

Syntetická Geometrie III

1. série domácích úkolů termín odevzdání 12.12.2021

Pro splnění domácího úkolu je nutno odevzdat 6 příkladů, za podmínky, že z každé skupiny jsou vypracované alespoň 2 příklady. Odevzdávejte prosím právě 6 příkladů. Ostatní si klidně udělejte jako doporučené cvičení.

Řešení odevzdávejte do moodle ve formátu .pdf; buď to čitelně napsané + výrazně narýsované + kvalitně naskenované, nebo vypracováno v nějakém textovém (např. $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$, nebo MS Word) a grafickém editoru (např. GeoGebra).

Pozn. 1.: U rýsovacích příkladů proveďte náčrt a rozbor, popis konstrukce, konstrukci a diskuzi. U příkladů na kuželosečky můžete bodový postup konstrukce vynechat, stačí ho stručně zhrnout v rozboru.

Pozn. 2.: Najdete-li chybu, neváhejte mi napsat, může to ušetřit tápání Vašich kolegů.

Pozn. 3: Sloučení skenu do .pdf je součástí běžně dostupného softwaru, obvykle postačuje kvalita 200-300dpi. Další možnost je použít fakultní počítače v R319, na kterých je nainstalována verze Adobe Acrobat Pro, ve které je možné vytvořit sloučené .pdf z různých vstupních souborů (obrázky, dokumenty). V MacOS je možné jednoduše použít ke stejnému účelu zabudovaný program Preview.

Kuželosečky

1. (Obrázek na konci souboru)

- Sestrojte kuželosečku, je-li dáno: hlavní vrchol A , střed S a tečna t .
- Sestrojte přesně bod dotyku T dané tečny t .

Proveďte náčrt a rozbor řešení, konstrukci a diskuzi počtu řešení. Postup konstrukce napište stručně (ale rozumně), můžete jej zahrnout do rozboru.

2. (Obrázek na konci souboru)

- Sestrojte parabolu, je-li dána její řídicí přímka d , tečna t a bod M .
- Sestrojte přesně bod dotyku tečny t a tečnu bodem M .

Proveďte náčrt a rozbor řešení, konstrukci ohniska, osy a vrcholu pro jedno zvolené řešení a diskuzi počtu řešení. Postup konstrukce napište stručně (ale rozumně), můžete jej zahrnout do rozboru.

3. (Obrázek na konci souboru)

- Sestrojte kuželosečku, je-li dáno: ohnisko F , tečny t_1, t_2, t_3 (viz obrázek).
- Sestrojte přesně bod dotyku T tečny t_1 a alespoň 5 dalších bodů kuželosečky.

Proveďte náčrt a rozbor řešení, konstrukci vrcholu, ohniska a osy pro jedno zvolené řešení a diskuzi existence a počtu řešení ze zadaných parametrů. Stručný postup konstrukce zahrňte do rozboru. Konstrukci proveďte do zadaného obrázku.

4. (Obrázek na konci souboru)

- Sestrojte hyperbolu, je-li dáno: ohnisko F , směry asymptot \vec{u}_1, \vec{u}_2 a excentricita e (viz obrázek).
- Sestrojte přesně alespoň 5 dalších bodů kuželosečky (mimo vrcholy) a tečnu v jednom z nich.

Proveďte náčrt a rozbor řešení, konstrukci vrcholů, ohnisek a os pro jedno zvolené řešení a diskuzi existence a počtu řešení ze zadaných parametrů. Stručný postup konstrukce zahrňte do rozboru. Konstrukci proveďte do zadaného obrázku.

5. a) Sestrojte středovou kuželosečku, je-li dáno: ohnisko F_1 , tečny t_1, t_2 a délka hlavní poloosy a .
- b) Sestrojte body dotyku tečen t_1, t_2 .

Proveďte náčrt a rozbor řešení, konstrukci ohnisek, os a vrcholů pro jedno zvolené řešení a diskuzi existence a počtu řešení ze zadaných parametrů. Postup konstrukce napište stručně (ale rozumně), můžete jej zahrnout do rozboru.

