Planimetrie
ZS 2023/24

1. série domácích úkolů
termín odevzdání 26.11.2023

Příklady jsou rozděleny do tří skupin. Pro splnění domácího úkolu je nutno odevzdat 4 příklady za podmínky, že z každé skupiny vypracujete alespoň jeden příklad. Odevzdávejte, prosím, **právě 4 příklady**. Ostatní si klidně udělejte jako doporučené cvičení.

Řešení odevzdávejte do moodle jako jeden soubor **ve formátu .pdf**: buďto čitelně napsané + výrazně narýsované + kvalitně naskenované, nebo vypracováno v nějakém textovém (např. LaTeX, nebo MS Word) a grafickém editoru (např. GeoGebra).

Pozn. 1.: Máte-li problém se značením a diskuzi u rýsovacího příkladu 1), použijte pro jednotnost učebnici P. Leischner: Metody řešení planimetrických úloh.
Pozn. 2.: Najdete-li chybu, neváhejte mi napsat, může to ušetřit tápání Vaších kolegů.
Pozn. 3: Sloučení skenu do .pdf je součastí běžně dostupného softwaru, obyčejně postačuje kvalita 200-300dpi. Další možnost je použít fakultní počítače v R319, na kterých je nainstalována verze Adobe Acrobat Pro, ve které je možné vytvořit sloučené .pdf z různých vstupních souborů (obrázky, dokumenty). V MacOS je možné jednoduše použít ke stejnému účelu zabudovaný program Preview.

Konstrukční úlohy

1. Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, jsou-li dány: .
   (a) Délky strany $a = 8$, těžnice $t_a = 5$, výšky $v_a = 4$.
   (b) Délky strany a, těžnice t_a, výšky v_a.
   (c) Výška v_a délky 4 svojí polohou v rovině. Délky strany $a = 8$ a těžnice $t_a = 5$.
   (d) Vrcholy B, C v rovině, kde $B \neq C$, a délky těžnice t_a a výšky v_a.

   Proveďte náčrt a rozbor, popis konstrukce, konstrukci a diskuzi existence a počtu řešení (včetně ověření správnosti konstrukce).

2. Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, jsou-li dány délky: strany c a těžnic t_a, t_b. Proveďte náčrt a rozbor, popis konstrukce, konstrukci a diskuzi pro různé volby délek c, t_a, t_b.

3. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána kružnice opsaná trojúhelníku ABC a délky stran a a b.

4. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána délka strany a a délky výšek v_a, v_b na strany BC a AC.

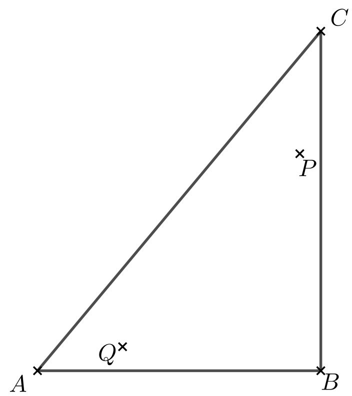
5. Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, jsou-li dány velikosti jeho vnitřních úhlů α a β a délka výšky v_a na stranu a.

6. Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, jsou-li dány velikosti jeho vnitřních úhlů α, β a délka obvodu o.

7. V rovině je dána úsečka BS_b. Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$ s těžnicí $t_b = BS_b$, jsou-li dány délky stran a, c. Řešení se skládá z náčrtu a rozboru, popisu konstrukce, diskuze existence a počtu řešení a narýsování jednoho možného řešení pro Vámi zvolené hodnoty.

8. V rovině je dána přímka p a na ní bod S_a. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dále dána délka strany a, délka těžnice t_a na stranu a a obsah trojúhelníku $S_\triangle$ tak, že strana a se středem S_a leží v přímce p. Řešení se skládá z náčrtu a rozboru, popisu konstrukce, diskuze existence a počtu řešení a narýsování jednoho zvoleného řešení.

9. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník $\triangle KLM$ tak, aby vrcholy K, L, M ležely na hranici pravoúhlého trojúhelníku $\triangle ABC$ a body P, Q byly vnitřními body odvesen trojúhelníku $\triangle KLM$. Trojúhelník $\triangle ABC$ a body P, Q jsou dány obrázkem. Řešení se skládá z náčrtu a rozboru, popisu konstrukce, diskuze existence a počtu řešení a narýsování jednoho zvoleného řešení. Konstrukci proveďte do zadání.

