Syntetická Geometrie III
ZS 2021/22

2. série domácích úkolů
termín odevzdání **do 12.1.2022**

Pro splnění domácího úkolu je nutno odevzdat právě 6 příkladů, libovolné 3 ze skupiny Planimetrie, a libovolné 3 ze skupiny Stereometrie. Ostatní si klidně udělejte jako doporučené cvičení.

Řešení odevzdávejte do moodle **ve formátu .pdf**: buďto čitelně napsané + výrazně narýsované + kvalitně naskenované, nebo vypracováno v nějakém textovém (např. LaTeX, nebo MS Word) a grafickém editoru (např. GeoGebra).

Pozn. 1.: U rýsovacích příkladů proveďte náčrt a rozbor, popis konstrukce, konstrukci a diskuzi.
Pozn. 2.: Najdete-li chybu, neváhejte mi napsat, může to ušetřit tápání Vašich kolegů. Pozn. 3: Sloučení skenů do .pdf je součástí běžně dostupného softwaru, obyčejně postačuje kvalita 200-300dpi. Další možnost je použít fakultní počítače v R319, na kterých je nainstalována verze Adobe Acrobat Pro, ve které je možné vytvořit sloučené .pdf z různých vstupních souborů (obrázky, dokumenty). V MacOS je možné jednoduše použít ke stejnému účelu zabudovaný program Preview. Další možností je použít online aplikace zdarma (obyčejně nástroj merge pdf).

Planimetrie

1. Sestrojte pětiúhelník, jsou-li dány středy jeho stran: S_1, S_2, S_3, S_4, S_5.
(bez postupu konstrukce)

2. Je dán trojúhelník $\triangle ABC$ a jemu opsaná kružnice k_o se středem S_o. Nechť bod D leží na straně BC. Kružnice l se středem S_1 má vnitřní dotyk s k_o a dotýká se úseček BC v bodě K a AD v bodě L. Dále, nechť S_v je střed kružnice vepsané trojúhelníku $\triangle ABC$. Potom S_v, K a L jsou kolineární. Dokažte.

3. Dvě dané kružnice k, k' mají společné dva různé body A, B. Bodem A proložme libovolnou přímku $a \neq \overleftrightarrow{AB}$, která dané dvě kružnice protne v dalších bodech P, P'. V nich sestrojíme ke kružnicím k, k' tečny. Dokažte, že velikost úhlu těchto dvou tečen nezávisí na poloze přímky a, t.j. pro dané dvě kružnice je konstantní.

4. Na úhlopříčce BD rovnoběžníku $ABCD$ leží takový bod P, že $|AP| = |BD|$. Nechť Q je středem úsečky PC. Dokažte, že úhel BQD je pravý.

5. Je dán různoběžník $ABCD$. Jeho protější strany se (v prodloužení) protínají v bodech $E \in \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD}, F \in \overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{BC}$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům $\triangle ABF, \triangle CDF, \triangle ADE, \triangle BCE$ procházejí jediným bodem.

6. Je dán trojúhelník $\triangle ABC$ a bod D na straně AB, bod J na straně CD tak, že $AJ \perp CD$ tak, že kružnice vepsané trojúhelníkům $\triangle ADJ, \triangle ACJ, \triangle BDC$ jsou shodné. Dokažte, že poloměry vepsaných kružnic jsou $r = \frac{|AJ|}{4}$.