6. a) Sestrojte parabolu, je-li dáno: řídicí přímka d , body M_1, M_2 paraboly.

b) Sestrojte přesně tečny v bodech M_1, M_2 .

Proveďte náčrt a rozbor řešení, konstrukci ohniska, osy a vrcholu pro jedno zvolené řešení a diskuzi existence a počtu řešení ze zadaných parametrů. Postup konstrukce napište stručně (ale rozumně), můžete jej zahrnout do rozboru.

7. a) Sestrojte parabolu, je-li dáno: osa o , tečna t_1 a její bod dotyku T_1 s parabolou.

b) Sestrojte přesně tečnu t_2 kolmou k t_1 a bod dotyku T_2 tečny t_2 .

Proveďte náčrt a rozbor řešení, konstrukci ohniska, vrcholu a řídicí přímky pro jedno zvolené řešení a diskuzi existence a počtu řešení ze zadaných parametrů. Stručný postup konstrukce zahrňte do rozboru.

8. a) Sestrojte elipsu, je-li dáno: ohnisko F_1 , její body M_1 a M_2 a délka hlavní poloosy a .

b) Sestrojte přesně tečny t_1 a t_2 v bodech M_1 a M_2 .

Proveďte náčrt a rozbor řešení, konstrukci druhého ohniska, vrcholů a os pro jedno zvolené řešení a diskuzi existence a počtu řešení ze zadaných parametrů. Stručný postup konstrukce zahrňte do rozboru.

9. a) Sestrojte parabolu, je-li dáno: řídicí přímka d , tečna t a velikost parametru paraboly p .

b) Sestrojte přesně bod dotyku T tečny t .

Proveďte náčrt a rozbor řešení, konstrukci vrcholu, ohniska a osy pro jedno zvolené řešení a diskuzi existence a počtu řešení ze zadaných parametrů. Stručný postup konstrukce zahrňte do rozboru.

10. a) Sestrojte kuželosečku, je-li dáno: střed S , tečny t_1 a t_2 a délka hlavní poloosy a .

b) Sestrojte přesně body dotyku tečen t_1 a t_2 .

Proveďte náčrt a rozbor řešení, konstrukci ohnisk, vrcholů a os pro jedno zvolené řešení a diskuzi existence a počtu řešení ze zadaných parametrů. Stručný postup konstrukce zahrňte do rozboru.

11. a) Sestrojte parabolu, je-li dáno: osa o , vrcholová tečna v a bod M na parabole, který není vrcholem paraboly.

b) Sestrojte konstrukčně tečnu (včetně bodu dotyku) ve směru přímky \overleftrightarrow{VM} , kde V je vrchol paraboly.

Proveďte náčrt a rozbor řešení, konstrukci ohniska, vrcholu a osy pro jedno zvolené řešení a diskuzi existence a počtu řešení ze zadaných parametrů. Stručný postup konstrukce zahrňte do rozboru.

12. a) Sestrojte kuželosečku, je-li dáno: ohnisko F , tečna t s bodem dotyku T a osa o .

b) Sestrojte přesně tečnu kolmou k t a její bod dotyku.

Proveďte náčrt a rozbor řešení, konstrukci ohnisk, vrcholů, os, asymptot, resp. řídicí přímky (v závislosti od typu kuželosečky) pro jedno zvolené řešení a diskuzi existence a počtu řešení ze zadaných parametrů. Stručný postup konstrukce zahrňte do rozboru.

13. a) Sestrojte elipsu, je-li dáno: ohnisko F , tečny t_1, t_2, t_3 .

b) Zkonstruuje přesně trojúhelník, který tvoří dotykové body daných tečen.

Proveďte náčrt a rozbor řešení, konstrukci ohnisk, vrcholů a os pro jedno zvolené řešení a diskuzi existence a počtu řešení ze zadaných parametrů. Stručný postup konstrukce v a) zahrňte do rozboru.