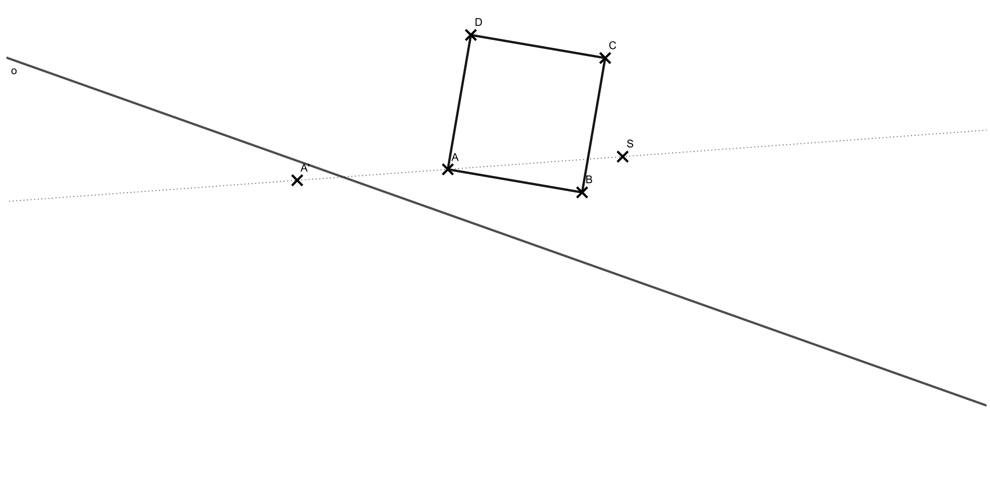


10. V rovině jsou dány tři body K, L a M. Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, jehož kružnice vepsaná se dotýká stran a, b, c v bodech K, L, M (v daném pořadí). Proveďte diskuzi dané úlohy.

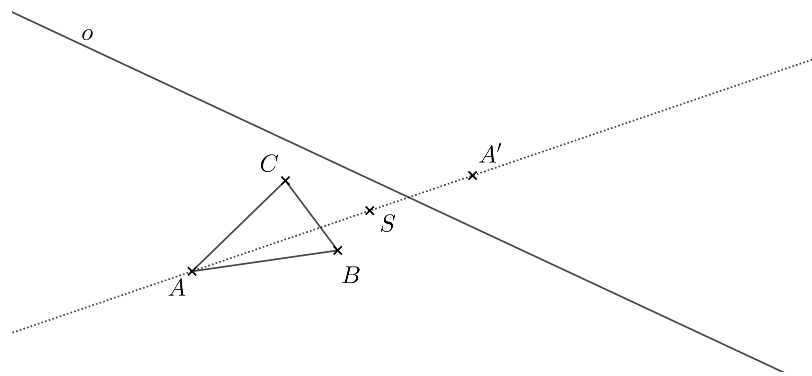
11. Sestrojte trojúhelník KLM, je-li dána délka střední příčky $|S_l S_k| = n$, kde S_l a S_k jsou středy stran l a k, délky těžnic t_k a t_l procházejících body K a L.

12. V libovolném trojúhelníku $\triangle ABC$ sestrojte těžnice $\overline{AS_{BC}}, \overline{BS_{AC}}, \overline{CS_{AB}}$ a těžiště T, výšky $\overline{AA_1}, \overline{BB_1}, \overline{CC_1}$ a ortocentrum V, kružnici k_o opsanou $\triangle ABC$. Označte X, Y, Z středy úseček $\overline{AV}, \overline{BV}, \overline{CV}$. Ověřte (rýsováním, bez důkazu), že $S_{AB}, S_{BC}, S_{AC}, A_1, B_1, C_1, X, Y, Z$ leží na kružnici (Feuerbachova kružnice) a její poloměr je $\frac{1}{2}$ poloměru k_o.

