# Planimetrie
# ZS 2023/24

3. série domácích úkolů
termín odevzdání: 14.1.2024 / a současně alespoň týden před psaním závěrečného testu

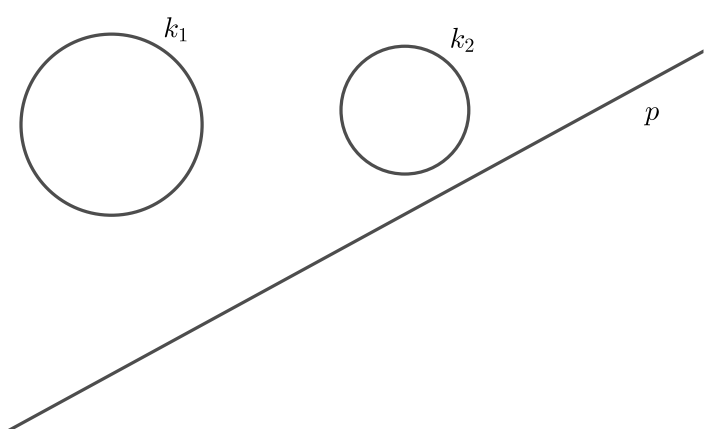
Příklady jsou rozděleny do tří skupin. Pro splnění domácího úkolu je nutno odevzdat 4 příklady za podmínky, že z každé skupiny vypracujete alespoň jeden. Odevzdávejte, prosím, **právě 4 příklady**. Ostatní si klidně udělejte jako doporučené cvičení. Opakujete-li předmět, odevzdejte jiné příklady než minule.

Řešení odevzdávejte do moodle jako jeden soubor **ve formátu .pdf**: buďto čitelně napsané + výrazně narýsované + kvalitně naskenované, nebo vypracováno v nějakém textovém (např. LaTeX, nebo MS Word) a grafickém editoru (např. GeoGebra).

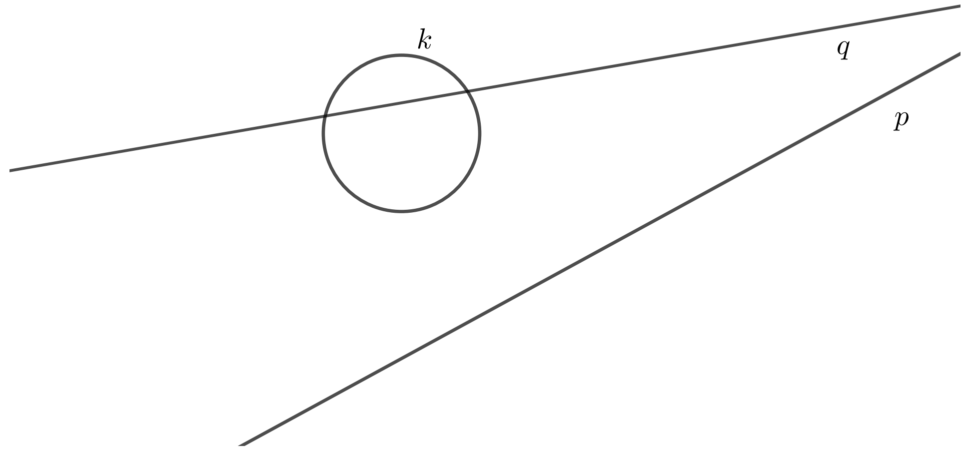
Pozn. 1.: Máte-li problém se značením a diskuzi u rýsovacích příkladů, použijte pro jednotnost učebnici P. Leischner: Metody řešení planimetrických úloh
Pozn. 2.: Najdete-li chybu, neváhejte mi napsat, může to ušetřit tápání Vaších kolegů.
Pozn. 3: Sloučení skenu do .pdf je součastí běžně dostupného softwaru, obyčejně postačuje kvalita 200-300dpi. Další možnost je použít fakultní počítače v R319, na kterých je nainstalována verze Adobe Acrobat Pro, ve které je možné vytvořit sloučené .pdf z různých vstupních souborů (obrázky, dokumenty). V MacOS je možné jednoduše použít ke stejnému účelu zabudovaný program Preview.

## Rýsování

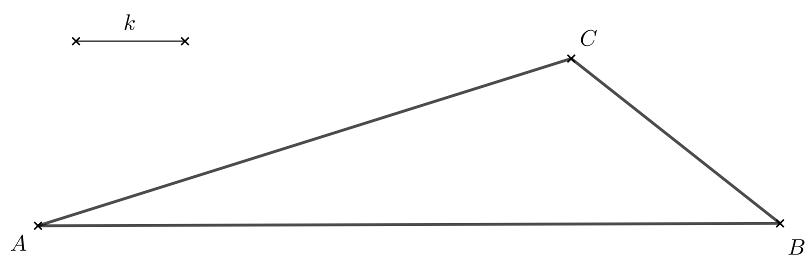
1. Sestrojte tečny dvou nesoustředných kružnic $k(S_1, r_1), l(S_2, r_2)$ takových, že
   a) $r_1 = r_2$
   b) $r_1 \neq r_2$
2. V rovině je dána přímka $p$ a kružnice $k_1, k_2$ podle obrázku. Sestrojte rovnostranný trojúhelník jehož vrcholy leží na zadaných útvarech $(p, k_1, k_2)$ a současně platí, že žádné dva vrcholy neleží na jednom z daných útvarů.




3. V rovině jsou dány přímky $p, q$ a kružnice $k$ podle obrázku. Sestrojte rovnostranný trojúhelník jehož vrcholy leží na zadaných útvarech $(p, q, k)$ a současně platí, že žádné dva vrcholy neleží na jednom z daných útvarů.

