Chordála je přímka

M. Zamboj

Definice 1. Množina všech bodů, které mají stejnou mocnost ke dvoum kružnicím se nazývá jejich *chordála*.

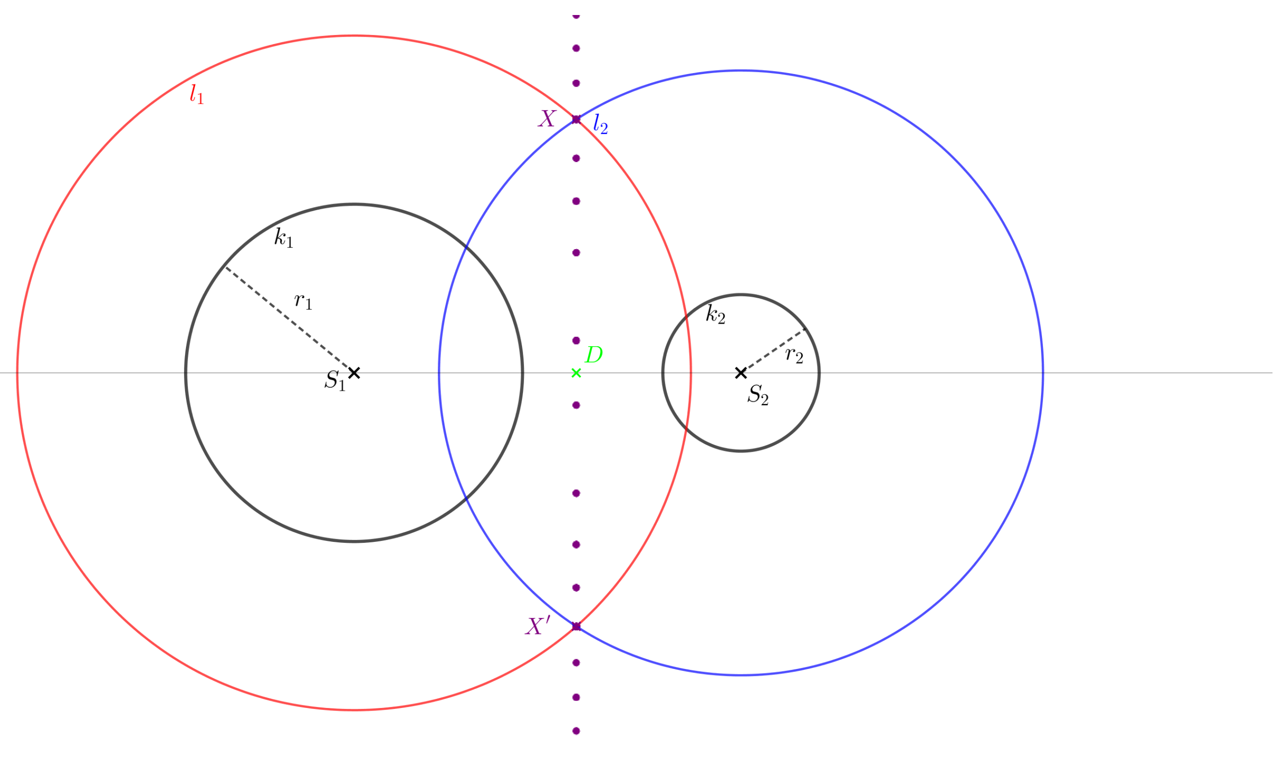
Zkusme nejdříve provést konstrukci několika takových bodů:
Jsou tedy dány dvě kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ a předpokládejme, že se neprotonou v žádném bodě a jsou vzájemně vně. Hledámé body X pro, které platí

$$M(X, k_1) = M(X, k_2)$$

neboli

$$|S_1X|^2 - r_1^2 = |S_2X|^2 - r_2^2$$

.



Pro různé volby $|S_1X|$ leží bod X na kružnici $l_1(S_1, |S_1X|)$ a dle vztahu výše můžeme dopočítat vzdálenost

$$|S_2X| = \sqrt{|S_1X|^2 - r_1^2 + r_2^2},$$

která bude poloměrem druhé kružnice l_2 se středem v S_2. Aby se kružnice protly ve dvou bodech, musí ještě platit trojůhelníková nerovnost pro S_1S_2X (obecně stačí volit dostatečně velké $|S_1X|$). Takto vytvořená množina nápadně přípomíná přímku.