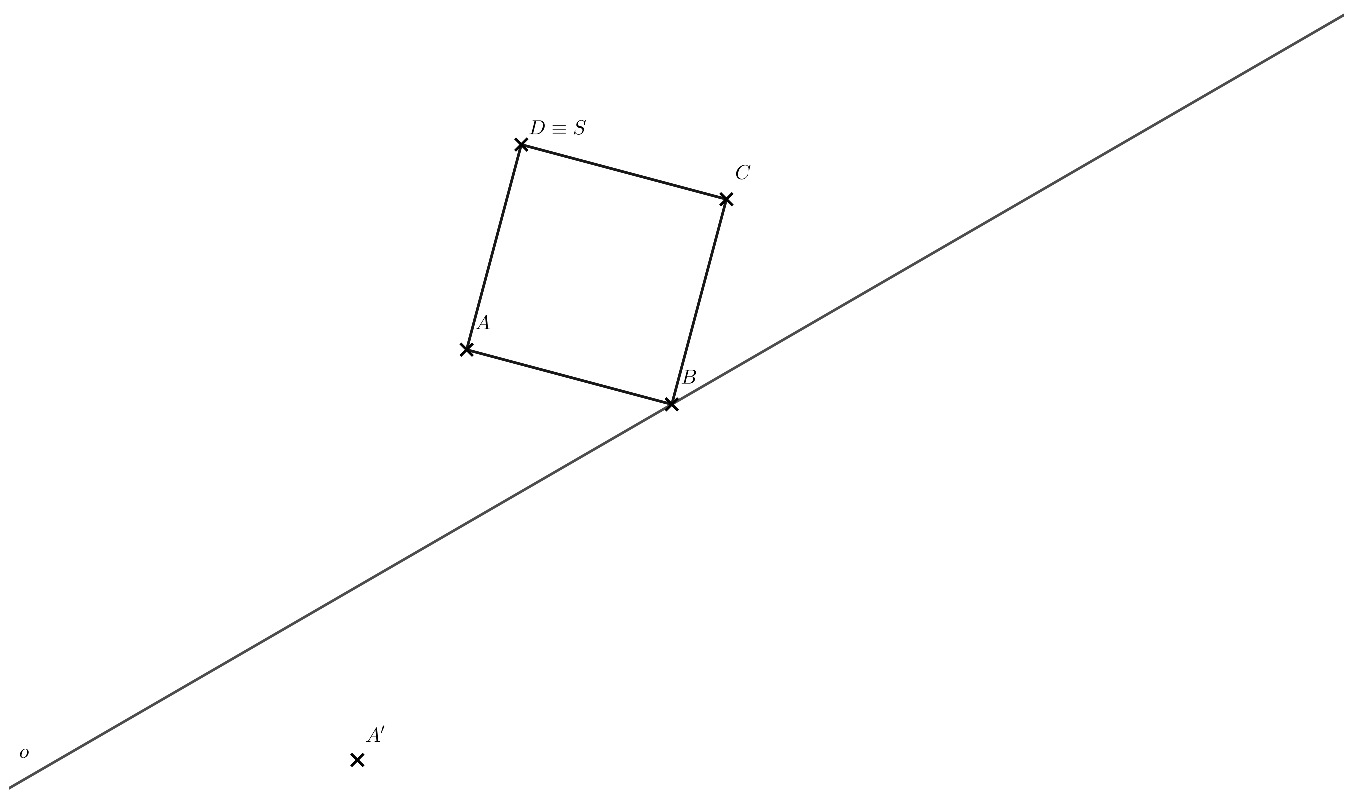
13. V středové kolineaci se středem S, osou o a párem odpovídajících si bodů $A \to A'$ sestrojte obraz čtverce $ABCD$.



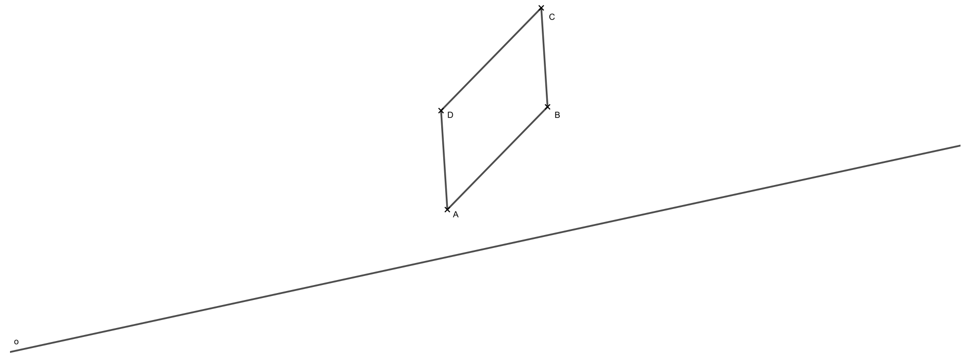
14. Zobrazte trojúhelník ABC v středové kolineaci s osou o, středem S a párem odpovídajících si bodů $A \to A'$. Vyznačte (vyšrafujte) obraz množiny vnitřních bodů trojúhelníku ABC. Konstrukci proveďte do zadání.



