Planimetrie

Kruhová inverze

Michal Zamboj

Pedagogická fakulta

2021

www2.karlin.mff.cuni.cz/~zamboj/

Kruhová inverze

Kruhová inverze

Definice (Kruhová inverze)

Je dána kružnice $z(S, r)$ v rovině ρ. *Kruhová inverze* je zobrazení v rovině $\rho \setminus \{S\}$, které každému bodu $X \neq S$ přiřazuje bod X' polopřímky $\overrightarrow{SX}$ tak, že platí

$$|SX| \cdot |SX'| = r^2.$$

Kružnice z se nazývá *řídicí kružnice*.

Pozn. někdy se definuje $|SX| \cdot |SX'| = |\lambda|$. Body se pro $\lambda < 0$ zobrazují na opačných polopřímkách.
Pozn. někdy se bodu S přiřazuje (právě jeden) bod v nekonečnu.

Samodružné body: body řídicí kružnice.
Samodružné přímky: přímky procházející bodem S (bez bodu S).
Vnitřní body kružnice z se zobrazují na vnější a opačně.

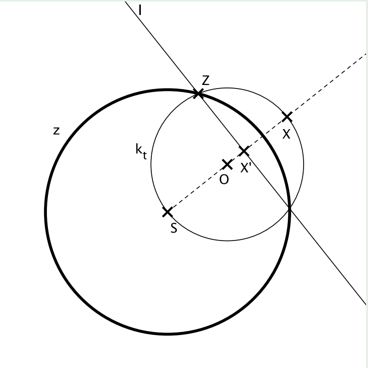
Kruhová inverze

Konstrukce (Sestrojte z, je li dáno S, X, X')

Z Eukleidovy věty o odvěsně:

1. $k_t(S, X)$
2. $l;\ l \perp \overline{SX},\ X' \in l$
3. $Z \in l \cap k_t$
4. $z(S, |SZ|)$

(resp. zaměnit X, X')



Zobrazení přímky

Věta (Obrazem přímky $S \notin p$ je kružnice)

Obrazem přímky p, neprocházející středem S řídicí kružnice $z(S, r)$ kruhové inverze, je kružnice p', procházející bodem S (ale bez bodu S).

Důkaz

Dokazujeme vlastně dvě implikace:
1) Najdeme kružnici, na které leží obrazy bodů přímky v inverzi:
Sestrojíme patu P kolmice na přímku p vedené bodem S.
Najdeme obraz P' bodu P a sestrojíme Thalétovu kružnici k_t nad průměrem $\overline{SP'}$.
Nechť $X' = k_t \cap \overrightarrow{SX}$, kde X je libovolný bod na přímce p.
Pravoúhlé trojúhelníky $\triangle SPX \sim \triangle SX'P'$ jsou podobné dle (u, u) a pro každý bod X platí: $r^2 = |SP| \cdot |SP'| = |SX| \cdot |SX'|$.
Body X' jsou obrazy bodů X z definice kruhové inverze.

Zobrazení přímky

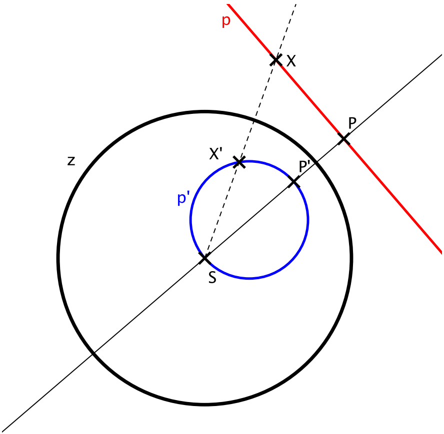
Věta (Obrazem přímky $S \notin p$ je kružnice)

Obrazem přímky p, neprocházející středem S řídicí kružnice $z(S, r)$ kruhové inverze je kružnice p', procházející bodem S (ale bez bodu S).

Důkaz

2) Dokážeme, že obraz každého bodu přímky p leží na nějaké kružnici k':
Z inverze máme $|SX| \cdot |SX'| = |SP| \cdot |SP'|$ a platí rovnost poměrů $\frac{|SX|}{|SP|} = \frac{|SP'|}{|SX'|}$.
Trojúhelníky $\triangle SPX$ a $\triangle SX'P'$ mají společný úhel a jsou si podobné dle (s, u, s).
Úhel při vrcholu X' v $\triangle SX'P'$ je tedy taky pravý a bod X' leží na Thalétově kružnici nad průměrem SP'.

Zobrazení přímky



Důsledek: Kruhová inverze nezachovává kolineárnost bodů.
Zachovává se incidence.

