

Syntetická geometrie III - ZS 2015/16

Výběr z úloh k samostatnému procvičování, většina těchto příkladů je převzata z matematické olympiády a část z nich byla probrána na cvičení.

1. (MO 2002/2003 C-I-4) Sestrojte lichoběžník $ABCD$ s výškou 3cm a shodnými stranami BC , CD , DA , pro které platí: Na základně AB existuje bod E , že $|DE| = 5\text{cm}$ a dělí lichoběžník na dvě části se stejnými obsahy.
2. (Návodná úloha) Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ a výškou délky v tak, že $|AB| = 4v$, $|CD| = 2v$ a obsah $S = 48\text{cm}^2$.
3. (Návodná úloha) Je dán lichoběžník $ABCD$, kde $|BC| = |DC| = |DA|$. Na základně AB je dán bod E tak, že obsahy trojúhelníků $\triangle AED$, $\triangle CDE$, $\triangle EBC$ jsou v poměru $3 : 2 : 1$. Určete velikosti vnitřních úhlů lichoběžníku $ABCD$. ($\alpha = \beta = 30^\circ$, $\gamma = \delta = 150^\circ$)
4. (MO 2014/2015 B-I-3) V $\triangle ABC$ označme U střed strany AB , V střed strany AC . V polovině $\mapsto BCA$ uvažujeme libovolný rovnoběžník $BCDE$. Označme X průsečík přímek UD a VE . Dokažte, že přímka AX dělí rovnoběžník $BCDE$ na dvě části téhož obsahu.
5. (Návodná úloha) Dokažte, že přímka dělí rovnoběžník na dvě části stejného obsahu právě tehdy, když prochází jeho průsečíkem úhlopříček, tj. středem rovnoběžníku.
6. (Návodná úloha) Uvnitř rovnoběžníku $ABCD$ je dán bod X . Sestrojte přímku, která prochází bodem X a rozděluje daný rovnoběžník na dvě části, jejichž obsahy se liší co nejvíce.
7. (MO 1983-1984 ZŠ) V trojúhelníku ABC je S střed strany BC a Q pata výšky na BC . Dále platí: $|SA| = 5$, $|AQ| = 4$, $|BQ| : |CQ| = 2$. Jaká je délka strany BC ? (Dvě možnosti 18 a 2)
8. (MO SŠ úloha II kola) Žák měl určit délku tětiny kruhu o poloměru r cm, vzdálenost středu kruhu od tětiny byla d cm. Čísla r , d byla dána. Žák použil nesprávného postupu. Domníval se, že délka tětiny bude $(r + d)$ cm. Přes chybný postup došel ke správnému výsledku. Jaký byl poměr délek r a d ? ($r : d = 5 : 3$)
9. (MO 1983-1984 SŠ domácí kolo) V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ procházejí osy vnitřních úhlů jedním bodem. Vypočítejte součet a součin velikostí jeho základů $a = |AB|$, $c = |CD|$ pomocí velikostí ramen $b = |AD| = |BD|$ a výšky v .
10. (MO 2014/2015 – Z8-II-1) V rovnostranném trojúhelníku ABC leží na straně BC bod F . Obsah trojúhelníku ABF je třikrát větší než obsah trojúhelníku ACF a rozdíl obvodů těchto dvou trojúhelníků je 5 cm. Určete délku strany trojúhelníku ABC .
11. (MO 2010/2011 – Z8-II-3) V kružnici k se středem S a poloměrem 52 mm jsou dány dvě na sebe kolmé tětiny AB a CD . Jejich průsečík X je od středu S vzdálen 25 mm. Jak dlouhá je tětina CD , je-li délka tětiny $|AB| = 96$ mm?
12. (MO 2009/2010 – Z8-I-5) Ze čtverce o straně 6 cm odřízneme od každého vrcholu shodné rovnoramenné pravoúhlé trojúhelníky tak, aby se obsah čtverce zmenšil o 32%. Jakou velikost mají odvěsny?
13. (MO 2005/2006 – Z9-I-5) Dva rovnostranné papírové trojúhelníky, z nichž menší má obsah 60cm^2 , jsme položili přes sebe tak, že jejich průnikem byl pravoúhlý trojúhelník s obsahem 30cm^2 . Jaký nejmenší obsah mohl mít větší z rovnostranných trojúhelníků?