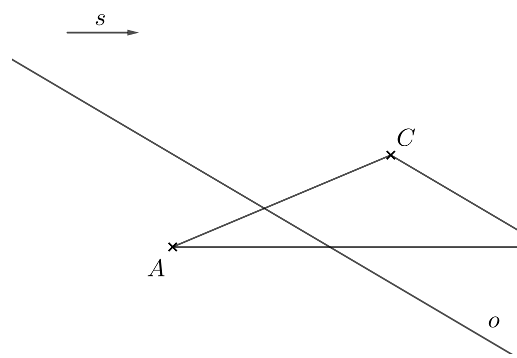
15. V rovině je dán čtverec $\square ABCD$. Sestrojte jeho obraz $\square A'B'C'D'$ ve středové kolineaci se středem S ve vrcholu D, osou o procházející vrcholem B rovnoběžně s AC a daným obrazem bodu A', pro který platí $|A', o| = |A, o|$. Vyznačte (vyšrafujte/vybarvěte) plochu, na kterou se zobrazí vnitřek čtverce. Řešení úlohy stačí správně narýsovat do zadání.



16. Dourčete osovou afinitu tak, aby obrazem rovnoběžníku byl obdélník. (udělejte si vlastní obrázek)



17. Zobrazte trojúhelník ABC v osové afinitě s osou o, směrem s a charakteristikou $k = -\frac{1}{2}$. Konstrukci proveďte do zadání.



18. V rovině je dána úsečka $\overline{BB_1}$ svojí polohou. Sestrojte tupoúhlý trojúhelník $\triangle ABC$ s tupým úhlem u vrcholu C, kde B_1 je pata výšky na stranu b, jsou-li dány délka výšky v_c a velikost úhlu $\gamma \in (90°, 180°)$. Proveďte náčrt a rozbor, postup konstrukce a konstrukci, diskuzi existence a počtu řešení.

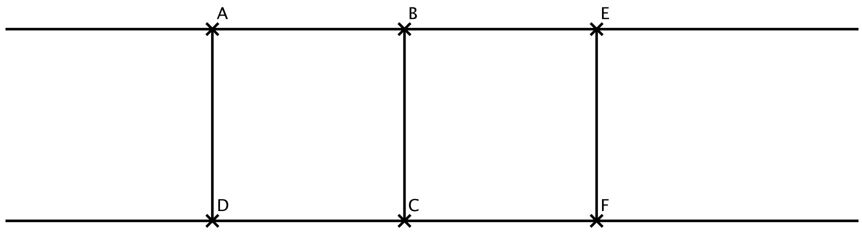
19. Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$ kde $a : b : c = 4 : 2 : 3$ a velikost poloměru jedné z připsaných kružnic je $6cm$. Proveďte náčrt a rozbor, postup konstrukce a konstrukci, diskuzi existence a počtu řešení.

Zobrazení

20. Rozhodněte a zdůvodněte, zda se jedná o zobrazení prostá, určete definiční obor a obor hodnot:
    a) Všem bodům roviny ρ přiřadí jeden pevný bod $A \in \rho$.
    b) Každému bodu roviny ρ je přiřazen jeho kolmý průmět do přímky $p \in \rho$.

21. Jsou dány různoběžky p a q a úsečka AB. Označme f zobrazení množiny bodů úsečky AB do množiny bodů přímky p, kt. každému bodu X z AB přiřadí ten bod Y z p, pro který platí: $X = Y$, nebo $\overline{XY} \| q$. Určete definiční obor a obor hodnot zobrazení f a zjistěte, zda je prosté, anebo na.

22. Jsou dány čtverce $\square ABCD, \square BEFC$ podle obrázku. Určete obraz přímky $\overleftrightarrow{DF}$ v zobrazení $h = g \circ f$, kde f je středové promítání přímky $\overleftrightarrow{DF}$ do lomené čáry ACE, se středem promítání B a g je pravoúhlé promítání lomené čáry ACE do přímky AE.



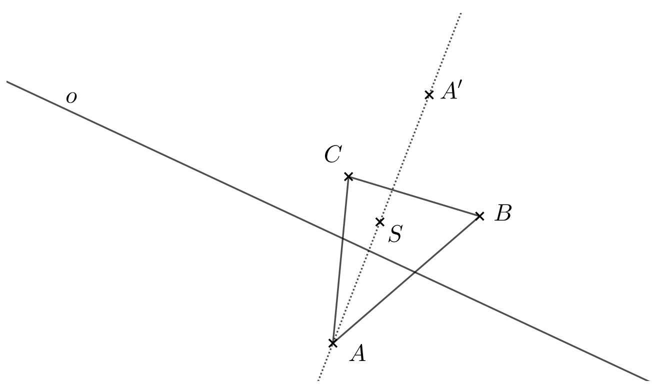
23. Jsou dány dvě různoběžky p a q a bod S, který neleží na žádné z nich. Určete vlastnosti zobrazení (vz. jednoznačné, prosté, na, involutorní,...), které vznikne promítáním přímky p do přímky q ze středu S.

