice $k(S; 6\,\text{cm})$ a $l(O; 4\,\text{cm})$ mají vnitřní dotyk v bodě B. Určete délky stran trojúhelníku ABC, kde bod A je průsečík přímky OB s kružnicí k a bod C je průsečík kružnice k s tečnou z bodu A ke kružnici l. [59–C–S–2]
3. Kružnice $l(T; s)$ prochází středem kružnice $k(S; 2\,\text{cm})$. Kružnice $m(U; t)$ se vně dotýká kružnic k a l, přičemž $US \perp ST$. Poloměry s a t vyjádřené v centimetrech jsou celá čísla. Určete je. [59–B–II–1]
4. Pravoúhlému trojúhelníku ABC s přeponou AB je opsána kružnice. Paty kolmic z bodů A, B na tečnu k této kružnici v bodě C označme D, E. Vyjádřete délku úsečky DE pomocí délek odvěsen trojúhelníku ABC. [58–C–I–2]
5. Pravoúhlému trojúhelníku ABC s přeponou AB a obsahem S je opsána kružnice. Tečna k této kružnici v bodě C protíná tečny vedené body A a B v bodech D a E. Vyjádřete délku úsečky DE pomocí délky c přepony a obsahu S. [58–C–II–4]
6. Rovnoramennému lichoběžníku $ABCD$ se základnami AB, CD lze vepsat kružnici se středem O. Určete obsah S lichoběžníku, jsou-li dány délky úseček OB a OC. [56–C–II–3]
7. Kružnice k, l, m se po dvou vně dotýkají a všechny tři mají společnou tečnu. Poloměry kružnic k, l jsou $3\,\text{cm}$ a $12\,\text{cm}$. Vypočtěte poloměr kružnice m. Najděte všechna řešení. [55–C–I–2]
8. Kružnice k, l s vnějším dotykem leží obě v obdélníku $ABCD$, jehož obsah je $72\,\text{cm}^2$. Kružnice k se přitom dotýká stran CD, DA a AB, zatímco kružnice l se dotýká stran AB a BC. Určete poloměry kružnic k a l, jestliže poloměr kružnice k je v centimetrech vyjádřen celým číslem. [55–C–II–3]

3. Protože čtyřúhelník $ABCE$ je podle zadání tečnový, pro délky jeho stran platí známá rovnost[1]

$$|AB| + |CE| = |BC| + |AE|.$$

V naší situaci při označení $a = |AB|$ platí $|BC| = |AD| = \frac{2}{3}a$ a $|CE| = |DE| = \frac{1}{2}a$ (obr. 1), odkud po dosazení do uvedené rovnosti zjistíme, že $|AE| = \frac{5}{6}a$.



Obr. 1

Nyní si všimneme, že pro délky stran trojúhelníku ADE platí

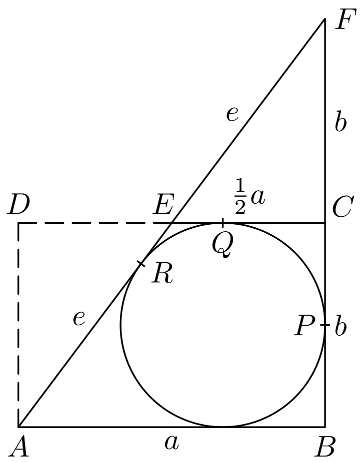
$$|AD| : |DE| : |AE| = \frac{2}{3}a : \frac{1}{2}a : \frac{5}{6}a = 4 : 3 : 5,$$

takže podle (obrácené části) Pythagorovy věty má trojúhelník ADE pravý úhel při vrcholu D, a tudíž rovnoběžník $ABCD$ je obdélník. Tečna BC kružnice vepsané čtyřúhelníku $ABCE$ je tedy kolmá ke dvěma jejím (navzájem rovnoběžným) tečnám AB a CE. To už zřejmě znamená, že bod dotyku tečny BC je středem úsečky BC (plyne to ze zjištěné kolmosti vyznačeného průměru kružnice k jejímu vyznačenému poloměru).

Jiné řešení. Ukážeme, že požadované tvrzení lze dokázat i bez povšimnutí, že rovnoběžník $ABCD$ je v dané úloze obdélníkem. Místo toho využijeme, že úsečka CE

[1] Rovnost se odvodí rozepsáním délek stran na jejich úseky vymezené body dotyku vepsané kružnice a následným využitím toho, že každé dva z těchto úseků, které vycházejí ze stejného vrcholu čtyřúhelníku, jsou shodné.

je střední příčkou trojúhelníku ABF, kde F je průsečík polopřímek BC a AE (obr. 2), neboť $CE \parallel AB$ a $|CE| = \frac{1}{2}|AB|$. Označme proto $a = |AB| = 2|CE|$, $b = |BC| = |CF|$



Obr. 2

a $e = |AE| = |EF|$ (rovnost $2a = 3b$ uplatníme až v pravý čas). Stejně jako v původním řešení využijeme rovnost $b + e = a + \frac{1}{2}a$ $\left(= \frac{3}{2}a\right)$, jež platí pro délky stran tečnového čtyřúhelníku $ABCE$. Kružnice jemu vepsaná se dotýká stran BC, CE, AE po řadě v bodech P, Q, R tak, že platí rovnosti

$$|CP| = |CQ|, \quad |EQ| = |ER| \quad \text{a také} \quad |FP| = |FR|.$$

Pro součet shodných délek $|FP|$ a $|FR|$ tudíž platí

$$\begin{aligned} |FP| + |FR| &= (b + |CP|) + (e + |ER|) = (b + e) + (|CP| + |ER|) = \\ &= \tfrac{3}{2}a + (|CQ| + |EQ|) = \tfrac{3}{2}a + \tfrac{1}{2}a = 2a, \end{aligned}$$

což znamená, že $|FP| = |FR| = a$.

Teď už řešení úlohy snadno dokončíme. Rovnost $|BP| = \frac{1}{2}b$, kterou máme v naší situaci dokázat, plyne z rovnosti

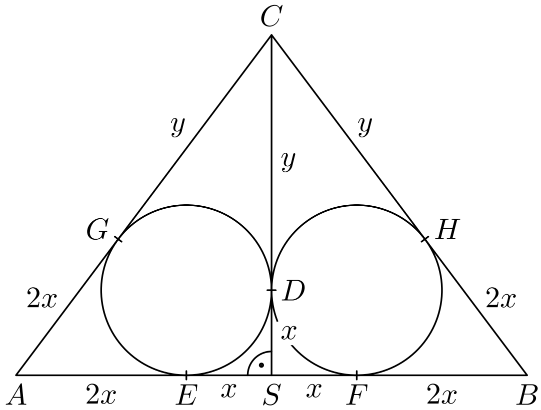
$$|BP| = |BF| - |FP| = 2b - a,$$

když do ní dosadíme zadaný vztah $a = \frac{3}{2}b$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za užití kritéria tečnovosti čtyřúhelníku $ABCE$ k vyjádření délky strany AE.

