

Planimetrie

ZS 2023/24

2. série domácích úkolů
termín odevzdání 31.12.2023

Příklady jsou rozděleny do tří skupin. Pro splnění domácího úkolu je nutno odevzdat 4 příklady za podmínky, že z každé skupiny vypracujete alespoň jeden. Odevzdávejte, prosím, **právě 4 příklady**. Ostatní si klidně udělejte jako doporučené cvičení. Opakujete-li předmět, odevzdejte jiné příklady než minule.

Řešení odevzdávejte do moodle jako jeden soubor **ve formátu .pdf**: buďto čitelně napsané + výrazně narýsované + kvalitně naskenované, nebo vypracováno v nějakém textovém (např. \LaTeX , nebo MS Word) a grafickém editoru (např. GeoGebra).

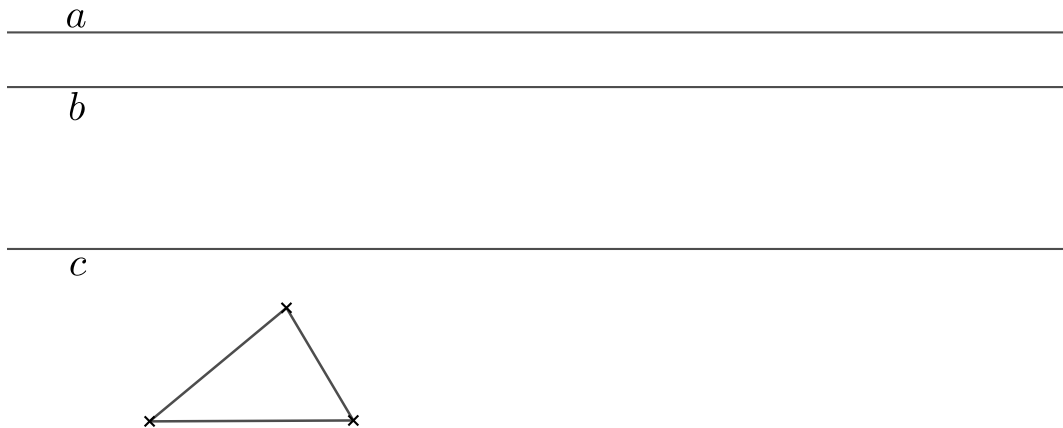
Pozn. 1.: Máte-li problém se značením a diskuzi u rýsovacích příkladů, použijte pro jednotnost učebnici P. Leischner: Metody řešení planimetrických úloh.

Pozn. 2.: Najdete-li chybu, neváhejte mi napsat, může to ušetřit tápání Vašich kolegů.

Pozn. 3: Sloučení skenu do .pdf je součástí běžně dostupného softwaru, obvykle postačuje kvalita 200-300dpi. Další možnost je použít fakultní počítače v R319, na kterých je nainstalována verze Adobe Acrobat Pro, ve které je možné vytvořit sloučené .pdf z různých vstupních souborů (obrázky, dokumenty). V MacOS je možné jednoduše použít ke stejnému účelu zabudovaný program Preview. Další možností jsou online aplikace zdarma (obvykle nástroj merge pdf).

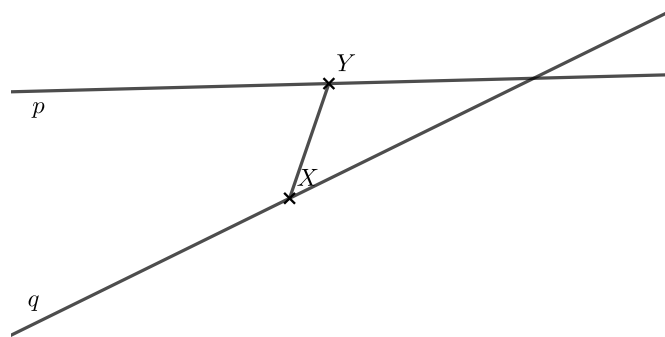
Rýsování

- Sestrojte trojúhelník a udělejte diskuzi řešitelnosti a počtu řešení, jsou-li dány
 - délky dvou stran a velikost úhlu proti delší z nich
 - délky dvou stran a velikost úhlu proti kratší z nich
- V rovině jsou dány rovnoběžné přímky a, b, c a trojúhelník dle obrázku. Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$ podobný zadanému trojúhelníku, jehož vrcholy leží na rovnoběžkách, přičemž každý vrchol leží na jiné přímce. Konstrukci proveďte do zadání.