24. Zobrazte rovnostranný trojúhelník v

    (a) osové afinitě s charakteristikou $k = -1$ a směrem různoběžným a ne kolmým k ose

    (b) osové afinitě s charakteristikou $k = -1$ a směrem kolmým k ose

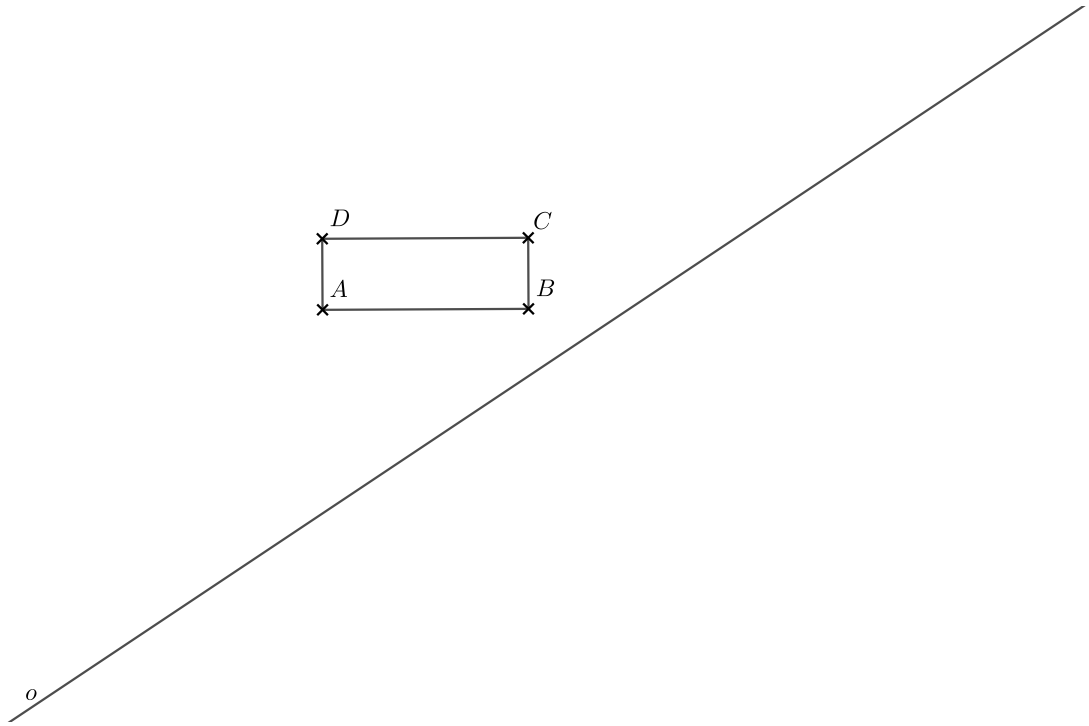
25. Zobrazte trojúhelník ABC v středové kolineaci s osou o, středem S a párem odpovídajících si bodů $A \to A'$. Vyznačte (vyšrafujte) obraz množiny vnitřních bodů trojúhelníku ABC. Konstrukci proveďte do zadání.



26. V rovině je dán obdélník $ABCD$ a přímka o.

    (a) Určete směr osové afinity s osou o, která zobrazí obdélník $ABCD$ na kosočtverec $A'B'C'D'$, v němž $|\sphericalangle D'A'B'| = 60°$. Uveďte všechna řešení. Konstrukci proveďte do zadání.

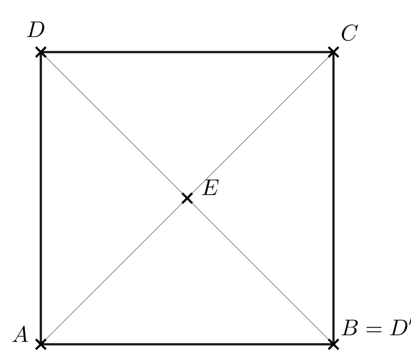
    (b) Měřením určete charakteristiky afinit dourčených v (a).



27. V rovině je dán čtverec $ABCD$ a jeho střed E.

(a) Na přímce $\overleftrightarrow{BD}$ určete bod B' takový, že dvojpoměr $(BD; EB') = \frac{1}{2}$.

(b) Určete střed S a osu o středové kolineace, která zobrazí
$B \to B'$
$D \to D' = B$
body A a C jsou samodružné.