Zobrazení kružnice

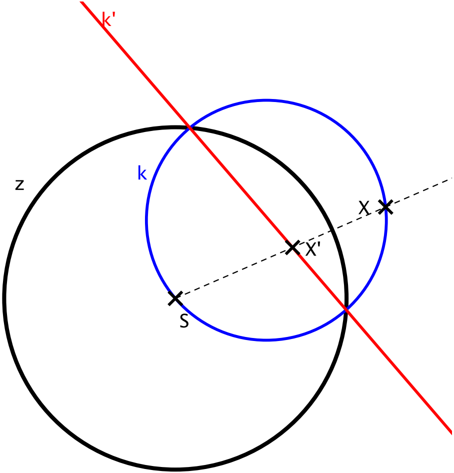
Věta (Obrazem kružnice $S \in k$ je přímka)

Obrazem kružnice k, procházející středem S řídicí kružnice $z(S, r)$ kruhové inverze, je přímka p, neprocházející bodem S.

Důkaz

Stačí si uvědomit, že kruhová inverze je involuce. Potom je to důsledek předešlé věty.

Zobrazení kružnice



Věta (Obrazem kružnice $S \notin k$ je kružnice)

Obrazem kružnice k, neprocházející středem S řídicí kružnice $z(S, r)$ kruhové inverze, je kružnice k', neprocházející bodem S.

Důkaz

Znovu dokazujeme dvě implikace: 1) Najdeme kružnici, pro kterou to platí: Označme P, Q body kružnice k, které leží na jejím průměru procházejícím středem S řídicí kružnice a určeme jejich obrazy P', Q'.
Z inverze platí: $|SP| \cdot |SP'| = |SQ| \cdot |SQ'| = r^2$ a sestrojíme kružnici k' nad průměrem $P'Q'$. Nechť X' je libovolný bod kružnice k' a Y' druhý průsečík $k' \cap \overrightarrow{SX'}$, a průsečíky $k \cap \overrightarrow{SX'}$ jsou Y, X.
Z mocnosti bodu S ke kružnici k platí: $|SX| \cdot |SY| = m = |SP| \cdot |SQ|$.
Platí, že kružnice k, k' jsou ve stejnolehlosti se středem S. Platí tedy: $\dfrac{|SP|}{|SY|} = \dfrac{|SQ'|}{|SX'|}$.
Dosazením např. pro $|SY|$ do vztahu pro mocnost:

$$|SX| \frac{|SP| \cdot |SX'|}{|SQ'|} = |SP| \cdot |SQ| \rightarrow |SX| \cdot |SX'| = |SQ| \cdot |SQ'| = r^2$$

A body $X' \in k'$ jsou obrazy bodů $X \in k$.

Věta (Obrazem kružnice $S \notin k$ je kružnice)

Obrazem kružnice k, neprocházející středem S řídicí kružnice $z(S, r)$ kruhové inverze, je kružnice k', neprocházející bodem S.

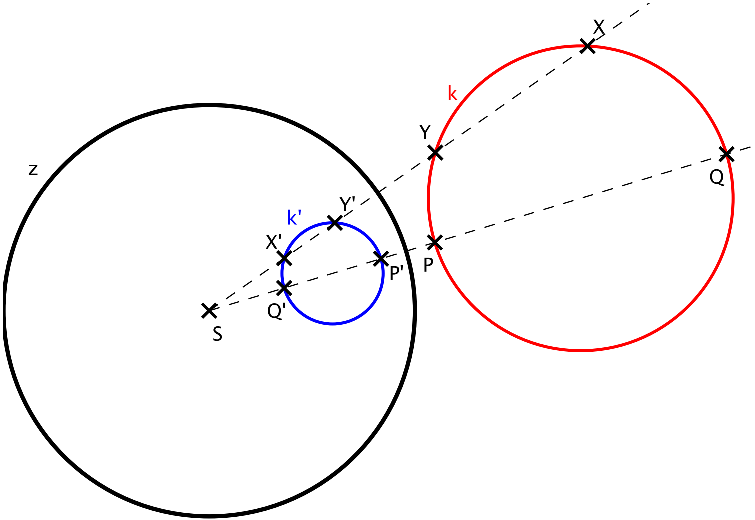
Důkaz

2) Dokážeme, že obrazy bodů kružnice k v inverzi leží na nějaké kružnici k'.
Stejně jako v 1) označme P, Q body kružnice k, které leží na jejím průměru procházejícím středem S řídicí kružnice a určeme jejich obrazy P', Q'.

Nechť X je libovolný bod kružnice k a Y druhý průsečík $k \cap \overrightarrow{SX}$, jejich obrazy jsou X', Y'.

Z inverze platí: $\frac{|SP|}{|SX|} = \frac{|SX'|}{|SP'|}$ a taky $\frac{|SQ|}{|SX|} = \frac{|SX'|}{|SQ'|}$ a dvojice trojúhelníků $\triangle PSX \sim \triangle X'SP'$ a $\triangle QSX \sim \triangle X'SQ'$ se společným úhlem ve vrcholu S jsou si podobné.
Platí tedy, že
$|\sphericalangle Q'X'P'| = |\sphericalangle SX'P'| - |\sphericalangle SX'Q'| = |\sphericalangle SPX| - |\sphericalangle SQX| = \pi - |\sphericalangle QPX| - |\sphericalangle PQX| = \frac{\pi}{2}$.
Bod X' tedy leží na Thalétově kružnici nad průměrem $P'Q'$.