Hledejme bod D s takovou vlastností na přímce S_1S_2. Pro bod D tedy platí

$$|S_1D|^2 - r_1^2 = |S_2D|^2 - r_2^2$$

. Navíc, protože předpokládáme, že se kružnice k_1, k_2 neprotnou, lze např. z toho že vzdálenost bodu D od bodů dotyků tečen z něj vedených ke kružnicím k_1 a k_2 určit, že bod D leží mezi S_1 a S_1, neboli

$$|S_1D| + |S_2D| = |S_1S_2|$$

a můžeme po dosazení dopočitat

$$|S_1D| = \frac{|S_1S_2|^2 + r_1^2 - r_2^2}{2|S_1S_2|}$$

.

Pro kružnice v nichž je jedna kružnice uvnitř druhé, lze dedukovat podobně jako výše. Rozdíl je v tom, že D bude vnějším bodem úsečky S_1S_2 (hraniční případ, kdy D je vnitřním, resp. vnějším bodem je, když průsečíky kružnic a S_1, S_2 tvoří pravoůhlý trojúhelník).
Pro soustředné kružnice chordála nebude existovat (projektivně by to byla ńevlastní přímka).
Pro kružnice, které mají jeden, nebo dva společné body lze triviálně určit body s nulovou mocností.
Pro totožné kružnice je chordálou libovolná přímka.

Věta 1. *Chordála je přímka kolmá k středné (spojnici středů).*

Budeme dodržovat výše uvedené značení. Větu dokažme jen pro případ neprotínajících se kružnic, které jsou vzájemně vně. Ostatní případy lze dokázat obdobně. Výše jsme uvedli konstrukci bodu D, pro který platí $M(D, k_1) = M(D, k_2)$ a leží na středné, hledaná přímka tedy musí být kolmice k středné procházející bodem D. Označme ji d. Protože dokazujeme větu o množinách bodů, která je ekvivalencí, rozložíme ji na dva případy:

„$\Rightarrow$“ Splňuje-li bod X vlastnost $M(X, k_1) = M(X, k_2)$, pak leží na přímce d.

Pro bod X platí předpoklad

$$|S_1X|^2 - r_1^2 = |S_2X|^2 - r_2^2.$$

Dále platí $\cos(\sphericalangle XDS_1) = -\cos\sphericalangle(XDS_2)$.
Dle kosinové věty pro $\triangle XDS_1, \triangle XDS_2$ platí:

$$|S_1X|^2 = |S_1D|^2 + |DX|^2 - 2|S_1D||DX|\cos(\sphericalangle XDS_1)$$

$$|S_2X|^2 = |S_2D|^2 + |DX|^2 - 2|S_2D||DX|\cos(\sphericalangle XDS_2) = |S_2D|^2 + |DX|^2 + 2(|S_1S_2| - |S_1D|)|DX|\cos(\sphericalangle XDS_1)$$

a po odečtení:

$$|S_1X|^2 - |S_2X|^2 = |S_1D|^2 - |S_2D|^2 + 2|S_1S_2||DX|\cos(\sphericalangle XDS_1).$$

Pro bod D však platí, že $M(D,k_1) = M(D,k_2)$, t.j. $|S_1D|^2 - r_1^2 = |S_2D|^2 - r_2^2$ a po úpravě

$$|S_1D|^2 - |S_2D|^2 = r_1^2 - r_2^2 = |S_1X|^2 - |S_2X|^2.$$

Po dosazení do vztahu odvozeného z kosinové věty dostaneme, že platí

$$0 = 2|S_1S_2||DX|\cos(\sphericalangle XDS_1).$$

Obě vzdálenosti jsou nenulové, a tedy nutně $|\sphericalangle XDS_1| = \dfrac{\pi}{2}$.
Z toho plyne, že každý bod, který má uvedenou vlastnost leží na přímce d. Zatím však nevíme, zda tyto body pokrývají celou přímku d (nebo jenom její podmnožinu).

„$\Leftarrow$“ Leží-li bod X na přímce d, pak platí, že $M(X,k_1) = M(X,k_2)$.

V tomto případě můžeme rovnou uvažovat pravoúhlé trojúhelníky $\triangle S_1DX, \triangle S_2DX$. Platí pro ně Pythagorova věta:

$$|S_1X|^2 - |S_1D|^2 = |DX|^2 = |S_2X|^2 - |S_2D|^2,$$

z toho

$$|S_1X|^2 - |S_2X|^2 = |S_1D^2| - |S_2D^2|.$$

Ale pro bod D platí z mocnosti $|S_1D|^2 - |S_2D|^2 = r_1^2 - r_2^2$ a po dosazení a úpravě máme $|S_1X|^2 - r_1^2 = |S_2X|^2 - r_2^2$, což jsme chtěli dokázat. Dokázali jsme, že každý bod na přímce d má danou vlastnost (v této části však nedokazujeme, že nemůže ležet mimo přímky d).