2. Označme S střed základny AB daného rovnoramenného trojúhelníku ABC. Předpokládejme, že kružnice vepsané trojúhelníkům ACS, BCS se dotýkají přímky AB v bodech, které dělí základnu AB na tři shodné díly. Vypočtěte poměr $|AB| : |CS|$.

2. Díky souměrnosti podle přímky CS se obě vepsané kružnice dotýkají výšky CS ve stejném bodě, který označíme D. Body dotyku těchto kružnic s úsečkami AS, BS, AC, BC označíme po řadě E, F, G, H (obr. 1). Pro vyjádření všech potřebných délek ještě zavedeme označení $x = |SD|$ a $y = |CD|$.



Obr. 1

S ohledem na symetrii tečen z daného bodu k dané kružnici platí rovnosti

$$|SD| = |SE| = |SF| = x \quad \text{a} \quad |CD| = |CG| = |CH| = y.$$

Úsečka EF má proto délku $2x$, jež je podle zadání rovněž délkou úseček AE a BF, a tedy i délkou úseček AG a BH (opět díky symetrii tečen). Odtud již bezprostředně plynou rovnosti

$$|AB| = 6x, \quad |AC| = |BC| = 2x + y \quad \text{a} \quad |CS| = x + y.$$

Závislost mezi délkami x a y zjistíme užitím Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník ACS (s odvěsnou AS délky $3x$):

$$(2x + y)^2 = (3x)^2 + (x + y)^2.$$

Roznásobením a dalšími úpravami odtud dostaneme (x a y jsou kladné hodnoty)

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4xy + y^2 &= 9x^2 + x^2 + 2xy + y^2, \\ 2xy &= 6x^2, \\ y &= 3x. \end{aligned}$$

Hledaný poměr tak má hodnotu

$$|AB| : |CS| = 6x : (x + y) = 6x : 4x = 3 : 2.$$

Poznamenejme, že prakticky stejný postup celého řešení lze zapsat i při standardním označení $c = |AB|$ a $v = |CS|$. Protože podle zadání platí $|AE| = \frac{1}{3}c$, a tudíž $|SE| = \frac{1}{6}c$, z rovnosti $|SD| = |SE|$ plyne $|CD| = |CS| - |SD| = v - \frac{1}{6}c$, odkud

$$|AC| = |AG| + |CG| = |AE| + |CD| = \tfrac{1}{3}c + (v - \tfrac{1}{6}c) = v + \tfrac{1}{6}c,$$

takže z Pythagorovy věty pro trojúhelník ACS

$$(v + \tfrac{1}{6}c)^2 = (\tfrac{1}{2}c)^2 + v^2$$

vychází $3v = 2c$ neboli $c : v = 3 : 2$.

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za vyjádření potřebných délek pomocí dvou parametrů (x, y nebo c, v) udělte 3 body, další 2 body přidejte za efektivní využití Pythagorovy věty a 1 bod za konečné určení hledaného poměru.

3. *Je dán obdélník $ABCD$ s obvodem o. V jeho rovině najděte množinu všech bodů, jejichž součet vzdáleností od přímek AB, BC, CD, DA je roven $\frac{2}{3}o$.*

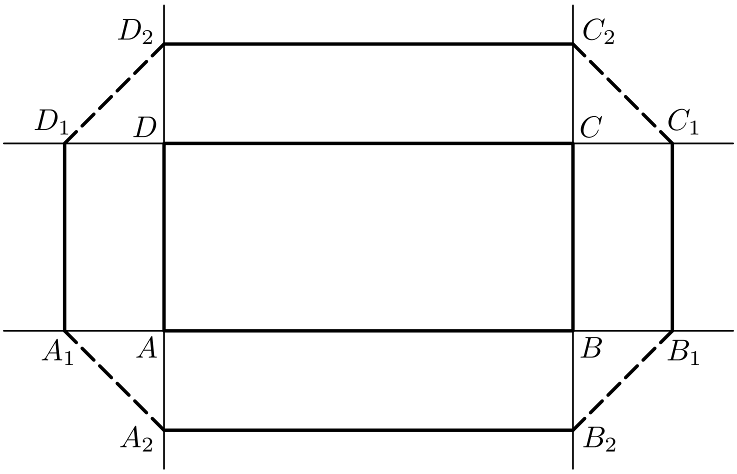
Řešení. Požadovanou hodnotu součtu čtyř vzdáleností zapíšeme ve tvaru

$$\frac{2}{3}o = \frac{1}{6}o + \frac{1}{2}o = \frac{1}{6}o + |AB| + |BC|. \tag{1}$$

Pro libovolný bod v pásu určeném přímkami AB a CD platí, že součet jeho vzdáleností od těchto dvou rovnoběžek je roven jejich vzdálenosti, tj. $|BC|$. Pro libovolný bod vně tohoto pásu je součet dvou uvažovaných vzdáleností roven součtu hodnoty $|BC|$ a dvojnásobku vzdálenosti od bližší z obou rovnoběžek. Podobná dvě tvrzení platí pro součet vzdáleností libovolného bodu od rovnoběžek BC a AD ve vztahu k jejich vzdálenosti $|AB|$. S ohledem na vyjádření (1) tak můžeme učinit první dva závěry.

(1) V pásu mezi přímkami AB a CD jsou hledanými body právě ty, jejichž součet vzdáleností od přímek BC a AD je roven $\frac{1}{6}o + |AB|$. Jsou to tedy body, které leží

vně pásu určeného přímkami BC a AD a mají od bližší z nich vzdálenost rovnu $\frac{1}{6}o : 2 = \frac{1}{12}o$. Množinu hledaných bodů v pásu mezi AB a CD tak tvoří dvě úsečky B_1C_1 a A_1D_1 znázorněné na obr. 1. Jejich krajní body A_1, B_1 leží na přímce AB vně úsečky AB tak, že $|AA_1| = |BB_1| = \frac{1}{12}o$; krajní body C_1, D_1 leží na přímce CD vně úsečky CD tak, že $|CC_1| = |DD_1| = \frac{1}{12}o$.