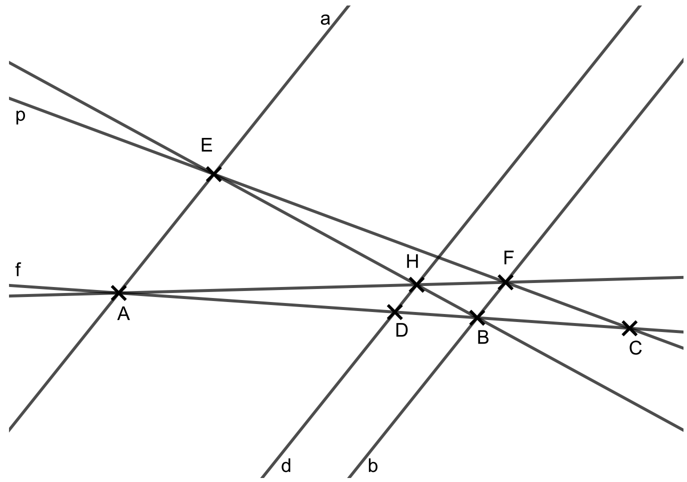
7. Jsou dány dvě kružnice $k(S, r), k'(S', r')$ různých poloměrů, z nichž každá leží vně druhé. Jejich vnější střed stejnolehlosti je O. Jím je proložena přímka $p \neq \overleftrightarrow{SS'}$, která dané kružnice protíná v bodech $M, N; M', N'$. Tečny sestrojené v těchto bodech tvoří rovnoběžník, jehož jedna uhlopříčka prochází bodem O a druhá leží na pevné přímce. Dokažte.

8. Je dán ostrý úhel α o vrcholu V a na jeho ose souměrnosti je dán bod O, nesplývající s vrcholem V. Sestrojte kružnici se středem v bodě O tak, aby její poloměr byl menší než $|OV|$ a aby její průsečíky s oběma rameny určovali lichoběžník daného obsahu k^2.

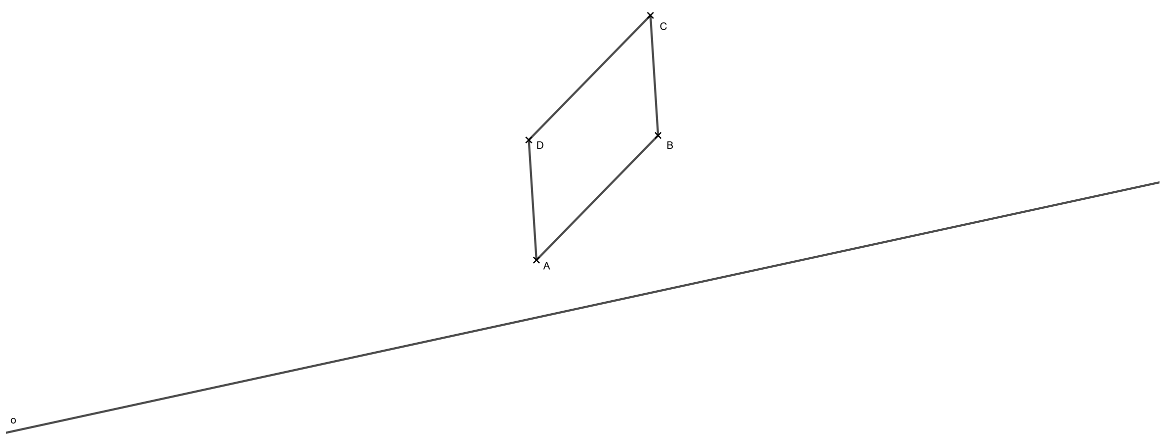
9. Sestrojte tětivový čtyřúhelník $ABCD$, jestliže jsou dány délky jeho stran: $a = 6; b = 5,2; c = 2,2; d = 3$.

10. Pošťák Karel žije v členitém terénu a přesto rozváží zásilky do tří okolitých vesnic na kole. Do Pýthagorova jede lesem přímou trasou rychlostí $6km/h$. Do Hérónových Lázní je to přímo rychlostí $10km/h$. Do Apolloniova Háje jede po cyklostezce přímo rychlostí $15km/h$. Do všech tří vesnic mu cesta trvá stejně dlouho. Pýthagorovo je od Hérónových Lázní vzdáleno $10km$ a od Apolloniova Háje $12km$ a Hérónovy Lázně jsou od Apolloniova Háje vzdáleny $10km$. Sestrojte na mapě v měřítku 1 : 100000 místo, kde leží pošta.

11. Dokažte, že v rovině platí následovná konstrukce harmonické čtveřice: Jsou dány různé kolineární body A, B, C. Volíme přímku $p \neq \overline{AB}$ takovou, že bod $C \in p$. Nechť a a b jsou rovnoběžné přímky $A \in a, B \in b$ ale $a, b \nparallel \overline{AB}, p$, které protínají přímku p v bodech $a \cap p = E, b \cap p = F$. Označme H průsečík $\overline{AF} \cap \overline{BE}$, jimž vedeme přímku d rovnoběžnou s a a b. Označme D průsečík přímek $d \cap \overline{AB}$, pak $(AB; CD) = -1$.



