Planimetrie

Kruhová inverze a Apollóniovy úlohy

1. Je dána řídicí kružnice $z(S, r)$, kružnice $n(N, r_n)$, která je uvnitř z a $S \in n$ a kružnice $m(M, r_m)$, která má vnější dotyk s kružnicí n. Sestrojte obrazy kružnic m, n v kruhové inverzi.

2. Je dán $\triangle ABC$.

   (a) Sestrojte jeho obraz v kruhové inverzi, kde řídicí kružnice, je kružnice trojúhelníku vepsaná.

   (b) Sestrojte dále obraz kružnice opsané v dané kruhové inverzi.

   (c) Určete poloměry kružnic, které jsou obrazy přímek $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{AC}$ a kružnice opsané $\triangle ABC$.

DÚ 1 Stereografická projekce v rovině je zobrazení, ve kterém se z bodu na kružnici promítají body dané kružnice na nějakou přímku (neprocházející bodem promítání) v rovině.
Nechť je dána řídicí kružnice $z(S, r)$ a přímka p procházející středem S. Krajní body průměru kružnice z kolmého k přímce p označme A, B. Na kružnici zvolme libovolný bod $P_0 \neq A, B$ a sestrojme jeho obrazy P, P' v stereografických projekcích kružnice z z bodů A, B na přímku p. Dokažte, že body P, P' tvoří odpovídající si pár v kruhové inverzi s řídicí kružnicí z.

DÚ 2 Je dána řídicí kružnice $z(S, r)$. Pro libovolný bod $X \neq S, x \notin z$ a jeho obraz X' v kruhové inverzi podle z určete dvojpoměr $(A, B; X, X')$, kde body A a B jsou průsečíky přímky $\overleftrightarrow{XX'}$ a kružnice z.
Pozn. pozor na orientaci v definici dvojpoměru.

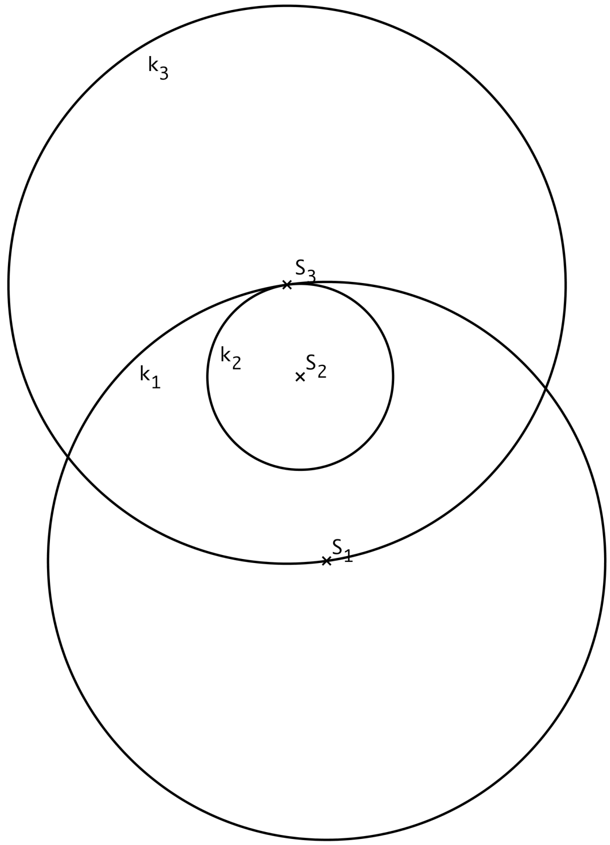
3. Jsou dány soustředné kružnice k_1 a k_2. Diskutujte vzájemné vztahy obrazů těchto kružnic při různých volbách kruhové inverze.

4. Řešte Apolloniovu úlohu Bpp, t.j. najděte kruhový útvar dotýkajíci se přímek $p, q, p \nparallel q$ a procházející bodem $A, A \notin p, q$. Konstrukci odůvodněte v rozboru a udělejte diskuzi vzhledem k zadaným parametrům.