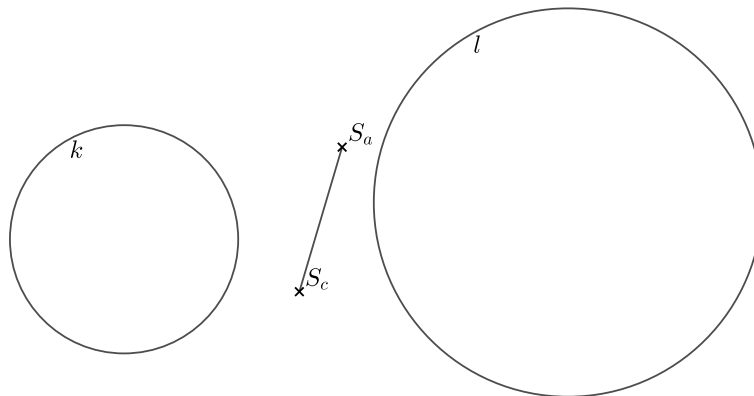


- Sestrojte $\triangle ABC$ jsou-li dány velikosti úhlů α, β a obvod o .
- Sestrojte $\triangle ABC$ je-li dána délka výšky $v_c = 5$ a poměr stran $a : b : c = 2 : 3 : 4$.

5. Je dán $\triangle ABC$, sestrojte čtverec $KLMN$, jehož strana KL leží na přímce \overleftrightarrow{AB} , bod M na straně a a bod N na straně b .
6. Je dán čtverec $\square KLMN$. Sestrojte rovnostranný trojúhelník $\triangle KXY$ vepsaný do čtverce $\square KLMN$.
7. Je dána přímka p a dvě nesoustředné kružnice $k_1(S_1, r_1), k_2(S_2, r_2)$. Ved'te přímku q rovnoběžnou s přímkou p tak, aby na ní kružnice k_1, k_2 vytínaly shodné tětivy.
8. Je dána přímka p , délka úsečky d a dva různé body A a B . Sestrojte nejkratší cestu z A do B tak, aby se po přímce p ušla délka d .
9. Sestrojte $\triangle ABC$ jsou-li dány délky těžnic.
10. Jsou dány kružnice k_1, k_2 . Sestrojte rovnostranný trojúhelník $\triangle ABC$ tak, aby $A, B \in k_1$ a $C \in k_2$.
11. Jsou dány tři nekolineární body A, B, S . Sestrojte čtverec $\square MNPQ$ se středem S tak, aby přímka \overline{MN} procházela bodem A a přímka \overline{PQ} bodem B .
12. Sestrojte $\triangle ABC$ jsou-li dány délky stran b a c a délka těžnice t_a .
13. V rovině jsou dány různoběžky p, q a úsečka \overline{XY} podle obrázku. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník $\triangle ABC$ se základnou c a úhlem $\gamma = 30^\circ$ tak, aby vrchol C ležel na úsečce \overline{XY} a vrcholy A, B na množině bodů tvořené přímkami p, q .

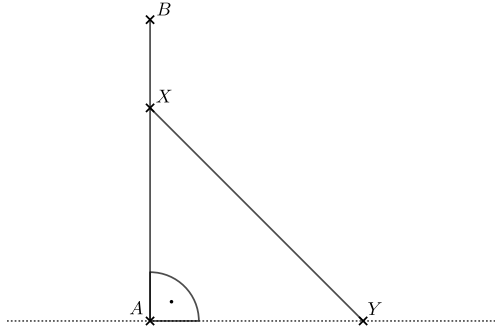


14. V rovině jsou dány kružnice k, l a úsečka $S_a S_c$ dle obrázku. Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$ se střední příčkou $S_a S_c$ (S_a je střed strany a , S_c střed strany c) jehož dva vrcholy leží na kružnicích k a l . Konstrukci proved'te do zadání.



15. V rovině jsou dány shodné úsečky \overline{AB} a \overline{XY} dle obrázku.

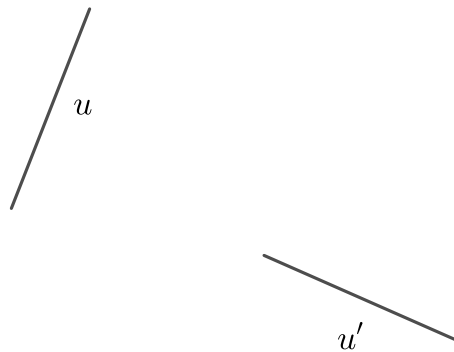
- Určete všechna shodná zobrazení v rovině, ve kterých se úsečka \overline{AB} zobrazí na úsečku \overline{XY} (nezáleží na pořadí bodů). Popište charakteristické prvky zobrazení, určete jejich samodružné body a samodružné směry.
- Je-li to možné, uveďte nějaký rozklad alespoň jedné shodnosti z a) na osové souměrnosti. V případě, že to možné není, uveďte proč.
- Nechť je dále dána úsečka $\overline{A'B'}$, která je obrazem úsečky \overline{AB} ve středové souměrnosti. Středem souměrnosti je střed úsečky \overline{XY} . Sestrojte střed a určete velikost úhlu otočení, které převádí úsečku \overline{XY} na úsečku $\overline{A'B'}$.