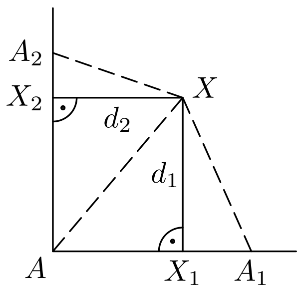


Obr. 1

(2) V pásu mezi přímkami BC a AD jsou hledanými body právě ty, jejichž součet vzdáleností od přímek AB a CD je roven $\frac{1}{6}o + |BC|$. Jsou to tedy body, které leží vně pásu určeného přímkami AB a CD a které mají od bližší z nich vzdálenost $\frac{1}{12}o$. Množinu hledaných bodů v pásu mezi BC a AD tak tvoří dvě úsečky A_2B_2 a C_2D_2, přitom krajní body B_2, C_2 leží na přímce BC vně úsečky BC tak, že $|BB_2| = |CC_2| = \frac{1}{12}o$ a krajní body A_2, D_2 leží na přímce AD vně úsečky AD tak, že $|AA_2| = |DD_2| = \frac{1}{12}o$.

Zbývá najít hledané body mimo sjednocení obou uvažovaných pásů, tedy body ležící v některém ze čtyř pravých úhlů A_1AA_2, B_1BB_2, C_1CC_2 či D_1DD_2. Z výše provedených úvah vyplývá, že v každém z těchto úhlů hledáme právě ty body, jejichž součet vzdáleností od obou ramen úhlu je roven hodnotě $\frac{1}{12}o$. S ohledem na symetrii ukážeme pouze, že takové body úhlu A_1AA_2 vyplní úsečku A_1A_2; v ostatních třech úhlech to pak budou úsečky B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 (obr. 1).

Všimněme si nejprve, že body A_1, A_2 jsou jediné body na ramenech úhlu A_1AA_2, které mají požadovanou vlastnost. Pro libovolný vnitřní bod X úhlu A_1AA_2 označme jako d_1, d_2 vzdálenosti bodu X od ramen AA_1, resp. AA_2. Hledáme pak právě ty body X, pro něž platí $d_1 + d_2 = \frac{1}{12}o$ (obr. 2). Tuto „rovnici“ nyní vyřešíme úvahou o obsahu S útvaru AA_1XA_2, který je buď trojúhelník, nebo konvexní či nekonvexní čtyřúhelník.



Obr. 2

Obsah S je vždy roven součtu obsahů dvou trojúhelníků AA_1X a AA_2X:

$$S = S_{AA_1X} + S_{AA_2X} = \frac{1}{2}|AA_1|d_1 + \frac{1}{2}|AA_2|d_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12}o \cdot (d_1 + d_2).$$

Rovnice $d_1 + d_2 = \frac{1}{12}o$ je tak splněna, právě když obsah S má stejnou hodnotu jako obsah S_0 pravoúhlého trojúhelníku AA_1A_2, jehož obě odvěsny mají shodnou délku $\frac{1}{12}o$.

Hledané body X jsou tudíž právě ty, pro něž je útvar AA_1XA_2 trojúhelník; je-li totiž AA_1XA_2 konvexní, resp. nekonvexní čtyřúhelník, platí zřejmě $S > S_0$, resp. $S < S_0$. Hledané body X úhlu AA_1A_2 proto skutečně tvoří úsečku A_1A_2.

Odpověď: Hledaná množina je sjednocením osmi úseček, jež tvoří hranici osmiúhelníku $A_1A_2B_2B_1C_1C_2D_2D_1$.

Poznámka. Z obr. 2 je také patrné, že rovnice $d_1 + d_2 = c$, kde $c = |AA_1| = |AA_2|$, bude splněna, právě když bude $|X_1A_1| = d_1$ a $|X_2A_2| = d_2$, tj. právě když budou oba trojúhelníky XX_1A_1 a XX_2A_2 rovnoramenné. To zřejmě nastane, právě když bude úhel A_1XA_2 přímý, protože $|\sphericalangle AA_1A_2| = 45°$.

Návodné a doplňující úlohy:

1. V rovině je dáno k navzájem různých rovnoběžek. Které body této roviny mají nejmenší součet vzdáleností od zmíněných k rovnoběžek? Odpověď promyslete nejdříve pro malé hodnoty $k = 2, 3, 4, \ldots$ a pak podejte zobecnění. [V případě sudého k jde o body pásu mezi dvěma „prostředními" rovnoběžkami, v případě lichého k jde o body na prostřední rovnoběžce.]
2. Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s odvěsnami AC, BC délky 1 cm. V pravém úhlu ACB určete všechny ty body, jejichž součet vzdáleností od ramen CA, CB je roven a) 1 cm, b) 3 cm. [V případě a) pro hledaný bod X porovnejte obsah útvaru vzniklého slepením trojúhelníků ACX a BCX s obsahem trojúhelníku ABC a vyvoďte odtud, že vyhovující body X vyplní úsečku AB. V případě b) zaměňte body A, B vhodnými body A', B' na ramenech CA, resp. CB a užijte stejný postup jako v případě a).]
3. V rovině jsou dány dvě rovnoběžky a a b vzdálené 1 cm a přímka c k nim kolmá. Určete všechny body roviny, jejichž součet vzdáleností od přímek a, b, c je roven 2 cm. [Rozlište případy, kdy takový bod leží v pásu určeném přímkami a, b a kdy leží v jednom ze čtyř pravých úhlů tvořených přímkou c a jednou z přímek a či b.]
4. Je dána úsečka AB. Sestrojte bod C tak, aby se obsah trojúhelníku ABC rovnal 1/8 obsahu S čtverce o straně AB a součet obsahů čtverců o stranách AC a BC se rovnal S. Kolik má úloha řešení pro dané umístění úsečky AB v rovině? [C–54–S–3]

4. *Rozhodněte, zda z libovolných sedmi vrcholů daného pravidelného devatenáctiúhelníku lze vždy vybrat čtyři, které jsou vrcholy lichoběžníku.*

Řešení. Označme S střed daného pravidelného 19-úhelníku $A_1A_2 \ldots A_{19}$. Osa každé úsečky A_iA_j je přímka, která kromě bodu S prochází ještě jistým vrcholem A_k (díky tomu, že číslo 19 je liché). Proto lze všechny úsečky A_iA_j rozdělit do 19 skupin navzájem rovnoběžných úseček se společnou osou, kterou je vždy jedna z přímek SA_k. V každé skupině je přitom zřejmě $(19-1) : 2 = 9$ úseček a každé dvě z nich jsou základnami lichoběžníku (nemůže jít o rovnoběžník, neboť žádná z úseček A_iA_j neprochází středem S, opět díky tomu, že číslo 19 je liché).

Počet všech úseček A_iA_j s krajními body v libovolně vybrané sedmiprvkové množině vrcholů je $(7 \cdot 6) : 2 = 21 > 19$, takže dvě z těchto úseček leží ve stejné z 19 popsaných skupin. Tím je existence kýženého lichoběžníku dokázána, ať je sedmiprvková množina vrcholů zvolena jakkoliv.