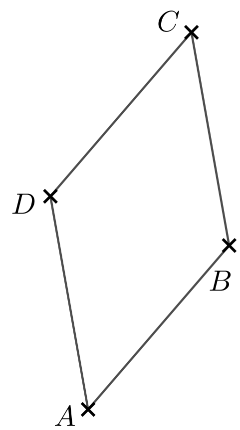


28. V rovině je dán kosočtverec $ABCD$ dle obrázku..

(a) Sestrojte obraz $A'B'C'D'$ v osové afinitě, jejíž osa je rovnoběžná s uhlopříčkou AC, směr afinity je směrem úhlopříčky BD, charakteristika afinity je $-\frac{1}{2}$ a bod B je samodružný.

(b) Určete typ čtyřúhelníku $A'B'C'D'$.

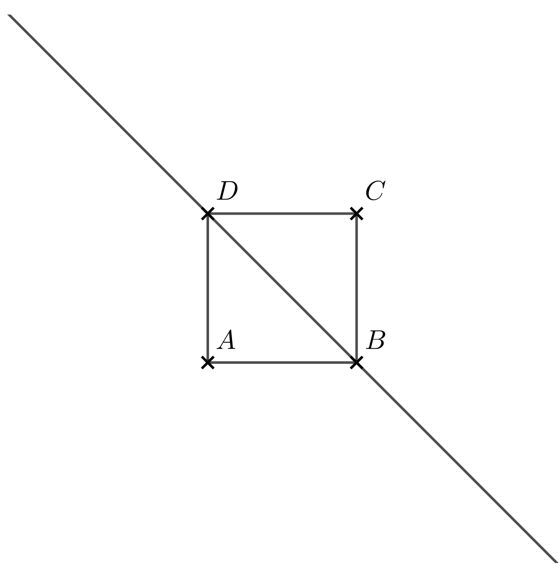
(c) Určete poměr obsahů kosočtverce $ABCD$ a čtyřúhelníku $A'B'C'D'$.



29. V rovině je dán čtverec $ABCD$ (viz obrázek). Nechť bod E leží na přímce $\overleftrightarrow{BD}$ tak, že bod B je středem úsečky $\overline{DE}$.

(a) Na přímce $\overleftrightarrow{DE}$ určete bod S takový, že dvojpoměr $(DB; ES) = 3$.

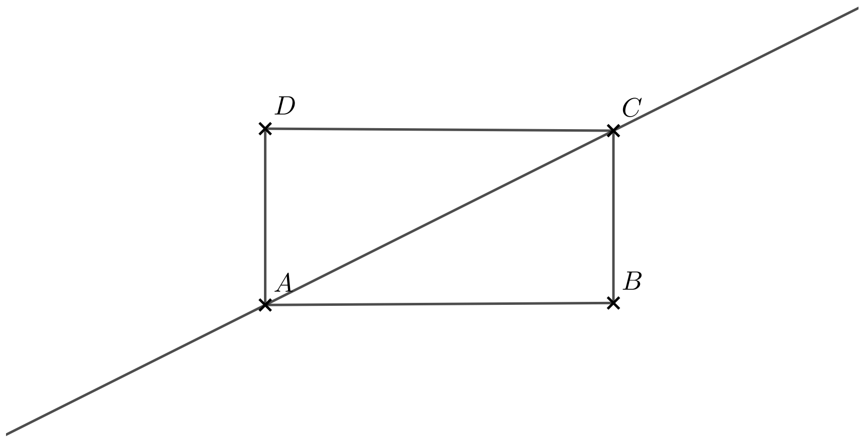
(b) Určete obraz čtverce $ABCD$ a množiny jeho vnitřních bodů (vyšrafujte, vybarvěte, ...) ve středové kolineaci se středem S a osou $\overline{CE}$, ve které je bod B obrazem bodu D.