Planimetrie

14. Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, je-li dáno: vrchol C , ortocentrum V , střed kružnice opsané S .

15. Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, je-li dáno: vrchol C , těžiště T , střed kružnice opsané S .

16. Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, je-li dáno: vrcholy A, B , střed S kružnice připsané straně c .

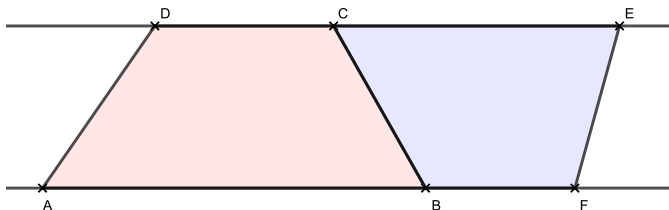
17. Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, je-li dáno: vrchol A, B , střed S kružnice vepsané, bod dotyku kružnice vepsané se stranou c .

18. Dokažte, že v každém trojúhelníku $\triangle ABC$ s ostrým úhlem při vrcholu C (při obvyklém označení délek stran a velikostí úhlů) platí nerovnost:

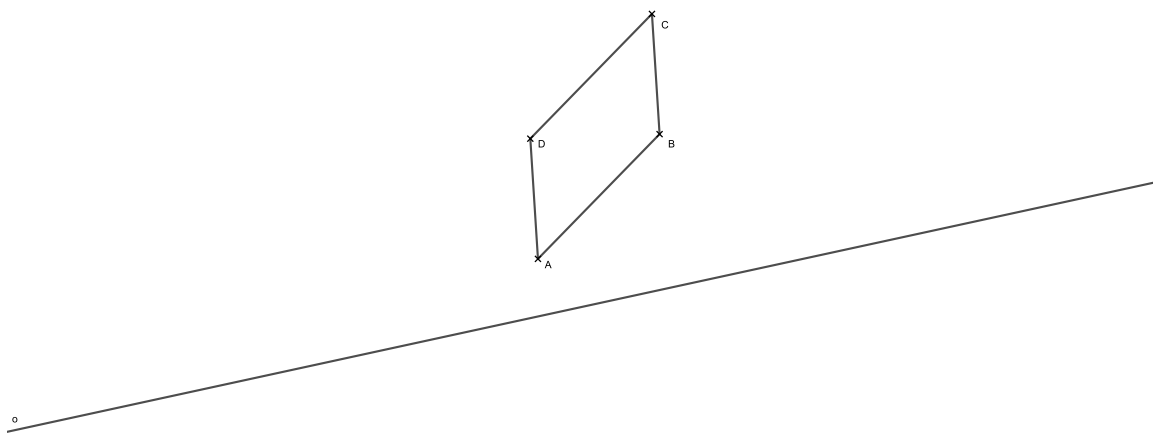
$$(a^2 + b^2) \cos(\alpha - \beta) \leq 2ab$$

Zjistěte, kdy nastává rovnost.