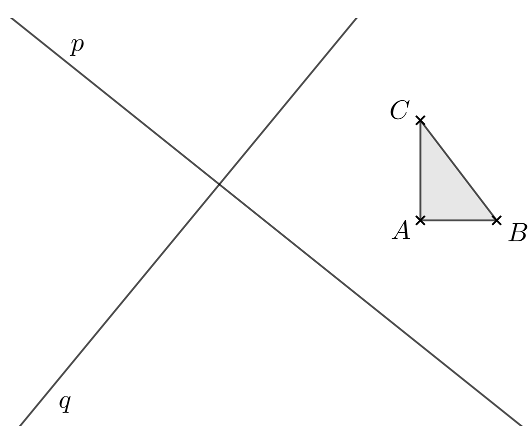



4. Je dán trojúhelník $ABC$ a úsečka délky $k$ podle obrázku. Sestrojte rovnostranný trojúhelník $KLM$ se stranami délky $k$, jehož vrcholy leží na stranách trojúhelníku $ABC$. Konstrukci proveďte do zadání.




5. V rovině je dána úsečka $BB_1$. Sestrojte trojúhelník $ABC$, je-li dána délka strany $c$ a délka výšky $v_c$ na stranu $c$.

6. Jsou dány přímky $p, q$ a pravoúhlý trojúhelník $ABC$ s pravým úhlem ve vrcholu $A$ podle obrázku. Sestrojte trojúhelník $KLM$ s pravým úhlem ve vrcholu $K$, který je shodný s trojúhelníkem $ABC$, odvěsny $KM$ a $AC$ jsou rovnoběžné a vrcholy $K, M$ leží na přímkách $p, q$ (v libovolném pořadí).



7. V rovině je dána úsečka $BC$. Sestrojte trojúhelník $ABC$, jsou-li dány délky výšek $v_a$ na stranu $a$ a $v_b$ na stranu $b$.

8. Sestrojte tětivový čtyřúhelník $ABCD$, je-li dáno: $a = AB, b = BC, c = CD, \alpha = \sphericalangle DAB$. Proveďte náčrt a rozbor, postup konstrukce, konstrukci a diskuzi existence a počtu řešení.

9. Proveďte **náčrt, rozbor a diskuzi** konstrukční úlohy: V rovině je dána přímka $p$, kružnice $k$ a bod $M$. Sestrojte kosočtverec nebo čtverec $ABCD$ tak, aby jeho úhlopříčka $AC$ byla částí přímky $p$, bod $M$ byl středem strany $BC$ a aby bod $B$ ležel na kružnici $k$.

10. Proveďte **náčrt, rozbor a diskuzi** konstrukční úlohy: V rovině je dána úsečka $AB$ a kružnice $k(S, r)$. Sestrojte rovnoběžník $ABCD$ tak, aby body $C$ a $D$ ležely na kružnici $k$.

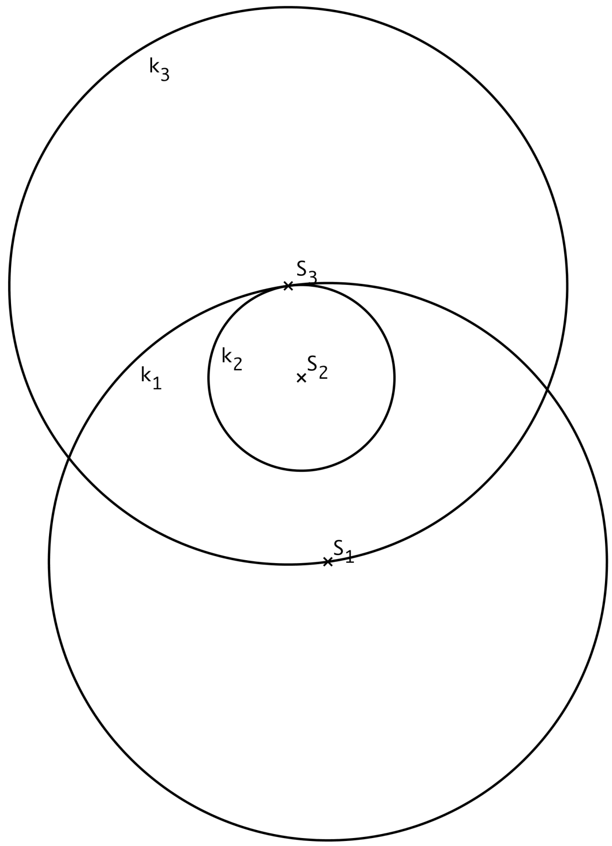
11. Zkonstruujte pravidelný pětiúhelník, zdůvodněte konstrukci a popište její postup.

12. Řešte Apolloniovu úlohu Bpp, t.j. najděte kruhový útvar dotýkajíci se přímek $p, q, p \nparallel q$ a procházející bodem $A, A \notin p, q$. Konstrukci odůvodněte v rozboru a udělejte diskuzi vzhledem k zadaným parametrům.