16. (Zobecnění předešlé) Jsou dány shodné úsečky \overline{AB} a \overline{XY} . Najděte pro různé polohy úseček všechny shodnosti, které zobrazí \overline{AB} na \overline{XY} .

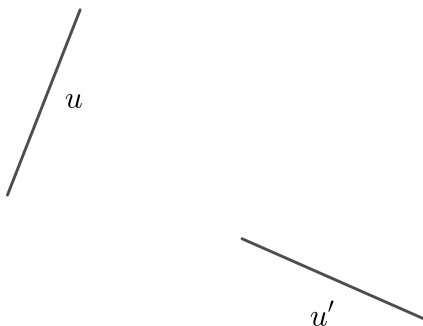
17. V rovině jsou dány: kružnice k_{BD} a bod C svojí polohou. Sestrojte čtverec $ABCD$ jehož vrcholy B a D leží na kružnici k . Proveďte náčrt a rozbor, postup konstrukce a konstrukci, diskuzi existence a počtu řešení.

18. V rovině jsou dány shodné úsečky u, u' podle obrázku. Určete všechny nepřímé shodnosti, které zobrazí u na u' . Dohledejte charakteristické prvky těchto shodností, tj. osy, směr a velikost posunutí, střed apod., (dle typu shodnosti).



19. Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$ kde $a : b : c = 4 : 2 : 3$ a velikost poloměru jedné z připsaných kružnic je 6cm . Proveďte náčrt a rozbor, postup konstrukce a konstrukci, diskuzi existence a počtu řešení.

20. V rovině jsou dány dvě protínající se kružnice k_1 se středem S_1 a k_2 se středem S_2 , které mají stejný poloměr r . Středem úsečky S_1S_2 ved'te přímkou p tak, aby její průsečíky s kružnicemi k_1 a k_2 byly krajní body tří shodných úseček. Proveďte náčrt a rozbor, postup konstrukce a konstrukci, diskuzi existence a počtu řešení.
21. V rovině jsou dány shodné úsečky u, u' podle obrázku. Určete všechny nepřímé shodnosti, které zobrazí u na u' . Dohledejte charakteristické prvky těchto shodností, tj. osy, směr a velikost posunutí, střed apod., (dle typu shodnosti).



Eukleidovské konstrukce

22. Jsou dány úsečky délek a, b a 1. Popište, načrtněte a uveďte podmínky pro sestrojení úsečky délky (vyberte si 3 podúlohy):

(a) $x = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{5}}}{a}$

(b) $x = b\sqrt{3 - ab} + 2$

(c) $x = \frac{\sqrt{4 + a}}{b - \sqrt{3}}$

(d) $x = \frac{a}{5}\sqrt{3 + b^2}$

(e) $x = \sqrt{a - \frac{7}{b}}$

(f) $x = \left| \frac{b}{2} - \sqrt{b^2 - a^2} \right|$

(g) $x = b\sqrt{3 - ab} + 2$

(h) $x = \frac{\sqrt{4 - a}}{b + \sqrt{3}}$

(i) $x = \frac{a}{5}\sqrt{3 - b^2}$

(j) $x = \sqrt{a + \frac{7}{-b}}$

(k) $x = \frac{b^2 - \sqrt{12}}{a + 1}$

(l) $x = ab + \sqrt{\frac{2}{a} - b}$

(m) $x = \frac{\sqrt{\sqrt{2 + 3} - a}}{b^2}$

(n) $x = 3\sqrt{(a - b)(a + b) + b^2}$

23. Sestrojte do jednoho obrázku aritmetický, geometrický a harmonický průměr úseček a a b a porovnejte je.

Příklady na užití vět

24. Vypočtete velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku $\triangle ABC$, je-li dáno:

$$\begin{aligned} a &= b \\ a\sqrt{3} &= c. \end{aligned}$$

25. Dokažte, že v libovolném trojúhelníku ABC platí

$$a : b : c = \frac{1}{v_a} : \frac{1}{v_b} : \frac{1}{v_c}.$$

26. Vypočítejte délky zbývajících stran a velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC , je-li

(a) $a = 6, 1, b = 7, 2, \alpha = 55^\circ$.

(b) $a = 8, 7, b = 5, 3, \alpha = 85^\circ 35'$.