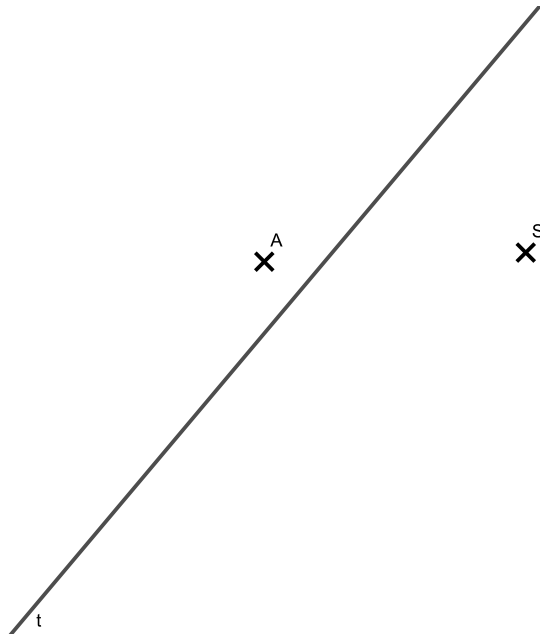
19. V rovině je dán úhel $\sphericalangle XSY$ a kružnice k o středu S . Uvažujme libovolný trojúhelník $\triangle ABC$ s vepsanou kružnicí k , jehož vrcholy A a B leží po řadě na polopřímkách \overrightarrow{SX} a \overrightarrow{SY} . Určete množinu vrcholů C všech takových trojúhelníků $\triangle ABC$.
20. Je dán ostroúhlý trojúhelník $\triangle ABC$. Pro libovolný bod L jeho strany AB označme K, M paty kolmic z bodu L na strany AC, BC . Zjistěte, pro kterou polohu bodu L je úsečka KM nejkratší.
21. Uvnitř strany BC trojúhelníku $\triangle ABC$ je dán bod K . Označme M střed strany BC a předpokládejme, že rovnoběžka s přímkou AK vedená bodem M protne stranu AC ve vnitřním bodě L . Dokažte, že přímka KL dělí trojúhelník $\triangle ABC$ na dvě části stejného obsahu.
22. Je dáno n čtverců. Dokažte, že je lze rozdělit na části tak, aby z nich bylo možné sestavit jediný čtverec.
23. Je dán čtverec $\square ABCD$ a bod P uvnitř čtverce. Zjistěte velikost úhlu $|\sphericalangle APB|$, je-li $|AP| = 1, |BP| = 2, |CP| = 3$.
24. Sestrojte čtverec je-li dán jeden bod na každé jeho straně, nebo jejím prodloužení.
25. Je dán čtverec $ABCD$ s vnitřním bodem K . Sestrojte rovnostranný trojúhelník KLM tak, aby jeho vrcholy L, M ležely na hranici čtverce. Proveďte náčrt, rozbor a diskuzi úlohy.
26. Je dán lichoběžník $AFED$ rozdělený příčkou BC , jejíž krajní body leží na základnách $B \in AF$ a $C \in ED$. Dokažte, že průsečíky uhlopříček lichoběžníků $AFED, ABCD$ a $BFEC$ jsou kolineární.