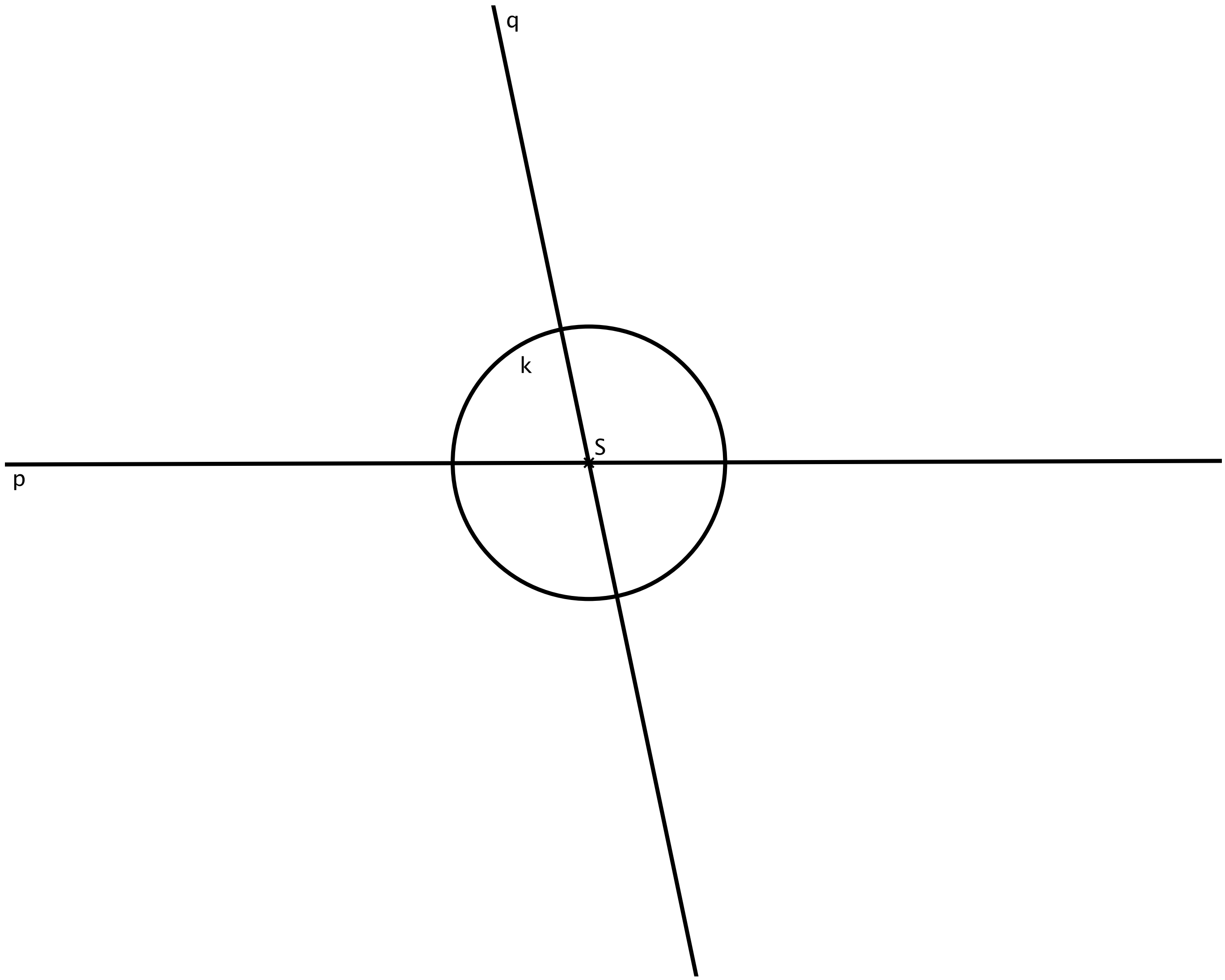
13. Řešte Apolloniovu úlohu $BBk$ pro body $A, B$ a kružnici $k(S, r)$. Určete počet řešení vzhledem k vzájemným polohám objektů. Pro volbu bodů $A, B$ uvnitř kruhu $k$ udělejte náčrt a rozbor s hlavními body konstrukce a proveďte konstrukci.

14. Vyřešte Apolloniovu úlohu pkk, t.j. najděte kruhový útvar dotýkajíci se přímky $p$ a kružnic $k(S_k, r_k), l(S_l, r_l)$, pro $S_k \neq S_l; r_k = r_l$. Nápověda: využijte buď dilataci, nebo kruhovou inverzi. Konstrukci odůvodněte v rozboru a udělejte diskuzi vzhledem k zadaným parametrům.