12. Dourčete osovou afinitu s osou o tak, aby obrazem rovnoběžníku byl
    (a) obdélník o obsahu stejném jako daný rovnoběžník
    (b) čtverec



13. Sestrojte jen použitím pravítka a kružítka úhel velikosti $\frac{\pi}{10}$.

14. Je dána kružnice k a bod $P \notin k$. Bodem P procházejí dvě sečny p a q kružnice k. Sečna p protne k v bodech A, D a sečna q v bodech B, C tak, že body A, B, C, D jsou cyklicky uspořádány. Určete vztah mezi velikostí úhlu $\sphericalangle APB$ a délkami oblouků $\widehat{AB}, \widehat{CD}$

15. A, B, C, D jsou 4 body na společné kružnici v daném pořadí. Nechť P, Q, R, S jsou středy oblouků ohraničených body AB, BC, CD a DA. Dokažte, že úsečka PR je kolmá k úsečce QS.

16. Nechť $AXYZB$ je konvexní pětiúhelník vepsaný do poloviny kružnice s průměrem AB. Označme P, Q, R, S paty kolmice vedené z Y postupně na přímky AX, BX, AZ, BZ. Ukažte že velikost úhlu mezi přímkami PQ a RS je polovinou velikosti $\sphericalangle XOZ$, kde O je střed úsečky AB.

17. $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník; x, y, z jsou popořadě vzdálenosti bodu A od přímek BD, BC a CD. Dokažte, že:

$$\frac{BD}{x} = \frac{BC}{y} + \frac{CD}{z}.$$

18. Nechť $ABCD$ je tečnový čtyřúhelník. Označme a, b, c a d délky úseček spojující vrcholy A, B, C a D a body dotyku kružnice a čtyřúhelníku. Dále nechť bod P je průsečík úhlopříček AC a BD , potom platí:

$$\frac{|AP|}{|PC|} = \frac{a}{c}.$$

19. Úhlopříčky AD, BE a CF tětivového šestiúhelníku $ABCDEF$ se protínají v jednom bodě. Dokažte:

$$|AB||CD||EF| = |BC||DE||AF|.$$

20. Nechť $A_1A_2 \dots A_n$ je tětivový mnohoúhelník vepsaný kružnici $\omega(O, r)$, se středem O a poloměrem r. Jestliže leží těžiště mnohoúhelníku ve středu O, pak pro každý bod $P \in \omega$, platí:

$$\sum_{k=1}^{n} |PA_n|^2 = 2nr^2$$

.

21. Dokažte, že v trojúhelníku protínají osy dvou vnitřních úhlů a osa třetího vnějšího úhlu protější strany (v prodloužení) v bodech přímky.

Stereometrie

22. Je dána krychle $ABCDEFGH$. Přímka p je spojnice středů stěn $ABCD$ a $EFGH$, přímka $q = \overline{BE}$ a rovina $\rho = ABG$. V rovině kolmé k přímce p sestrojte pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník $\triangle PQR$ s pravým úhlem při vrcholu $P \in p$ tak, aby $Q \in q$ a $R \in \rho$.
Proveďte náčrt, rozbor, stručný popis konstrukce, a diskuzi.

23. Je dána krychle $ABCDEFGH$ se středem S a přímka p ležící v rovině $\rho = EBG$. Popište a načrtněte jak sestrojit úsečku XY tak, aby bod X ležel na přímce p, bod Y v rovině ADH a bod S byl jejím středem.

24. Je dán rotační kužel s vrcholem V a bod A obvodu jeho podstavy; B je střed strany AV. Zjistěte (a zdůvodněte), zda lze sestrojit rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby vrchol C ležel na plášti kužele.

25. Jsou dány mimoběžné přímky a a b. Určete (a načrtněte) množinu středů všech úseček, z nichž každá má jeden krajní bod na přímce a a druhý krajní bod na přímce b.