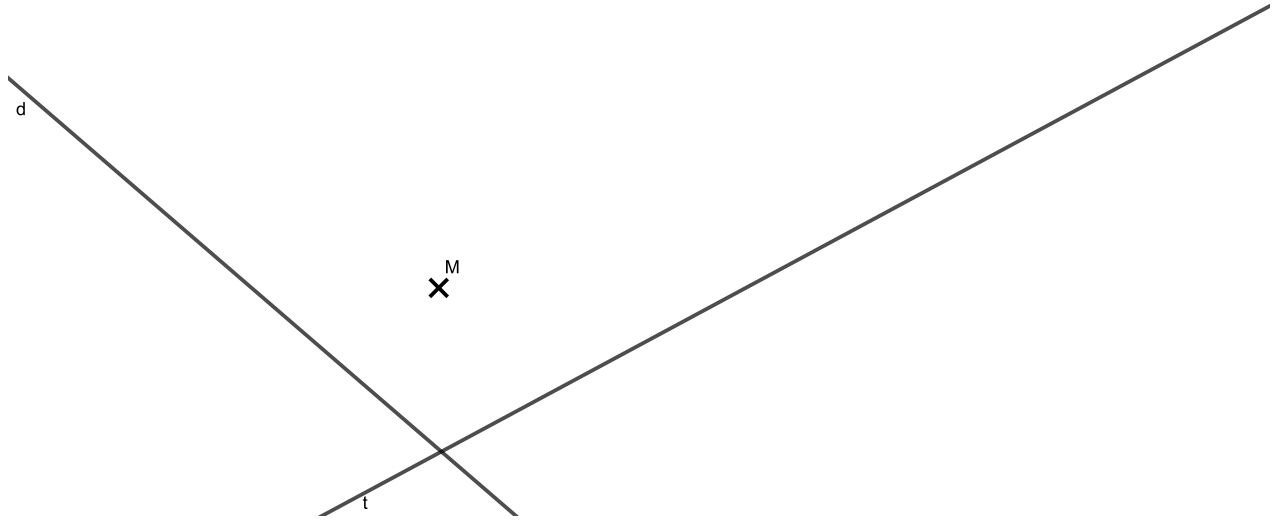


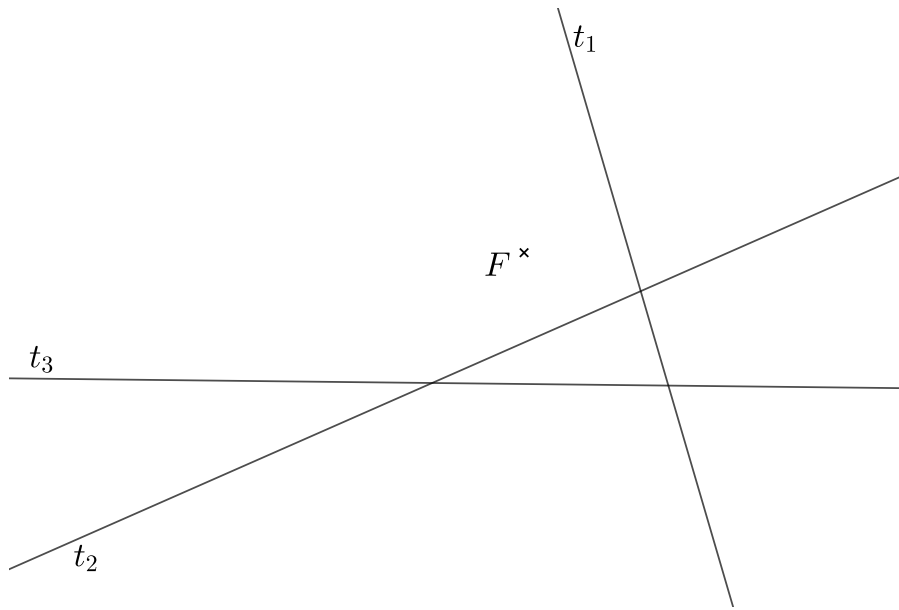
27. Dourčete osovou afinitu tak, aby obrazem rovnoběžníku byl čtverec.

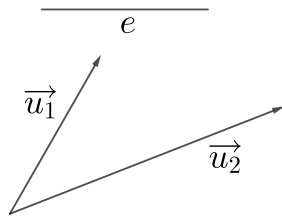


28. Jsou dány dva pevné body A a B a konstanta k . Určete množinu bodů X takových, že $|AX| \cdot |BX| = k$ a diskutujte existenci a počet řešení vzhledem k volbě zadaných parametrů.
29. Necht' $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník o obsahu 1. Určete nejmenší hodnotu $AB + BC + CD + DA + AC + BD$.
30. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice k_1 a k_2 a úsečky délky u, v . Sestrojte přímku, na které kružnice k_1 oddělí tětivu shodnou s úsečkou u a kružnice k_2 tětivu shodnou s úsečkou v .
31. Je dána kružnice k a bod $P \notin k$. Bodem P procházejí dvě sečny p a q kružnice k . Sečna p protne k v bodech A, D a sečna q v bodech B, C tak, že body A, B, C, D jsou cyklicky uspořádány. Určete vztah mezi velikostí úhlu $\sphericalangle APB$ a délkami oblouků $\widehat{AB}, \widehat{CD}$
32. Dokažte, že v trojúhelníku protínají osy dvou vnitřních úhlů a osa třetího vnějšího úhlu protější strany (v prodloužení) v bodech přímky.
33. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice k_1 a k_2 a úsečky délky u, v . Sestrojte přímku, na které kružnice k_1 oddělí tětivu shodnou s úsečkou u a kružnice k_2 tětivu shodnou s úsečkou v .
34. Sestrojte kružnici, jež prochází dvěma danými body a na dané přímce vymezuje úsečku o délce a .









$\times F$