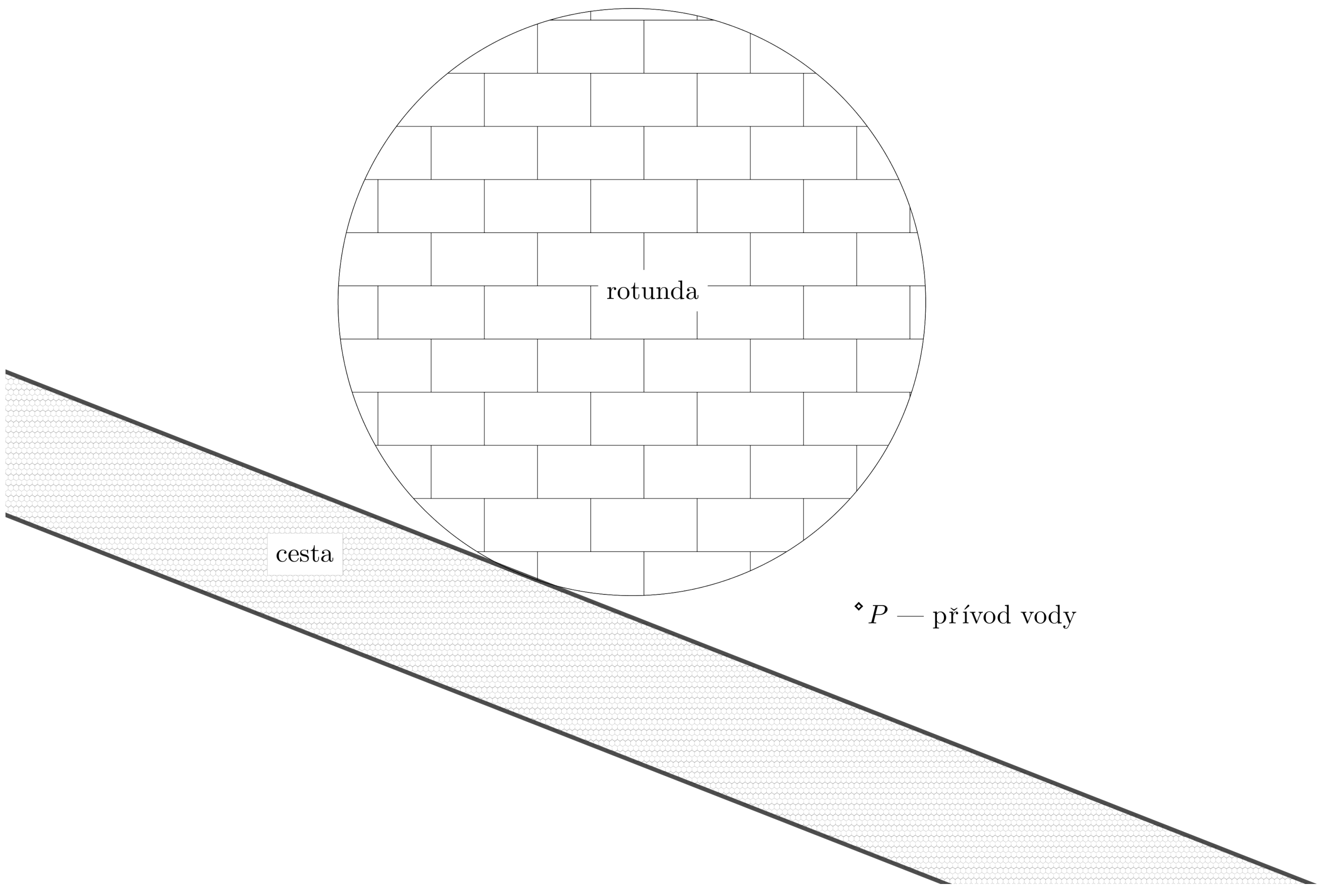
15. Řešte Apolloniovu úlohu $kkk$ pro kružnice $k_1(S_1, r_1)$; $k_2(S_2, r_2)$; $k_3(S_3, r_3)$. Kružnice $k_1$ a $k_2$ mají vnitřní dotyk v bodě $S_3$.



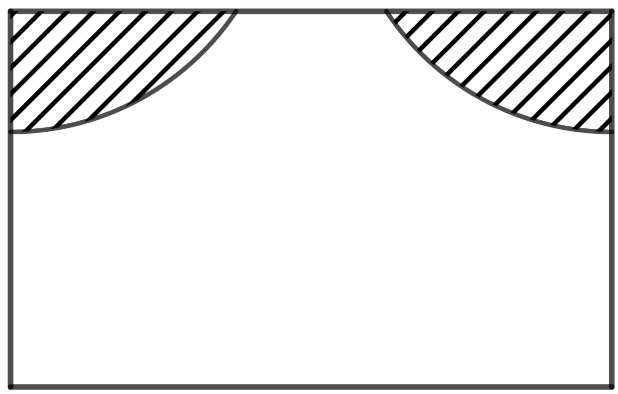
16. Řešte Apolloniovu úlohu $ppk$ pro přímky $p, q$ a kružnici $k(S, r)$. Přímky $p$ a $q$ se protínají v bodě $S$.