26. Je dán obecný čtyřstěn. Dokažte, že existuje rovina, která řeže čtyřstěn v rovnoběžníku.

27. Je dán čtyřstěn $ABCD$. Dokažte, že těžiště a střed opsané koule jsou totožné právě tehdy, když stěny čtyřstěnu jsou shodné.

28. Určete množinu všech bodů v prostoru, které mají od dvou různých rovin vzdálenosti v daném poměru $0 < \frac{p}{q} \neq 1$.

29. Určete množinu všech středů kružnic na kulové ploše, jejichž roviny procházejí pevnou přímkou.

30. Buď dán pravidelný čtyřboký hranol $ABCDA'B'C'D'$, uvnitř hrany AB bod M a uvnitř hrany $C'D'$ bod N. Sestrojte nejkratší příčku mimoběžek $\overleftrightarrow{MN}$ a $\overleftrightarrow{CC'}$ a zobrazte ji ve volném rovnoběžném promítání.
(náčrt a rozbor, stručný postup konstrukce, konstrukce, diskuze)

31. Čtyřstěn, jehož protilehlé hrany jsou shodné, má navzájem shodné stěny tvořené ostroúhlým trojúhelníkem. Dokažte.

32. Ve čtyřstěnu $ABCD$ označme E, F středy těžnic z vrcholů A a D. Určete poměr objemů čtyřstěnů $BCEF$ a $ABCD$.

33. Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$, bod O je střed hrany AD, S_1 střed stěny $ABB'A'$, S_2 střed stěny $BCC'B'$ a S střed krychle. Je-li $\mathbf{Z}_1$ středová souměrnost se středem S_1, $\mathbf{Z}_2$ středová souměrnost se středem S_2, $\mathbf{Z}_3$ posunutí určené orientovanou úsečkou $\overrightarrow{BA}$, $\mathbf{Z}_4$ souměrnost podle roviny S_1S_2S a $\mathbf{Z}_5$ osová souměrnost s osou SS_2, určete zobrazení $\mathbf{Z}$, které vznikne složením $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3, \mathbf{Z}_4, \mathbf{Z}_5$ v tomto pořadí.

34. Ve čtyřstěnu $ABCD$ s těžištěm T a středem opsané kulové plochy O platí: $|AT| + |BT| + |CT| + |DT| \leq 4\sqrt{r^2 - d^2}$, kde r je poloměr opsané kulové plochy a $d = |TO|$.

35. Je dán klín K o úhlu velikosti $0 < \alpha < 180°$ a dále reálné číslo $s > 0$. Určete množinu bodů, které náleží klínu K a jejichž součet vzdáleností od rovin stěn klínu K je konstantní, rovný s.

36. Je dána rovina ρ a dvě mimoběžné přímky a, b, které jsou rovnoběžné s rovinou ρ a které mají od roviny ρ stejnou vzdálenost. Určete v rovině ρ množinu středů kulových ploch $\varkappa$, které se dotýkají daných přímek.

37. Je dána úsečka AB a rovina ρ. Určete pravidelný čtyřstěn o vrcholech A, B, jehož další vrchol C leží v rovině ρ. Proveďte diskuzi existence a počtu řešení.

38. Jehlan se nazývá pravidelný, když jeho podstava je pravidelný mnohoúhelník a jeho hlavní vrchol má stejnou vzdálenost od všech podstavních vrcholů.

    Dokažte, že jehlan $A_1A_2 \dots A_nV$ s pravidelnou podstavou $A_1A_2 \dots A_n$ je pravidelný právě tehdy, když vrchol V má stejnou vzdálenost od alsepoň tří podstavních vrcholů A_i, A_j, A_k pro $i \neq j \neq k \neq i$.

39. Je dána rovina ρ a v ní bod S. Určete množinu všech bodů, které mají stálý poměr vzdáleností od roviny ρ a od bodu S, rovný danému kladnému číslu $\lambda < 1$.

40. Na rovině jsou čtyři shodné koule po dvou navzájem se dotýkající, na nichž je položena pátá koule všech se dotýkající. Určete objem jehlanu jehož (všechny) stěny se dotýkají daných koulí.

41. Sestrojte kružnici, jež prochází dvěma danými body a na dané přímce vymezuje úsečku o délce a.