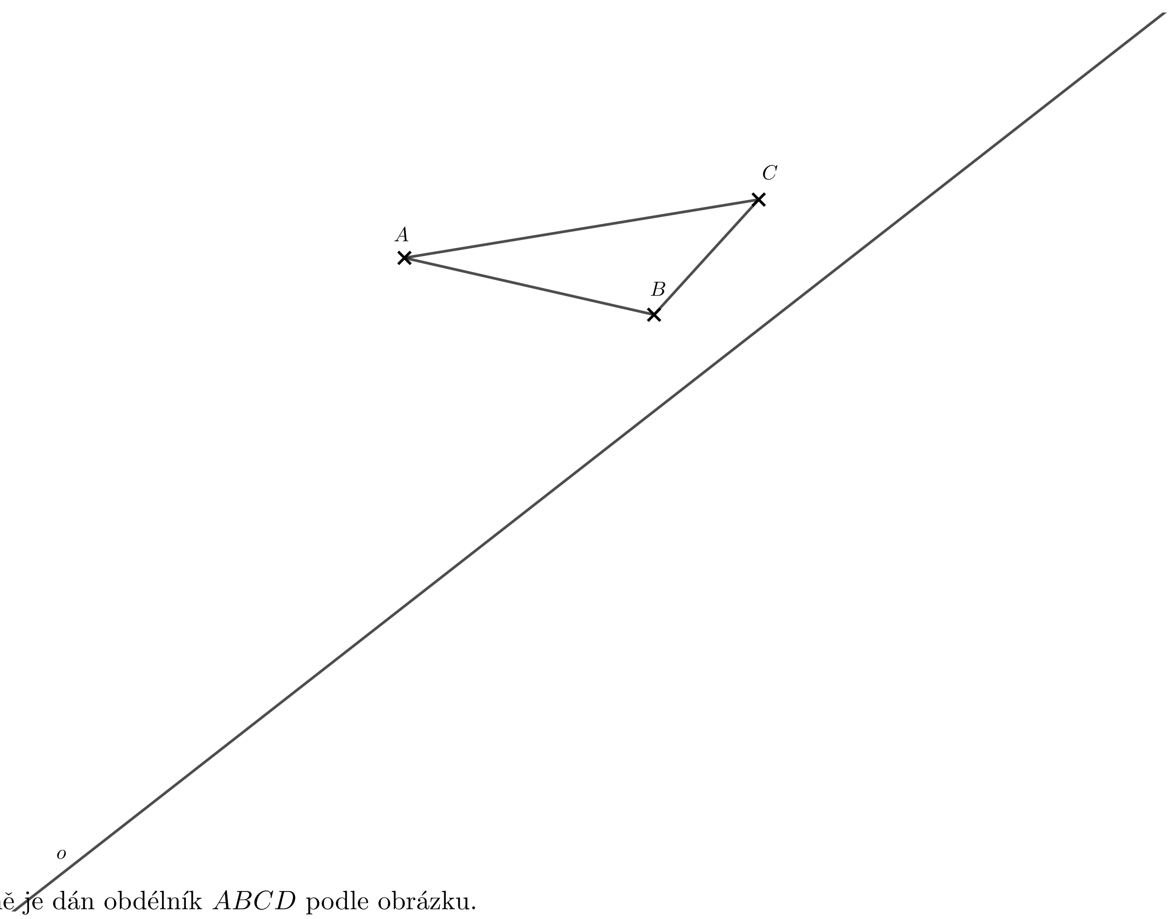
30. V rovině je dán obdélník $ABCD$ jehož strany jsou v poměru $|AB| : |BC| = 2 : 1$ (viz obrázek). Nechť bod E rozděluje úhlopříčku $\overline{AC}$ v poměru $2 : 1$ a je blíže k vrcholu C.

(a) Na přímce $\overleftrightarrow{AC}$ určete bod S takový, že dvojpoměr $(CA; ES) = \dfrac{1}{4}$.

(b) Určete obraz obdélníku $ABCD$ a množiny jeho vnitřních bodů (vyšrafujte, vybarvěte, ...) ve středové kolineaci se středem S a osou $\overline{BE}$, ve které je bod A obrazem bodu C.



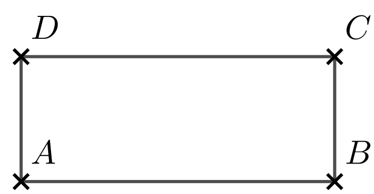
31. V rovině je dán trojúhelník $\triangle ABC$ a přímka o podle obrázku. Určete směr osové afinity s osou o, která zobrazí trojúhelník $\triangle ABC$ na trojúhelník $\triangle A'B'C'$, v němž $|\sphericalangle C'A'B'| : |\sphericalangle A'B'C'| : |\sphericalangle B'C'A'| = 1 : 2 : 3$. Uveďte všechna řešení. **Konstrukci proveďte do zadání.**



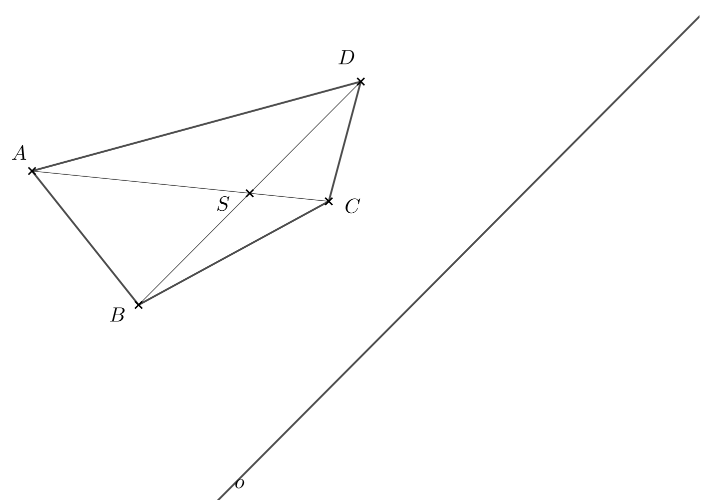
32. V rovině je dán obdélník $ABCD$ podle obrázku.