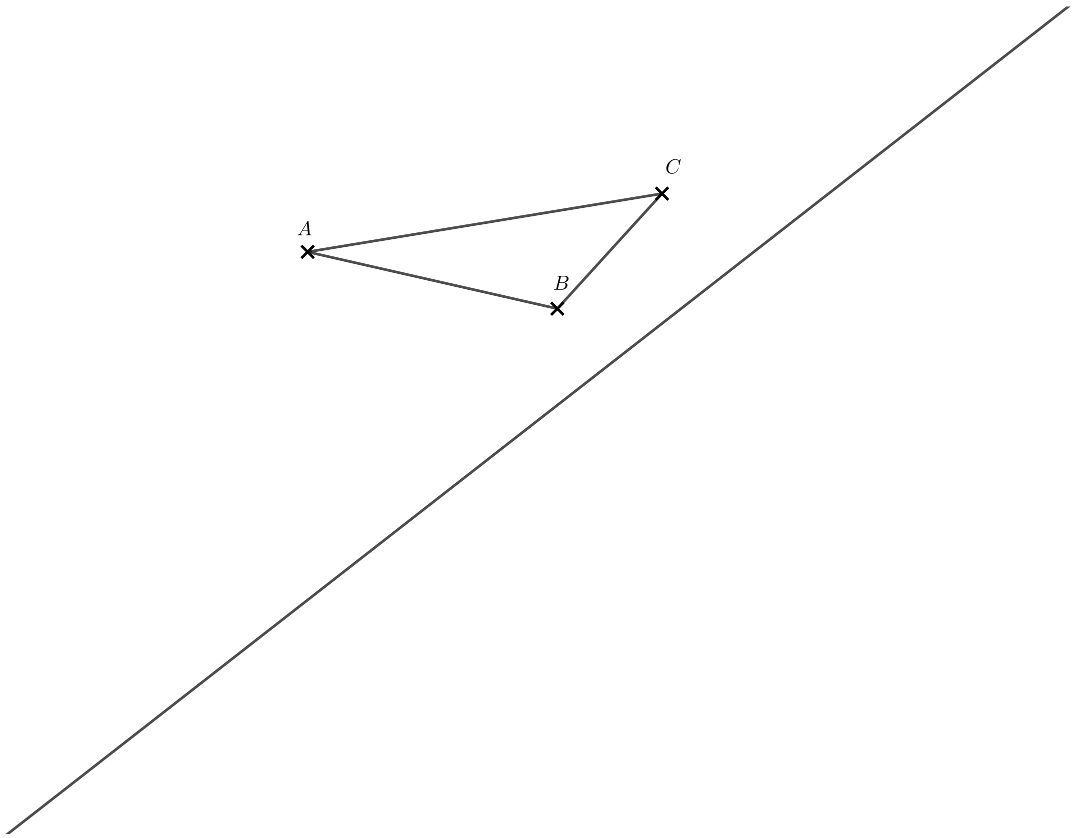
17. Na obrázku je plán parku v němž je rotunda s kruhovým půdorysem a rovný chodník, jež se rotundy okrajem dotýká. Doplňte do plánu nákres kruhového jezera, na jehož hranici leží bod přívodu vody ($P$) a dotýkajícího se okraje chodníku a půdorysu rotundy. Na vedlejší papír udělejte náčrt a rozbor s hlavními body konstrukce. Do zadání proveďte konstrukci všech řešení takových, aby rotunda neležela uvnitř jezera.



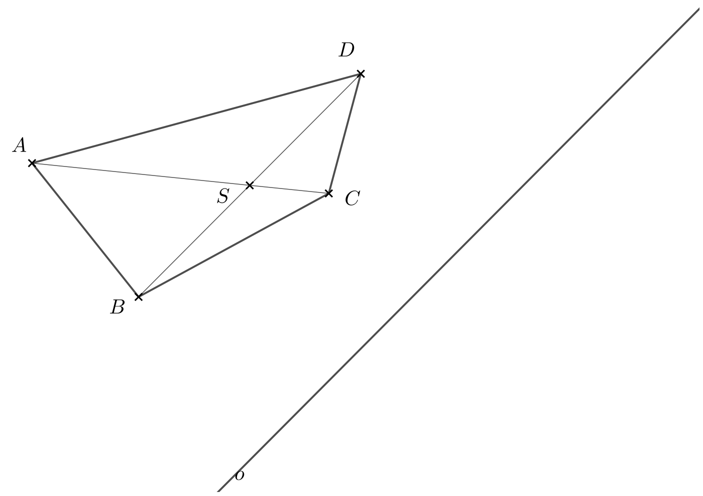
18. Měsíc byl tu noc v úplňku. Mladý student geometrie dojížděl na zkoušku nočním vlakem. Po zopakování si všech typů Apolloniových úloh se podíval do okna svého kupé, ve kterém se obrys měsíce dotýkal spodního okraje okna a současně obou částečně odhrnutých závěsů tvořících kružnicové oblouky. Sestrojte všechny možnosti obrysu kruhového měsíce tak, aby ho bylo v okně celý vidět.
Udělejte náčrt a rozbor s hlavními body konstrukce.



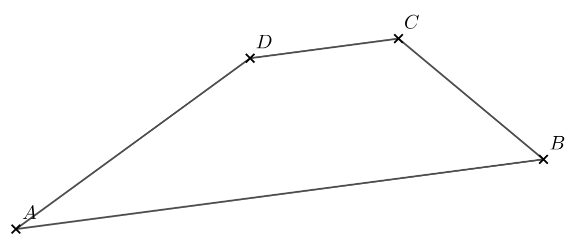
19. V rovině je dán trojúhelník $\triangle ABC$ a přímka $o$ podle obrázku. Určete směr osové afinity s osou $o$, která zobrazí trojúhelník $\triangle ABC$ na trojúhelník $\triangle A'B'C'$, v němž $|\sphericalangle C'A'B'| : |\sphericalangle A'B'C'| : |\sphericalangle B'C'A'| = 1 : 2 : 3$. Uveďte všechna řešení. **Konstrukci proveďte do zadání.**



20. V rovině je dán čtyřúhelník $ABCD$ v němž úhlopříčka $AC$ půlí úhlopříčku $BD$, podle obrázku. V elaci s osou $o$ rovnoběžnou s přímkou $BD$ sestrojte deltoid $A'B'C'D'$, který je obrazem čtyřúhelníku $ABCD$. **Konstrukci proveďte do zadání.**




21. V rovině je dán lichoběžník $ABCD$ podle obrázku. Označme $E$ průsečík přímek $BC \cap AD$ a $F$ průsečík úhlopříček $AC \cap BD$. Dourčete směr osové afinity s osou $EF$ a charakteristikou $k = -1$ a sestrojte obraz lichoběžníku $ABCD$ tak, aby se zobrazil na rovnoramenný lichoběžník $A'B'C'D'$. **Konstrukci proveďte do zadání.**




## Příklady na užití vět a zobrazení

22. Určete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku jehož vrcholy leží na ciferníku hodin na cifrách 2, 7 a 11.