Poznámka. Vstupní úvahu o ose úsečky A_iA_j lze vynechat. Místo toho lze rovnou popsat oněch 19 devítiprvkových skupin navzájem rovnoběžných úseček a pak konstatovat, že jde o všechny možné úsečky A_iA_j, neboť těch je $(19 \cdot 18) : 2 = 19 \cdot 9$, tedy právě tolik co úseček v popsaných 19 skupinách.

Jiné řešení. Zatímco v původním řešení jsme uvažovali o základnách hledaného lichoběžníku, nyní se zaměříme na jeho ramena či úhlopříčky. V obou případech musí jít o dvě shodné úsečky, neboť každý lichoběžník, kterému lze opsat kružnici, je rovnoramenný. Osy jeho základen totiž musejí procházet středem opsané kružnice, takže splývají a tvoří tak osu souměrnosti celého lichoběžníku. Naopak každé dvě tětivy téže kružnice, které mají stejnou délku kratší než průměr kružnice, nejsou rovnoběžné a nemají společný krajní bod, tvoří buď ramena, nebo úhlopříčky (rovnoramenného) lichoběžníku (stačí si uvědomit, že libovolné dvě shodné tětivy téže kružnice jsou souměrně sdružené podle přímky procházející středem zmíněné kružnice a průsečíkem odpovídajících sečen).

V pravidelném 19-úhelníku $A_1A_2 \dots A_{19}$ mají zřejmě všechny úsečky A_iA_j dohromady pouze 9 různých délek. Ve vybrané sedmiprvkové množině vrcholů má oba krajní body celkem $(7\cdot 6) : 2 = 21$ úseček. Protože $21 > 2\cdot 9$, podle Dirichletova principu některé tři z těchto úseček mají stejnou délku (tj. jsou shodné). Kdyby každé dvě z těchto tří úseček měly společný vrchol (a víme, že z libovolného vrcholu vycházejí nejvýše dvě shodné strany či úhlopříčky), vytvořily by tyto tři úsečky rovnostranný trojúhelník, což není možné, neboť $3 \nmid 19$. Proto některé dvě z těchto tří shodných úseček nemají společný krajní bod, takže to jsou buď ramena, nebo úhlopříčky rovnoramenného lichoběžníku (protější strany rovnoběžníku to být nemohou).

Návodné a doplňující úlohy:

Užitečný *Dirichletův (přihrádkový) princip* se nejčastěji uvádí s dvěma přirozenými čísly k a n takto: „Je-li alespoň $nk+1$ předmětů rozděleno do n přihrádek, je v některé z nich alespoň $k+1$ z těchto předmětů.“ I když jde o velice jednoduché tvrzení (zdůvodněte ho sami), nachází účelné uplatnění v mnoha situacích (často dokonce s hodnotou $k = 1$).

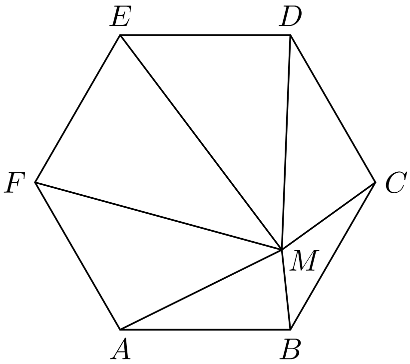
1. Z libovolných 82 přirozených čísel lze vybrat dvě čísla tak, aby jejich rozdíl byl dělitelný číslem 81. Dokažte. [Rozdělte čísla do skupin podle jejich zbytku při dělení číslem 81.]
2. Vybereme-li z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ libovolně 12 různých čísel, pak rozdíl některých dvou z nich bude dvojmístné číslo zapsané dvěma stejnými číslicemi. Dokažte. [Rozdělte čísla do skupin podle jejich zbytku při dělení číslem 11.]
3. Dokažte, že ze 111 různých celých čísel se vždy dá vybrat jedenáct takových, že jejich součet je dělitelný jedenácti. [Využijte toho, že součet 11 čísel se stejným zbytkem při dělení číslem 11 je násobkem čísla 11.]
4. Žádné z daných 17 celých čísel není dělitelné číslem 17. Dokažte, že součet několika z těchto daných čísel je násobkem čísla 17. [Daná čísla označte jako $a_1, \dots, a_{17}$ a uvažte zbytky 17 součtů $s_i = a_1 + a_2 + \dots + a_i$ $(i = 1, 2, \dots, 17)$ při dělení číslem 17; není-li žádný z nich roven 0, dávají dva ze součtů $s_i < s_j$ stejný zbytek modulo 17, takže je číslem 17 dělitelný rozdíl $s_j - s_i$ pro některá $i < j$.]
5. Tabulka 6×6 je zaplněna čísly $-1, 0, 1$. Sečteme čísla v jednotlivých řádcích, sloupcích i obou úhlopříčkách. Dostaneme $6 + 6 + 2 = 14$ součtů. Dokažte, že některé dva z nich se sobě rovnají. [Všechny součty leží v množině celých čísel z intervalu $\langle -6, +6\rangle$, která má jen 13 prvků.]
6. Jaký největší počet králů můžeme umístit na šachovnici 8×8, aby se žádní dva navzájem neohrožovali? [16. Rozdělte celou šachovnici na 16 dílů 2×2.]
7. Vybereme-li v rovnostranném trojúhelníku o straně a libovolně 10 bodů, pak vzdálenost některých dvou vybraných bodů je nejvýše $a/3$. Dokažte. [Celý trojúhelník rozdělte na 9 rovnostranných trojúhelníků o straně $a/3$.]
8. Deset rodin z jednoho domu trávilo dovolenou v zahraničí. Každá jela jinam a poslala domů pohlednice pěti z ostatních rodin. Dokažte, že některé dvě rodiny si poslaly pohlednice navzájem. [Všech pohlednic bylo 50, různých dvojprvkových množin $\{\text{odesílatel}, \text{adresát}\}$ je nejvýše $(10 \cdot 9) : 2 = 45$.]
9. Z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$ vyberte co největší počet čísel tak, aby součet žádných dvou vybraných čísel nebyl násobkem jedenácti. (Vysvětlete, proč zvolený výběr má požadovanou vlastnost a proč žádný výběr většího počtu čísel nevyhovuje.) [58–C–I–5]

6. *Uvnitř pravidelného šestiúhelníku $ABCDEF$ s obsahem $30\,cm^2$ je zvolen bod M. Obsahy trojúhelníků ABM a BCM jsou po řadě $3\,cm^2$ a $2\,cm^2$. Určete obsahy trojúhelníků CDM, DEM, EFM a FAM.*