Zobrazení kružnice



Samodružné kružnice

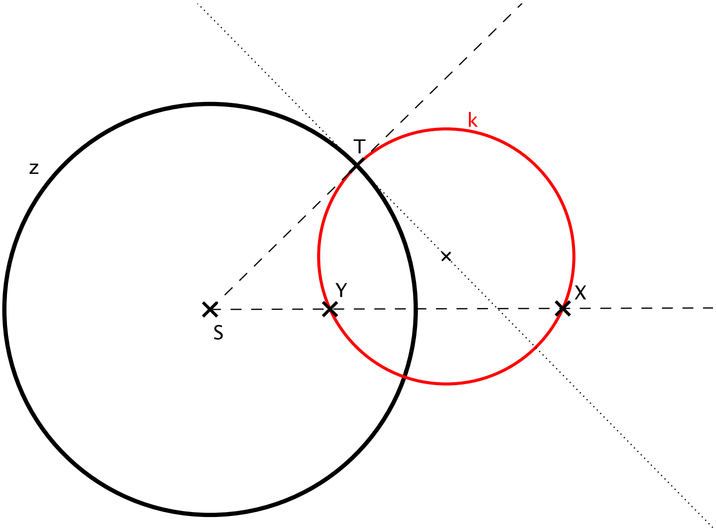
Věta (Samodružné kružnice)

Řídicí kružnice a kružnice, které jsou kolmé na řídicí kružnici, jsou samodružné v kruhové inverzi.

Důkaz

Nechť T je průsečík kružnice k a řídicí kružnice z.
$\overrightarrow{ST}$ je tečna kružnice k.
Bodem S veďme libovolnou sečnu s kružnice k : $X, Y \in k \cap s$.
Z mocnosti bodu S ke kružnici k platí $|SX| \cdot |SY| = |ST|^2 = r^2$.
Bod X je v inverzi obrazem bodu Y a opačně.

Samodružné kružnice

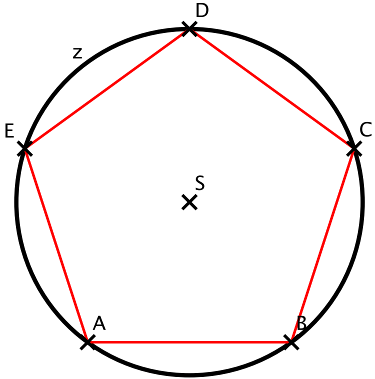


Kruhová inverze

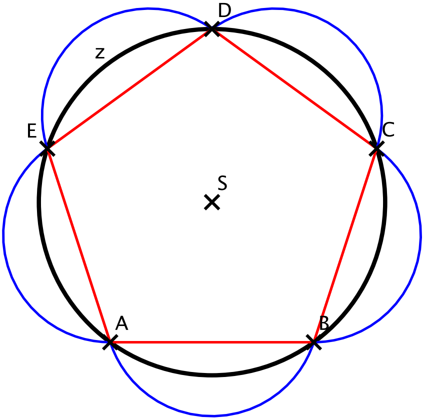
Věta (Konformita kruhové inverze)

Kruhová inverze je konformní zobrazení, t.j. zachovává úhly.

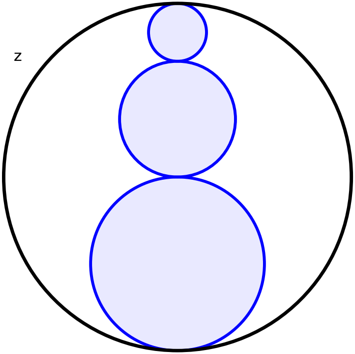
Kruhová inverze



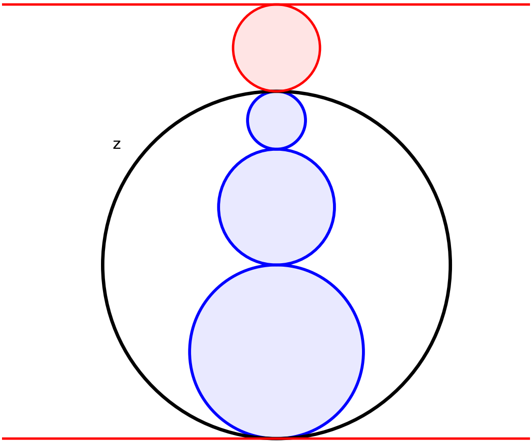
Kruhová inverze



Kruhová inverze



Kruhová inverze



Příklad (1)

Je dána řídicí kružnice $z(S, r)$, kružnice $n(N, r_n)$, která je uvnitř z a $S \in n$ a kružnice $m(M, r_m)$, která má vnější dotyk s kružnicí n. Sestrojte obrazy kružnic m, n v kruhové inverzi.

Příklad (2 - cv.)

Je dán $\triangle ABC$.

1. Sestrojte jeho obraz v kruhové inverzi, kde řídicí kružnice, je kružnice trojúhelníku vepsaná.
2. Sestrojte dále obraz kružnice opsané v dané kruhové inverzi.
3. Určete poloměry kružnic, které jsou obrazy přímek $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AC}$ a kružnice opsané $\triangle ABC$.