23. Je dána kružnice $k$ o poloměru $r = 6cm$ a bod $X$. Z bodu $X$ vedeme libovolnou sečnu kružnice $k$, která ji protne v bodech $A, B$. Nad delší z úseček $\overline{AX}, \overline{BX}$ sestrojíme obdélník o stranách $\overline{AX} \times \overline{BX}$. Jaký má obdélník obsah, pokud je $|XS| = 10cm$?

24. Jsou dány nesoustředné kružnice $k_1, k_2$ a přímka $p$. Najděte na přímce $p$ bod $X$ tak, aby $|XT_1| = |XT_2|$, kde $T_1, T_2$ jsou dotykové body tečen vedených z bodu $X$ ke kružnicím $k_1, k_2$.

25. Popište a zdůvodněte alespoň 3 různé konstrukce tečny ke kružnici daným bodem.

26. Vypočítejte obvod pravoúhlého trojúhelníku, je-li dán poloměr kružnice opsané $r = 5$ a poloměr kružnice vepsané $\rho = 2$ tomuto trojúhelníku.

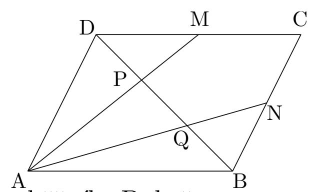
27. Tečny kružnice o poloměru $r$ svírají úhel velikosti $108°$. Určete délky oblouků vymezených dotykovými body daných tečen.

28. Je dán čtverec $ABCD$ o straně délky $10cm$. Čtvrťkružnice o středech $A, B, C$ a $D$ a poloměru $10cm$ rozdělí čtverec $ABCD$ na 9 částí. Vypočtěte jejich obsahy.

29. Na obdélnikovém kulečníkovém stole jsou bílá a černá koule. Určete směr, ve kterém je potřeba posunout bílou kouli, aby narazila do černé a před tím se odrazila od a) jedné, b) dvou, c) tří stěn.

30. Doplňte rovnostranný trojúhelník tak, aby výsledný útvar byl středově souměrný a měl co nejmenší obsah.

31. V rovnoběžníku $ABCD$ jsou $M$ a $N$ po řadě středy stran $DC$ a $BC$. Dokažte, že úsečky $\overline{AM}$ a $\overline{AN}$ dělí úhlopříčku $BD$ v bodech $P, Q$ na tři shodné části, viz obrázek.




32. Středy stran libovolného čtyřúhelníku tvoří rovnoběžník. Dokažte.

33. Obě úhlopříčky rozdělují lichoběžník na čtyři trojúhelníky. Vyjádřete jejich obsahy pomocí základen $a, c$ a výšky $v$.

34. Průsečík úhlopříček lichoběžníku leží na těžnici trojúhelníku, který vznikne prodloužením jeho nerovnoběžných stran. Dokažte.

35. V rovině je dán lichoběžník $ABCD$ se základnou $AB$ a přímka $p$ rovnoběžná s $\overleftrightarrow{AB}$. Označme průsečíky: $\overleftrightarrow{AD} \cap p = E$; $\overleftrightarrow{AC} \cap p = F$; $\overleftrightarrow{BC} \cap p = G$; $\overleftrightarrow{BD} \cap p = H$. Dokažte, že $|EF| = |GH|$.

36. Určete obsah bicentrického čtyřúhelníku.

37. Je dán půlkruh nad průměrem $A_2B_2$ a konvexní čtyřúhelník $K_1L_1M_1N_1$. Sestrojte čtyřúhelník $K_2L_2M_2N_2$ podobný čtyřúhelníku $K_1L_1M_1N_1$ tak, aby jeho vrcholy $K_2L_2$ ležely na průměru $A_2B_2$ a vrcholy $M_2N_2$ na kružnici ohraničující půlkruh.

38. Dokažte, že úhlopříčky v konvexním čtyřúhelníku o stranách $a, b, c, d$ jsou na sebe kolmé právě tehdy, když je $a^2+c^2 = b^2+d^2$.

39. V rovině je dán čtyřúhelník $ABCD$, ve kterém platí $|AB| = |BC| = x$ a $|CD| = |DA| = y$. Určete nutnou podmínku pro to, aby jeho obsah byl $S = xy$. Své tvrzení zdůvodněte.

40. Máme za úkol pletivem vymezit pozemek ve tvaru pravoúhelníku tak, že jednu stranu pozemku tvoří (rovná) zeď vedlejšího pozemku. Jaké mají být rozměry pozemku, aby jeho plocha byla co největší, máme-li k dispozici 36m pletiva?

41. Je dán lichoběžník $ABCD$, v němž je $|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle ABC| = 90°$. Středy základen $AB$ a $CD$ jsou po řadě $M$ a $N$. Určete délku úsečky $MN$, je-li $|AB| = a$ a $|CD| = c$.

42. Je dán lichoběžník $ABCD$, v němž je $|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle ABC| = 90°$. Středy základen $AB$ a $CD$ jsou po řadě $M$ a $N$. Určete délku úsečky $MN$, je-li $|AB| = a$ a $|CD| = c$.

43. Na úhlopříčce obdélníku určete bod, který po spojení úsečkami se třemi jeho vrcholy, rozdělí obdélník na tři útvary o shodném obsahu.

44. Je dán pětiúhelník, jehož vnitřní úhly jsou shodné a po sobě následující strany mají délky 2,3 a 4. Určete délky zbývajících stran.