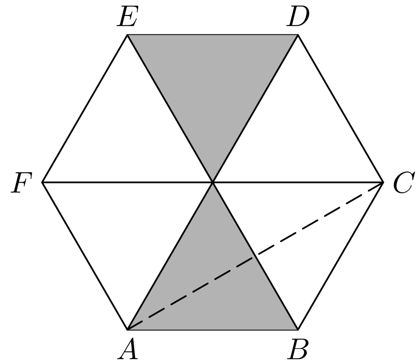
Řešení. Úloha pojednává o obsahu šesti trojúhelníků, na které je daný pravidelný šestiúhelník rozdělen spojnicemi jeho vrcholů s bodem M (obr. 3). Celý šestiúhelník o daném obsahu, který označíme jako S, lze rovněž rozdělit na šest rovnostranných trojúhelníků o obsahu $S/6$ (obr. 4). Označíme-li r jejich stranu, v vzdálenost rovnoběžek AB, DE a v_1 vzdálenost bodu M od přímky AB, dostaneme

$$S_{ABM} + S_{EDM} = \frac{1}{2}rv_1 + \frac{1}{2}r(v - v_1) = \frac{1}{2}rv = \frac{S}{3},$$

neboť $S/3$ je součet obsahů dvou vybarvených rovnostranných trojúhelníků. Díky symetrii mají stejnou hodnotu $S/3$ i součty $S_{BCM} + S_{EFM}$ a $S_{CDM} + S_{FAM}$. Odtud již dostáváme první dva neznámé obsahy $S_{DEM} = S/3 - S_{ABM} = 7\,\mathrm{cm}^2$ a $S_{EFM} = S/3 - S_{BCM} = 8\,\mathrm{cm}^2$.



Obr. 3



Obr. 4

Jak určit zbývající dva obsahy S_{CDM} a S_{FAM}, když prozatím známe pouze jejich součet $S/3$? Všimněme si, že součet zadaných obsahů trojúhelníků ABM a BCM má významnou hodnotu $S/6$, která je i obsahem trojúhelníku ABC (poslední plyne opět z obr. 4). Taková shoda obsahů znamená právě to, že bod M leží na úhlopříčce AC. Trojúhelníky ABM a BCM tak mají shodné výšky ze společného vrcholu B a totéž platí i pro výšky trojúhelníků CDM a FAM z vrcholů F a D (bodů, jež mají od přímky AC stejnou vzdálenost). Pro poměry obsahů těchto dvojic trojúhelníků tak dostáváme

$$\frac{S_{CDM}}{S_{FAM}} = \frac{|CM|}{|AM|} = \frac{S_{BCM}}{S_{ABM}} = \frac{2}{3}.$$

V součtu $S_{CDM} + S_{FAM}$ o hodnotě $S/3$ jsou tedy sčítanci v poměru $2 : 3$. Platí proto $S_{CDM} = 4\,\mathrm{cm}^2$ a $S_{FAM} = 6\,\mathrm{cm}^2$.

Návodné a doplňující úlohy:

1. V daném rovnoběžníku $ABCD$ je bod E střed strany BC a bod F leží uvnitř strany AB. Obsah trojúhelníku AFD je 15 cm^2 a obsah trojúhelníku FBE je 14 cm^2. Určete obsah čtyřúhelníku $FECD$. [57–C–S–2]
2. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme D patu výšky z vrcholu C a P, Q odpovídající paty kolmic vedených bodem D na strany AC a BC. Obsahy trojúhelníků ADP, DCP, DBQ, CDQ označme postupně S_1, S_2, S_3, S_4. Vypočtěte $S_1 : S_3$, jestliže $S_1 : S_2 = 2 : 3$, $S_3 : S_4 = 3 : 8$. [55–C–I–5]
3. Základna AB lichoběžníku $ABCD$ je třikrát delší než základna CD. Označme M střed strany AB a P průsečík úsečky DM s úhlopříčkou AC. Vypočítejte poměr obsahů trojúhelníku CDP a čtyřúhelníku $MBCP$. [55–C–II–1]

2. Uvnitř rovnoběžníku $ABCD$ je dán bod K a v pásu mezi rovnoběžkami BC a AD v polorovině opačné k CDA je dán bod L. Obsahy trojúhelníků ABK, BCK, DAK a DCL jsou $S_{ABK} = 18\,\mathrm{cm}^2$, $S_{BCK} = 8\,\mathrm{cm}^2$, $S_{DAK} = 16\,\mathrm{cm}^2$, $S_{DCL} = 36\,\mathrm{cm}^2$. Vypočítejte obsahy trojúhelníků CDK a ABL.

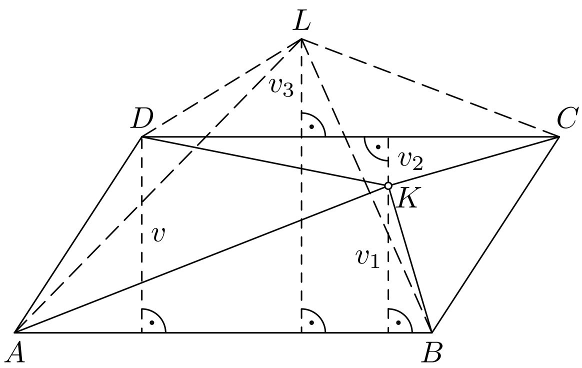
4. Určete nejmenší celé kladné číslo v, pro které platí: Mezi libovolnými v vrcholy pravidelného dvacetiúhelníku lze najít tři, jež jsou vrcholy pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku.

2. Trojúhelníky ABK a CDK mají shodné strany AB a CD a součet jejich výšek v_1 a v_2 (vzdáleností bodu K od přímky AB, resp. CD) je roven výšce v rovnoběžníku $ABCD$ (vzdálenosti rovnoběžných přímek AB a CD, obr. 1). Proto součet jejich obsahů dává polovinu součtu obsahu daného rovnoběžníku:

$$S_{ABK} + S_{CDK} = \frac{1}{2}|AB|v_1 + \frac{1}{2}|CD|v_2 = \frac{1}{2}|AB| \cdot (v_1 + v_2) = \frac{1}{2}|AB| \cdot v = \frac{1}{2}S_{ABCD}.$$

Podobně i $S_{BCK} + S_{DAK} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$, tudíž

$$S_{CDK} = S_{BCK} + S_{DAK} - S_{ABK} = 6\,\mathrm{cm}^2.$$



Obr. 1

Trojúhelníky ABL a DCL mají shodné strany AB a CD. Značí-li v_3 příslušnou výšku druhého z nich, je výška prvního z nich rovna $v + v_3$, takže pro rozdíl obsahů těchto trojúhelníků platí

$$S_{ABL} - S_{DCL} = \frac{1}{2}|AB| \cdot (v + v_3) - \frac{1}{2}|CD| \cdot v_3 = \frac{1}{2}|AB| \cdot (v + v_3 - v_3) =$$
$$= \frac{1}{2}|AB| \cdot v = \frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{BCK} + S_{DAK}.$$

Odtud plyne

$$S_{ABL} = S_{BCK} + S_{DAK} + S_{DCL} = 60\,\mathrm{cm}^2.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů. Za určení každého z obsahů udělte 3 body. Za pouhé objevení (a důkaz) faktu, že součet obsahů „protějších“ trojúhelníků ABK a CDK či BCK a AKD dává polovinu obsahu celého rovnoběžníku, udělte 2 body.