27. Do čtverce $\square KLMN$ o straně délky a je vepsán rovnostranný trojúhelník $\triangle KXY$. Vypočítejte délku strany rovnostranného trojúhelníku bez použití goniometrických funkcí.

28. V trojúhelníku ABC jsou dány: velikost úhlu $\alpha = 30$, délka strany $b = 4$ a délka strany $c = 3\sqrt{3}$. Určete, jestli je trojúhelník ABC pravoúhlý.

29. Vypočítejte délku základny AB rovnoramenného trojúhelníku ABC , znáte-li délky výšek v_a, v_c .

30. Jestliže v trojúhelníku dělí těžnice a výška k téže straně úhel, z něhož vycházejí, na tři shodné části, pak je trojúhelník pravoúhlý. Dokažte.

31. Je dán trojúhelník $\triangle ABC$ s délkami stran $a = 4, b = 6$ a dále platí $2\alpha = \beta$. Určete délku strany c .

32. Do pravoúhlého trojúhelníku $\triangle ABC$ je vepsán čtverec $\square KLMN$, jehož strana KL leží na přeponě AB (kde K je blíže k A). Dokažte, že $\frac{|AK|}{|KL|} = \frac{|KL|}{|BL|}$.

33. Vypočítejte délky stran a, b v $\triangle ABC$, je-li $a + b = 16, c = 10, \gamma = 60^\circ$.

34. Vypočítejte délku těžnice t_a v $\triangle ABC$, znáte-li délky jeho stran a, b, c .

35. Vyjádřete délky stran pravoúhlého trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C , znáte-li délky těžnic t_a, t_b .

36. V trojúhelníku ABC jsou dány: velikost úhlu $\alpha = 30^\circ$, délka strany $b = 4$ a délka strany $c = 3\sqrt{3}$. Určete, jestli je trojúhelník ABC pravoúhlý.

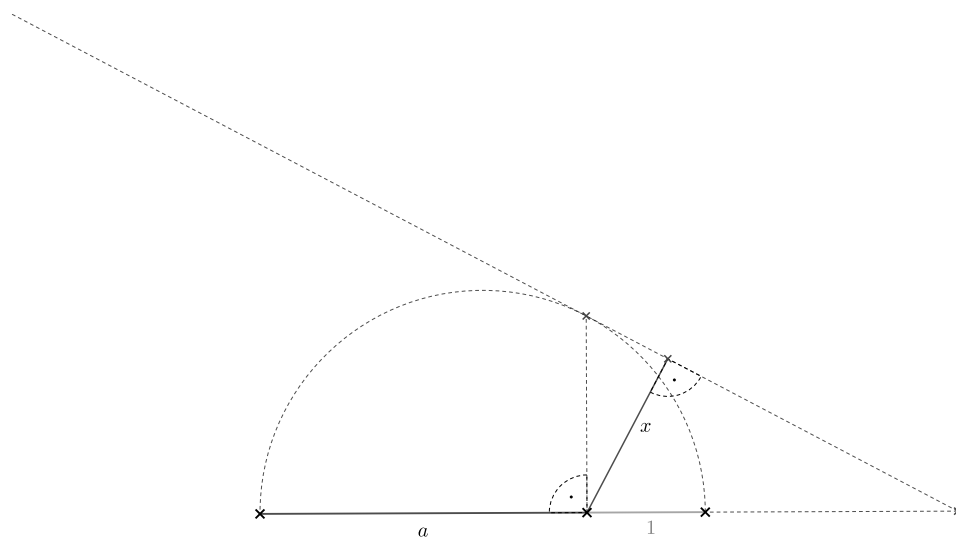
37. V trojúhelníku $\triangle ABC$ označme P patu výšky na stranu c . Nechť $|AP| = 2; |BP| = 1$ a $v_c = \sqrt{2}$. Vypočítejte velikost úhlu γ .

38. Těžnice a výška vedené na přeponu pravoúhlého trojúhelníku svírají úhel velikosti rozdílu ostrých úhlů trojúhelníku. Dokažte.

39. Dokažte, že v libovolném trojúhelníku $\triangle ABC$ platí vztah:

$$\frac{v_b v_c}{a} = \frac{v_a v_c}{b} = \frac{v_a v_b}{c}.$$

40. Váš spolužák provedl konstrukci čísla x pravítkem a kružítkem podle náčrtku níže. Sestrojený oblouk je polokružnicí a polopřímka je její tečna. Jaká je hodnota čísla x v závislosti na a ? Odvoďte bez měření.



41. Váš spolužák provedl konstrukci čísla x pravítkem a kružítkem podle náčrtku níže. Sestrojený oblouk je polokružnicí a polopřímka je její tečna (délka úsečky a je vysunuta pro označení). Jaká je hodnota čísla x v závislosti na a ? Odvoďte bez měření.