45. Pravidelný mnohoúhelník vepsaný kružnici poloměru $r$ má 20 úhlopříček. Určete jeho obsah.

46. Dokažte, že obsah pravidelného osmiúhelníku je roven součinu nejkratší a nejdelší jeho úhlopříčky.

47. Je dán $\triangle ABC$.

(a) Sestrojte jeho obraz v kruhové inverzi, kde řídicí kružnice, je kružnice trojúhelníku vepsaná.
(b) Sestrojte dále obraz kružnice opsané v dané kruhové inverzi.
(c) Určete poloměry kružnic, které jsou obrazy přímek $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AC}$ a kružnice opsané $\triangle ABC$.

48. Stereografická projekce v rovině je zobrazení, ve kterém se z bodu na kružnici promítají body dané kružnice na nějakou přímku (neprocházející bodem promítání) v rovině.
Nechť je dána řídicí kružnice $z(S, r)$ a přímka $p$ procházející středem $S$. Krajní body průměru kružnice $z$ kolmého k přímce $p$ označme $A, B$. Na kružnici zvolme libovolný bod $P_0 \neq A, B$ a sestrojme jeho obrazy $P, P'$ v stereografických projekcích kružnice $z$ z bodů $A, B$ na přímku $p$. Dokažte, že body $P, P'$ tvoří odpovídající si pár v kruhové inverzi s řídicí kružnicí $z$.

49. Je dána řídicí kružnice $z(S, r)$. Pro libovolný bod $X \neq S, x \notin z$ a jeho obraz $X'$ v kruhové inverzi podle $z$ určete dvojpoměr $(A, B; X, X')$, kde body $A$ a $B$ jsou průsečíky přímky $\overleftrightarrow{XX'}$ a kružnice $z$.
Pozn. pozor na orientaci v definici dvojpoměru.

50. Jsou dány soustředné kružnice $k_1$ a $k_2$. Diskutujte vzájemné vztahy obrazů těchto kružnic při různých volbách kruhové inverze.

51. V rovině je dána kružnice se středem $S$ o poloměru $r$ a její vnější bod $A$. Vyjádřete vzdálenost dotykových bodů tečen vedených z bodu $A$ ke kružnici $k$.

52. V rovině je dán rovnostranný trojúhelník o délce strany $a$. Určete, v jakém poměru jsou obvody: kružnice opsané; kružnice vepsané; a útvaru, který je obrazem stran daného trojúhelníku v kruhové inverzi podle kružnice jemu vepsané.

53. V rovině je dán tětivový lichoběžník, jehož základna $\overline{AB}$ dané délky $a$ je průměrem kružnice opsané. Délka kratší základny je polovinou délky delší základny. Určete součet délek obrazů stran $BC, CD$ a $DA$ v kruhové inverzi podle kružnice lichoběžníku opsané.

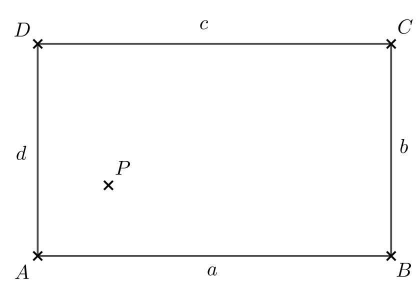
54. V rovině jsou dány kružnice $k_1, k_2$ o různých poloměrech protínající se ve dvou různých bodech $A, B$. Body $A, B$ veďme rovnoběžné přímky $a, b$, které jsou sečnami obou kružnic v bodech $C, D, E, F$. Dokažte, že $CDEF$ jsou vrcholy rovnoběžníku.

55. V rovině je dán čtverec $\square ABCD$. Dokažte, že délka obrazu úhlopříčky čtverce v kruhové inverzi podle kružnice čtverci vepsané je polovinou délky původní úhlopříčky.

56. (a) Určete, co musí platit pro čtyřúhelník, aby středy jeho stran byly vrcholy čtverce. Své tvrzení dokažte.
(b) Existuje nekonvexní čtyřúhelník, který splňuje vlastnost uvedenou v (a)?
V případě, že ano, narýsujte jej.
V případě, že ne, tak odpověď zdůvodněte.

57. Kružnice $k_1$ a $k_2$ s vnějším dotykem v bodu $A$ mají poloměry $r_1 = 4$ a $r_2 = 2$. Společná tečna obou kružnic, neprocházející bodem $A$ se dotkne $k_1$ a $k_2$ v bodech $B$ a $C$. Určete poloměr kružnice opsané trojúhelníku $\triangle ABC$.

58. Na obrázku je biliardový stůl ve tvaru obdélníku $ABCD$ a bod $P$, v němž je umístěna koule.



(a) Určete, zda je možné, aby koule po odrazu jenom od horní a pravé stěny prošla znovu bodem $P$. Své tvrzení zdůvodněte.

(b) Uvažujme, že koule po odrazu od horní stěny v bodě $M$, od pravé stěny v bodě $N$ a od spodní stěny v bodě $O$ projde původním bodem $P$. Určete typ čtyřúhelníku $MNOP$ a své tvrzení zdůvodněte.

Pozn. předpokládáme, že koule se od stěn stolu dokonale odráží, neztrácí svoji rychlost a nepodléhá působení boční rotace.

59. V rovině je dán trojúhelník $\triangle ABC$ a kružnice $k$, která prochází bodem $B$ a protíná přímku $\overline{AB}$ v bodě $D$, přičemž $|\sphericalangle ADC| = 90°$. Dále označme $T$ bod dotyku tečny vedené z bodu $A$ ke kružnici $k$. Dokažte, že pokud je trojúhelník $\triangle ABC$ pravoúhlý pak $|AC| = |AT|$. Zdůvodněte, zda platí obrácená implikace?