4. Nechť $A_1A_2\dots A_{20}$ je pravidelný dvacetiúhelník. Podle Thaletovy věty jedině některý z deseti průměrů $A_1A_{11}, A_2A_{12}, \dots, A_{10}A_{20}$ opsané kružnice může být přeponou kýženého pravoúhlého trojúhelníku, takže zkoumané tvrzení neplatí pro $v = 10$ (ani pro žádné $v < 10$): stačí vybrat po jednom z vrcholů na různých průměrech a nebude existovat žádný pravoúhlý trojúhelník s takto vybranými vrcholy.

Ve druhé části řešení ukážeme, že vyhovuje $v = 11$. Všech 20 vrcholů dvacetiúhelníku rozdělíme do pěti čtveřic vrcholů čtverců $A_1A_6A_{11}A_{16}$, $A_2A_7A_{12}A_{17}$, $A_3A_8A_{13}A_{18}$, $A_4A_9A_{14}A_{19}$ a $A_5A_{10}A_{15}A_{20}$. Vybereme-li nyní libovolně 11 vrcholů, budou díky nerovnosti $11 > 5\cdot 2$ mezi vybranými aspoň tři vrcholy některého z pěti uvedených čtverců (Dirichletův princip). Zbývá dodat, že jakékoli tři vrcholy čtverce zřejmě tvoří pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník.

Odpověď. Hledané nejmenší číslo v je rovno číslu 11.

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za jakýkoliv správný protipříklad pro $v = 10$ a 4 body za důkaz vlastnosti pro $v = 11$.

1. Danému rovnostrannému trojúhelníku vepišme a opišme kružnice. Označme S obsah vzniklého mezikruží a T obsah kruhu, jehož průměr je shodný s délkou strany daného trojúhelníku. Který z obsahů S, T je větší? Svou odpověď zdůvodněte.

1. Ukážeme, že se oba obsahy rovnají. Označme A, B, C vrcholy daného trojúhelníku a r a R odpovídající poloměry jeho vepsané a opsané kružnice; délku jeho strany označme a. Obě zmíněné kružnice mají společný střed S. Označme ještě P bod dotyku vepsané kružnice se stranou AB. Protože trojúhelník ABC je rovnostranný, je P zároveň středem strany AB. Užitím Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku PSB dostáváme

$$R^2 - r^2 = \left(\tfrac{1}{2}a\right)^2,$$

což je ekvivalentní s dokazovaným tvrzením $S = \pi(R^2 - r^2) = \pi\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = T$.

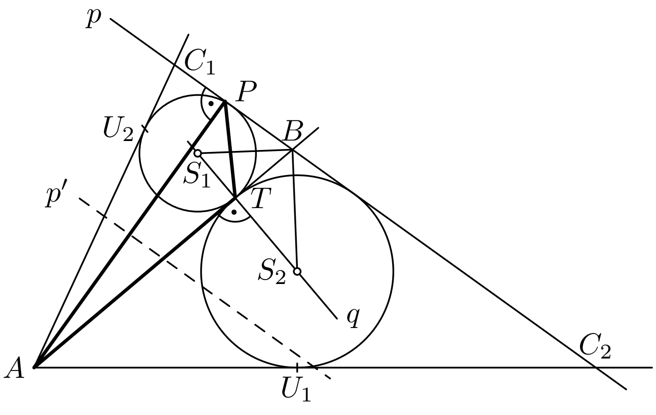
Poznámka. Rovnostranný trojúhelník o straně a má výšku velikosti $v = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, takže zkoumané poloměry jsou $R = \frac{2}{3}v$ $(= \frac{1}{3}a\sqrt{3})$ a $r = \frac{1}{3}v$ $(= \frac{1}{6}a\sqrt{3})$, a proto

$$S = \pi\left(R^2 - r^2\right) = \pi\left(\tfrac{4}{9} - \tfrac{1}{9}\right)v^2 = \pi \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{3}{4}a^2 = \pi\left(\tfrac{1}{2}a\right)^2 = T.$$

Za úplné řešení udělte 6 bodů.

2. *V rovině jsou dány body A, P, T neležící v přímce. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby P byla pata jeho výšky z vrcholu A a T bod dotyku strany AB s kružnicí mu vepsanou. Proveďte diskusi počtu řešení vzhledem k poloze daných bodů.*

Řešení. Vrchol B je určen polopřímkou AT a kolmicí p k výšce AP v bodě P (obr. 1), na níž leží strana BC. Přitom bod T musí být vnitřním bodem úsečky AB. Střed S kružnice trojúhelníku ABC vepsané pak dostaneme jako průsečík kolmice q



Obr. 1

k přímce AT v bodě T s osou úhlu ohraničeného přímkou p a polopřímkou BA. Její poloměr bude mít velikost $|ST|$.

Zbývá sestrojit vrchol C hledaného trojúhelníku ABC. Ten bude ležet jednak na přímce p, jednak na druhé tečně vepsané kružnice z vrcholu A, která je souměrně sdružená se stranou AB podle přímky AS. Stačí tedy sestrojit bod U dotyku strany AC s kružnicí vepsanou jako obraz bodu T v uvedené osové souměrnosti.

Odtud plyne *konstrukce*:

1. $p\colon P \in p$ a $p \perp AP$;
2. $B\colon B \in AT \cap p$, bod B musí ležet na polopřímce AT za bodem T;
3. $q\colon T \in q$ a $q \perp AT$;
4. u_1, u_2: dvě (navzájem kolmé) osy různoběžek AB, p;
5. $S_1, S_2\colon S_1 \in q \cap u_1$, $S_2 \in q \cap u_2$;
6. U_1, U_2: obrazy bodu T v souměrnostech podle přímek AS_1 a AS_2;
7. C_1, C_2: průsečíky přímky p s polopřímkami AU_1 a AU_2;
8. trojúhelníky ABC_1 a ABC_2.