(a) Určete polohu bodu B' na přímce CD tak, aby dělicí poměr $(CD; B') = 3$.

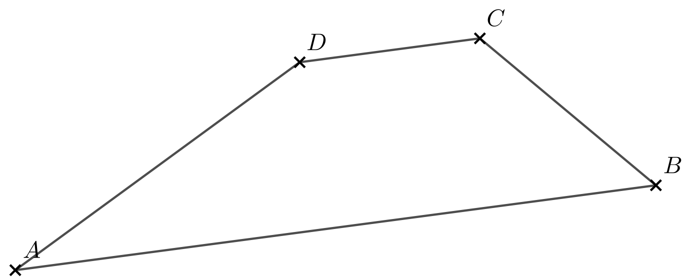
(b) Určete střed a osu středové kolineace, ve které se bod A zobrazí do $C = A'$, bod B do B' (nalezeného v (a)) a pro obraz bodu D platí, že $B'D' \parallel AD$. V této středové kolineaci zobrazte obdélník $ABCD$ a vyznačte (vyšrafujte/vybarvěte) obraz množiny jeho vnitřních bodů. **Konstrukci proveďte do zadání.**



33. V rovině je dán čtyřúhelník $ABCD$ v němž úhlopříčka AC půlí úhlopříčku BD, podle obrázku. V elaci s osou o rovnoběžnou s přímkou BD sestrojte deltoid $A'B'C'D'$, který je obrazem čtyřúhelníku $ABCD$. **Konstrukci proveďte do zadání.**



34. V rovině je dán lichoběžník $ABCD$ podle obrázku. Označme E průsečík přímek $BC \cap AD$ a F průsečík úhlopříček $AC \cap BD$. Dourčete směr osové afinity s osou EF a charakteristikou $k = -1$ a sestrojte obraz lichoběžníku $ABCD$ tak, aby se zobrazil na rovnoramenný lichoběžník $A'B'C'D'$. **Konstrukci proveďte do zadání.**



Dělicí poměry a dvojpoměry

35. Je-li dělicí poměr $(AB; C) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$, určete $(BA; C), (AC; B), (CA; B), (CB; A), (BC; A)$ v závislosti na λ.

36. V rovině jsou dány body A a B. Na přímce $\overline{AB}$ najděte množinů bodů X takových, že
    - $|(AB; X)| = 2$
    - $|(AB; X)| = 1/3$
    - $(AB; X) \cdot (BX; A) = 1$

37. Jsou dány 3 různé kolineární body A, B, C. Dělicí poměr $(AB; C)$ označme λ. Určete hodnotu rozdílu součtu dělicích poměrů $(AB; C)$ a $(AC; B)$ a součinu dělicích poměrů $(AB; C)$ a $(BA; C)$.

38. Jsou-li body A, B, C, D na celočíselné ose (jejich souřadnice jsou celá čísla), nalezněte jejich hodnoty tak, aby dvojpoměr $(AB; CD) = -1$ a určete hodnotu $(CD; AB)$.

39. Na přímce $\overleftrightarrow{AB}$ je dán bod D takový, že dělicí poměr $(AB; D) = 2$. Najděte bod C takový, že body A, B, C a D tvoří harmonickou čtveřici.

40. Je dána úsečka AB a její střed C. Na přímce $\overleftrightarrow{AB}$ najděte bod D takový, že dvojpoměr $(AB; CD) = \frac{1}{2}$.

41. Ověřte, že krajní body těžnice, její střed a těžiště příslušného trojúhelníku tvoří harmonickou čtveřici. Určete v jakém pořadí.

42. V rovině je dán trojúhelník $\triangle ABC$. Dále jsou dány body K a M následovně: bod K leží na přímce AB tak, že B je středem úsečky $\overline{AK}$, a bod M je středem úsečky $\overline{AC}$. Průsečík přímek $\overleftrightarrow{BC}$ a $\overleftrightarrow{KM}$ označme L.

(a) Určete, v jakém dělicím poměru dělí L úsečku $\overline{BC}$.

(b) Určete, v jakém dělicím poměru dělí L úsečku $\overline{KM}$.

(c) Sestrojte obraz trojúhelníku $\triangle AKC$ v stejnolehlosti se středem L a koeficientem $-\frac{1}{2}$. Proveďte pouze konstrukci.