60. V rovině je dán čtyřúhelník $ABCD$. Označme $E$ průsečík přímek $BC \cap AD$ a $F$ průsečík os stran $BC$ a $AD$. Dokažte, že když $ABCD$ je lichoběžník, kde $AB \parallel CD$, tak body $E, F$ a středy stran $BC$ a $AD$ leží na společné kružnici. Dále zdůvodněte, zda platí obrácená implikace?

61. V rovině je dán kosočtverec $ABCD$. Osy stran kosočtverce tvoří čtyřúhelník $KLMN$. Dokažte, že čtyřúhelníku $KLMN$ lze vepsat kružnici.

62. V rovině je dán trojúhelník $\triangle ABC$ a kružnice $k$, která prochází bodem $B$ a protíná přímku $\overline{AB}$ v bodě $D$, přičemž $|\sphericalangle ADC| = 90°$. Dále označme $T$ bod dotyku tečny vedené z bodu $A$ ke kružnici $k$. Dokažte, že pokud je trojúhelník $\triangle ABC$ pravoúhlý pak $|AC| = |AT|$. Zdůvodněte, zda platí obrácená implikace?

63. Lichoběžníku lze opsat kružnici právě tehdy, když jsou jeho úhlopříčky shodné. Dokažte.

## Množiny bodů

64. Určete množinu všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od

(a) dvou různých pevných bodů v rovině.

(b) tří různých pevných bodů v rovině.

65. V rovině jsou dány různé body $A, B$. V závislosti na parametru $k \in \mathbb{R}$ sestrojte množinu všech bodů $X$, pro které platí:

(a) $|AX| + |BX| = k$.

(b) $|AX| - |BX| = k$.

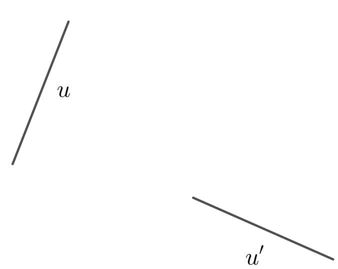
(c) $|AX| * |BX| = k$.

(d) $|AX|/|BX| = k$ (s důkazem dle materiálů) .

66. V rovině je dána přímka $d$ a bod $F$, který na ní neleží. Sestrojte množinu všech bodů $X$ pro které platí $|FX| = |X, d|$

67. Určete množinu všech bodů, které mají stejnou mocnost od dvou různých nesoustředných kružnic v rovině.

68. V rovině jsou dány shodné úsečky $u, u'$ podle obrázku. Určete všechny nepřímé shodnosti, které zobrazí $u$ na $u'$. Dohledejte charakteristické prvky těchto shodností, tj. osy, směr a velikost posunutí, střed apod., (dle typu shodnosti).



69. Je dána kružnice $k$ se středem v bodě $S$ a poloměrem $r$ a její tečna $t$ dotýkající se $k$ v bodě $T$. Na tečně $t$ zvolme bod $P \neq T$ a veďme přímku $\overleftrightarrow{PS}$, která protne kružnici $k$ v bodech $A$ a $B$.

a) Na přímce $\overleftrightarrow{PS}$ určete body $Q \neq P$ takové, že pro mocnosti bodů $Q$ a $P$ ke kružnici $k$ platí

$$\mu(P, k) = -\mu(Q, k).$$

b) Dokažte, že pro poměry obsahů trojúhelníků platí vztah

$$\frac{S_{APT}}{S_{BPT}} = \frac{S_{AQT}}{S_{BQT}}.$$

70. V rovině je dána jednotková kružnice k se středem v počátku a na ní body $A[-1, 0]$ a $B[0, 1]$. Na kružnici zvolme libovolný bod $M$ různý od $A$ a $B$ a na polopřímce $\overrightarrow{BM}$ sestrojme bod $C$ různý od $B$ tak, aby $|BM| = |CM|$. Bod $C$ spojme se středem $O$ tětivy $\overline{AB}$. Určete množinu všech průsečíků $P$ přímek $AM$ a $CO$, jestliže se bod $M$ pohybuje po kružnici $k$.

71. V rovině jsou dány bod $B$ a přímka $p$, kde $B \notin p$. Popište konstrukci množiny všech bodů $X$, pro které platí:

$$\frac{|BX|}{|p, X|} = \frac{2}{3}$$

(kde $|p, X|$ značí vzdálenost bodu od přímky). Sestrojte alespoň 10 různých bodů této množiny a zbytek množiny načrtněte.

72. V rovině jsou dány bod $B$ a přímka $p$, kde $B \notin p$. Popište konstrukci množiny všech bodů $X$, pro které platí:

$$\frac{|BX|}{|p, X|} = \frac{2}{3}$$

(kde $|p, X|$ značí vzdálenost bodu od přímky). Sestrojte alespoň 10 různých bodů této množiny a zbytek množiny načrtněte.

73. V rovině jsou dány bod $B$ a přímka $p$, kde $B \notin p$. Popište konstrukci množiny všech bodů $X$, pro které platí:

$$\frac{|BX|}{|p, X|} = \frac{3}{2}$$

(kde $|p, X|$ značí vzdálenost bodu od přímky). Sestrojte alespoň 10 různých bodů této množiny a zbytek množiny načrtněte.

74. V rovině jsou dány body $A, B, C$ na přímce tak, že $(BA; C) = \dfrac{1}{4}$. Určete množinu všech bodů $X$ pro které platí podmínka:

$$\sphericalangle AXB = \sphericalangle BXC.$$

(a) Sestrojte alespoň 6 bodů dané množiny.

(b) Dokažte, že množina, kterou jste určili je ekvivalentní dané podmínce.