Diskuse. Bod B konstruovaný v 2. kroku existuje, jen když úhel PAT je ostrý (jinak ani polopřímka AT neprotne přímku p) a zároveň bod T leží uvnitř poloroviny pA, což je ekvivalentní tomu, že i úhel APT je ostrý. Body S_1, S_2 existují vždy a jsou různé, neboť leží v opačných polorovinách určených přímkou AB. Ovšem kružnice vepsaná leží celá v trojúhelníku ABC, a tedy i v pásu určeném přímkou p a přímkou s ní rovnoběžnou, jež prochází vrcholem A, takže střed S vepsané kružnice musí padnout do pásu tvořeného přímkou p a přímkou p' s ní rovnoběžnou, jež půlí výšku AP. V takovém případě tečna ke kružnici $(S; |ST|)$ (souměrně sdružená s tečnou AB podle přímky AS) nepochybně protne přímku p v hledaném vrcholu C.

Diskusi shrneme takto: Jestliže pro vnitřní úhly trojúhelníku APT platí $|\sphericalangle PAT| \geqq 90°$ nebo $|\sphericalangle APT| \geqq 90°$, nemá úloha řešení. Pokud platí $|\sphericalangle PAT| < 90°$ a zároveň $|\sphericalangle APT| < 90°$, je počet řešení 0 až 2 podle toho, kolik ze sestrojených bodů S_1 a S_2 leží mezi rovnoběžkami p a p'.

NÁVODNÉ A DOPLŇUJÍCÍ ÚLOHY:

1. Sestrojte trojúhelník, jsou-li dány body dotyku jeho stran s kružnicí mu vepsanou.
2. V trojúhelníku ABC označme po řadě P, Q, R paty výšek z vrcholů A, B, C. Dále postupně označme T, U, V body dotyku kružnice vepsané se stranami BC, CA, AB. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:
   a) A, C, V,
   b) A, U, R,
   c) A, P, Q,
   d) A, B, R.

   [V a) i b) umíme sestrojit vepsanou kružnici; v c) sestrojíme AB jako průměr kružnice určené danými body. Úloha d) nemá řešení, pokud R neleží na přímce AB. Jestliže R leží na přímce AB, má úloha nekonečně mnoho řešení.]

4. *Ve čtverci $ABCD$ označme K střed strany AB a L střed strany AD. Úsečky KD a LC se protínají v bodě M a rozdělují čtverec na dva trojúhelníky a dva čtyřúhelníky. Vypočtěte jejich obsahy, jestliže úsečka LM má délku 1 cm.*

Řešení. Platí $|AK| = |DL|$ a $|AD| = |DC| = 2|AK|$ (obr. 2), takže pravoúhlé trojúhelníky AKD a DLC jsou shodné podle věty *sus*. Kromě toho jsou trojúhelníky MLD a AKD podobné podle věty *uu*, neboť $|\sphericalangle LDM| = |\sphericalangle KDA|$ a $|\sphericalangle DLM| = |\sphericalangle DLC| = |\sphericalangle AKD|$. Analogicky lze ověřit i podobnost trojúhelníků MDC a AKD. Z podobnosti trojúhelníků AKD, MLD a MDC plyne, že $|MD| = 2|ML| = 2\,\text{cm}$ a $|MC| = 2|MD| = 4\,\text{cm}$. Obsahy útvarů MLD, MDC a $AKML$ jsou

$$S_{MLD} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1\,\text{cm}^2, \qquad S_{MDC} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4\,\text{cm}^2$$

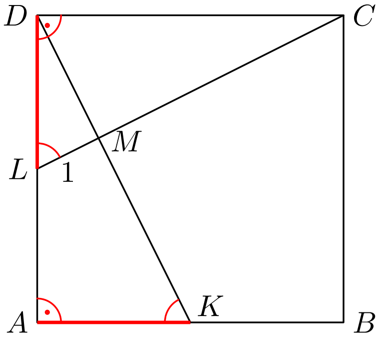
a

$$S_{AKML} = S_{AKD} - S_{MLD} = S_{DLC} - S_{MLD} = S_{MDC} = 4\,\text{cm}^2.$$

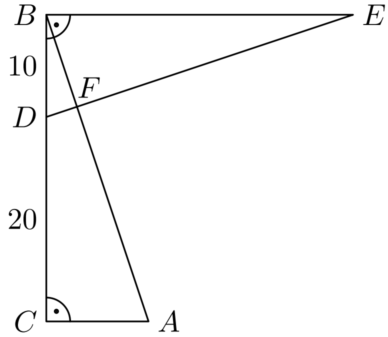
Nakonec pomocí Pythagorovy věty dostáváme $S_{ABCD} = |DC|^2 = |DM|^2 + |CM|^2 = 20\,\text{cm}^2$, takže

$$S_{KBCM} = S_{ABCD} - (S_{MLD} + S_{MDC} + S_{AKML}) = 11\,\text{cm}^2.$$

Závěr. Obsahy trojúhelníků MLD, MDC a čtyřúhelníků $AKML$, $KBCM$ jsou po řadě $1\,\text{cm}^2$, $4\,\text{cm}^2$, $4\,\text{cm}^2$ a $11\,\text{cm}^2$.



Obr. 2



Obr. 3

Návodné a doplňující úlohy:

1. Dva shodné pravoúhlé trojúhelníky ABC a DEB jsou umístěny podle obr. 3 a platí $|BD| = 10\,\text{cm}$, $|CD| = 20\,\text{cm}$.
   a) Určete délky stran trojúhelníku ABC. [10, 30, $10\sqrt{10}$]
   b) Dokažte, že trojúhelníky DBF, ABC a BEF jsou navzájem podobné.
   c) Určete délky stran trojúhelníků DBF a BEF. [10, $3\sqrt{10}$, $\sqrt{10}$; 30, $9\sqrt{10}$, $3\sqrt{10}$]

d) Určete obsahy trojúhelníků ABC, DBF a BEF. [150, 15, 135]

e) Určete obsah čtyřúhelníku $AFDC$. [135]

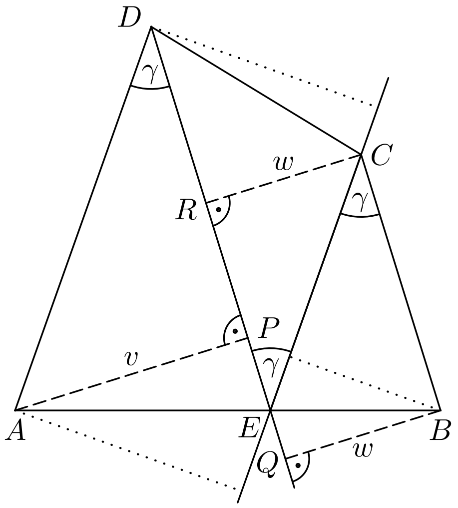
2. Dva shodné pravoúhlé trojúhelníky ABC a DEB jsou umístěny podle obr. 3. Trojúhelník BEF má obsah $30\,\mathrm{cm}^2$. Určete obsah čtyřúhelníku $AFDC$. [30]
3. Dokažte věty:

   a) Mají-li dva trojúhelníky stejnou výšku, pak poměr jejich obsahů se rovná poměru délek příslušných základen.

   b) Mají-li dva trojúhelníky shodné základny, pak poměr jejich obsahů se rovná poměru příslušných výšek.
4. V rovnoramenném pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou BC je $|AB| = 12\,\mathrm{cm}$. Označme K střed strany AB a L takový bod strany BC, pro nějž platí $|CL| : |LB| = 1 : 2$. Určete obsahy útvarů, které vzniknou rozřezáním trojúhelníku ABC podél úseček KC a AL. [Nakreslete si obrázek, označte M průsečík úseček KC a AL, dokreslete úsečku BM a pomocí vět z předchozí úlohy spočítejte nejprve obsahy všech pěti trojúhelníků, které mají společný vrchol M.]
5. V daném rovnoběžníku $ABCD$ je bod E střed strany BC a bod F leží uvnitř strany AB. Obsah trojúhelníku AFD je $15\,\mathrm{cm}^2$ a obsah trojúhelníku FBE je $14\,\mathrm{cm}^2$. Určete obsah čtyřúhelníku $FECD$. [C–57–S–2]

4. Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ s bodem E uvnitř strany AB tak, že platí $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle ECB|$. Obsahy trojúhelníků AED a CEB jsou po řadě $18\,\mathrm{cm}^2$ a $8\,\mathrm{cm}^2$. Určete obsah trojúhelníku ECD.

4. Hledaný obsah trojúhelníku ECD označme S. Úhel DEC je střídavý s úhly ADE a ECB, odtud $AD \parallel EC$ a $ED \parallel BC$ (obr. 1). Trojúhelníky EDA a EDC mají



Obr. 1

společnou stranu ED, poměr jejich obsahů je tedy roven poměru příslušných výšek. Když navíc po řadě označíme P, Q a R kolmé průměty vrcholů A, B a C na přímku DE a označíme $v = |AP|$, $w = |BQ| = |CR|$, dostaneme z podobných pravoúhlých trojúhelníků AEP a BEQ úměru

$$\frac{18}{S} = \frac{v}{w} = \frac{|AE|}{|EB|}.$$

Analogicky pro trojúhelníky ECD a ECB zjistíme, že

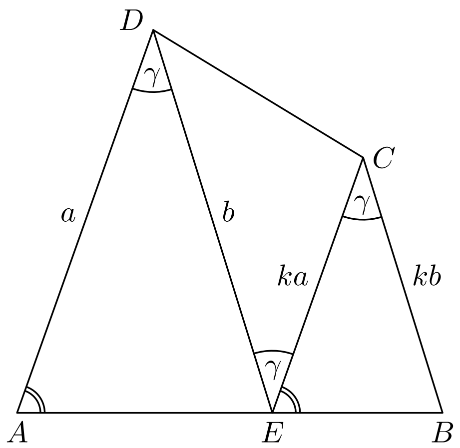
$$\frac{8}{S} = \frac{|EB|}{|AE|}.$$

(V obr. 1 jsou příslušné průměty jen naznačeny, ale jde o týž výpočet jako v předešlém odstavci, jen v něm zaměníme odpovídající body $A \leftrightarrow B$, $C \leftrightarrow D$ a příslušné obsahy trojúhelníků AED a BEC.) Dohromady tedy je $S : 8 = 18 : S$ neboli $S^2 = 144$, takže trojúhelník ECD má obsah $S = 12\,\mathrm{cm}^2$.

Jiné řešení. Stejně jako v prvním řešení zjistíme, že $AD \parallel EC$ a $ED \parallel BC$. Odtud plyne podobnost trojúhelníků AED a EBC. Označíme-li k příslušný poměr podobnosti (obr. 2), platí pro obsahy dotyčných trojúhelníků

$$18 = \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma, \quad S = \tfrac{1}{2}ka \cdot b\sin\gamma, \quad 8 = \tfrac{1}{2}ka \cdot kb\sin\gamma,$$

takže zřejmě platí $18 \cdot 8 = S^2$. Pro obsah trojúhelníku ECD tak dostáváme $S = 12\,\mathrm{cm}^2$.



Obr. 2

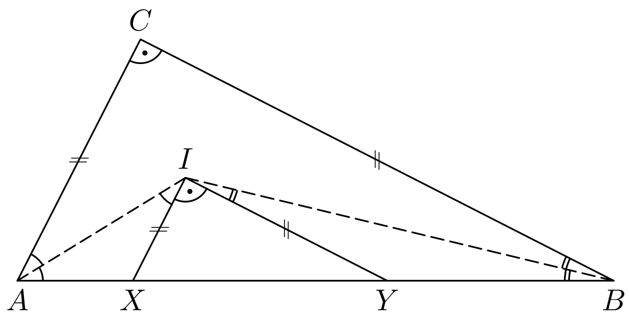
Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 2 body za zdůvodnění vztahů $AD \parallel EC$ a $ED \parallel BC$.

3. Je dán trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C. Středem I kružnice trojúhelníku vepsané vedeme rovnoběžky se stranami CA a CB, které protnou přeponu po řadě v bodech X a Y. Ukažte, že platí $|AX|^2 + |BY|^2 = |XY|^2$.

3. Trojúhelník AIX je rovnoramenný, neboť $|\sphericalangle IAX| = |\sphericalangle IAC| = |\sphericalangle AIX|$. (První rovnost plyne z podmínky, že bod I leží na ose úhlu BAC, druhá pak z vlastnosti střídavých úhlů, obr. 1.) Je tedy $|AX| = |IX|$. Analogicky zjistíme, že $|BY| = |YI|$. Protože úsečky IX a IY svírají (stejně jako s nimi rovnoběžné úsečky CA a CB) pravý úhel, podle Pythagorovy věty pro pravoúhlý trojúhelník XIY platí

$$|AX|^2 + |BY|^2 = |IX|^2 + |YI|^2 = |XY|^2,$$

což jsme měli dokázat.



Obr. 1

Za úplné řešení udělte 6 bodů, z toho 4 body za zdůvodnění rovností a $|BY| = |YI|$ a $|AX| = |IX|$.