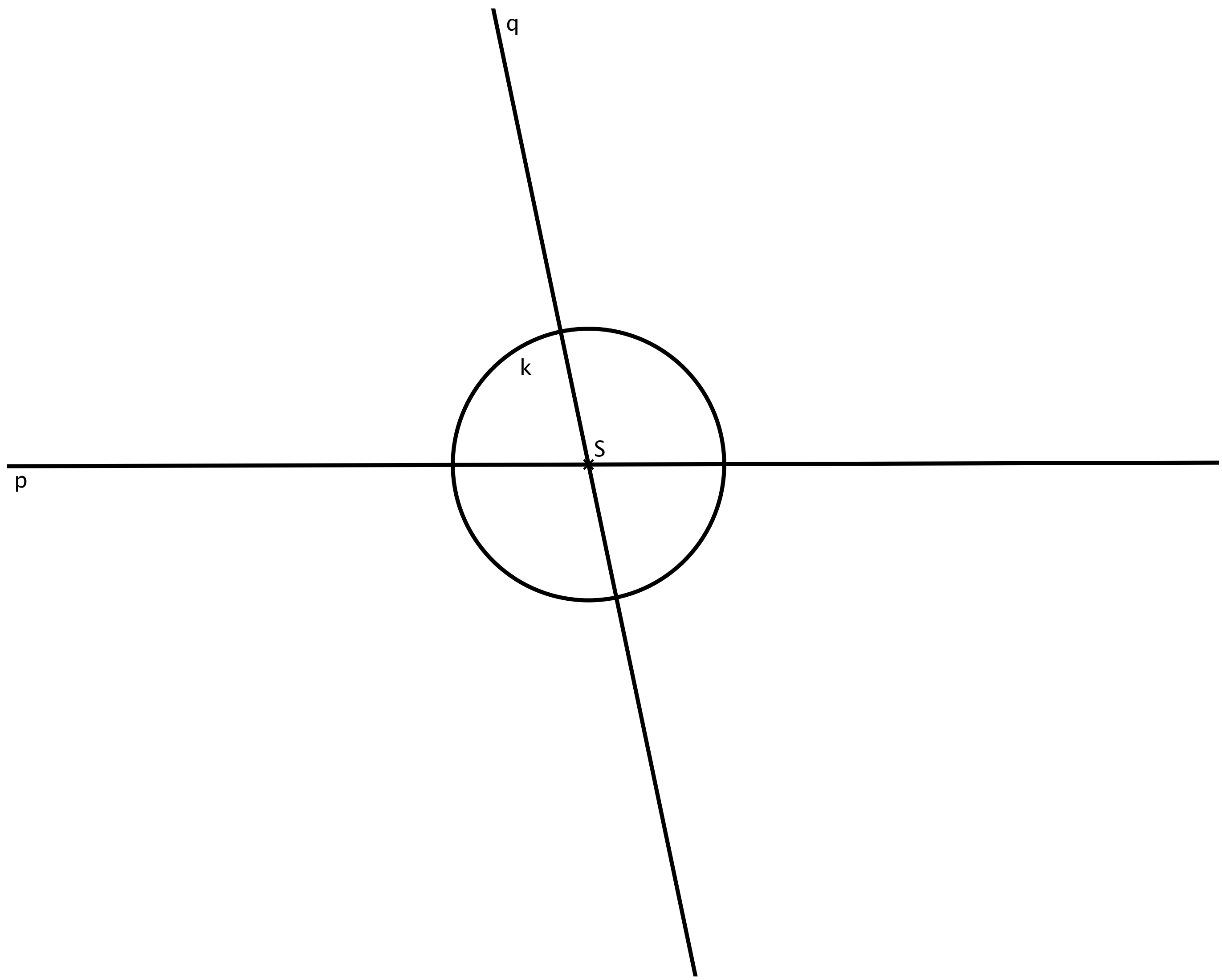
5. Řešte Apolloniovu úlohu BBk pro body A, B a kružnici $k(S, r)$. Určete počet řešení vzhledem k vzájemným polohám objektů. Pro volbu bodů A, B uvnitř kruhu k udělejte náčrt a rozbor s hlavními body konstrukce a proveďte konstrukci.

DÚ 3 Vyřešte Apolloniovu úlohu pkk, t.j. najděte kruhový útvar dotýkajíci se přímky p a kružnic $k(S_k, r_k), l(S_l, r_l)$, pro $S_k \neq S_l; r_k = r_l$. Nápověda: využijte buď dilataci, nebo kruhovou inverzi. Konstrukci odůvodněte v rozboru a udělejte diskuzi vzhledem k zadaným parametrům.

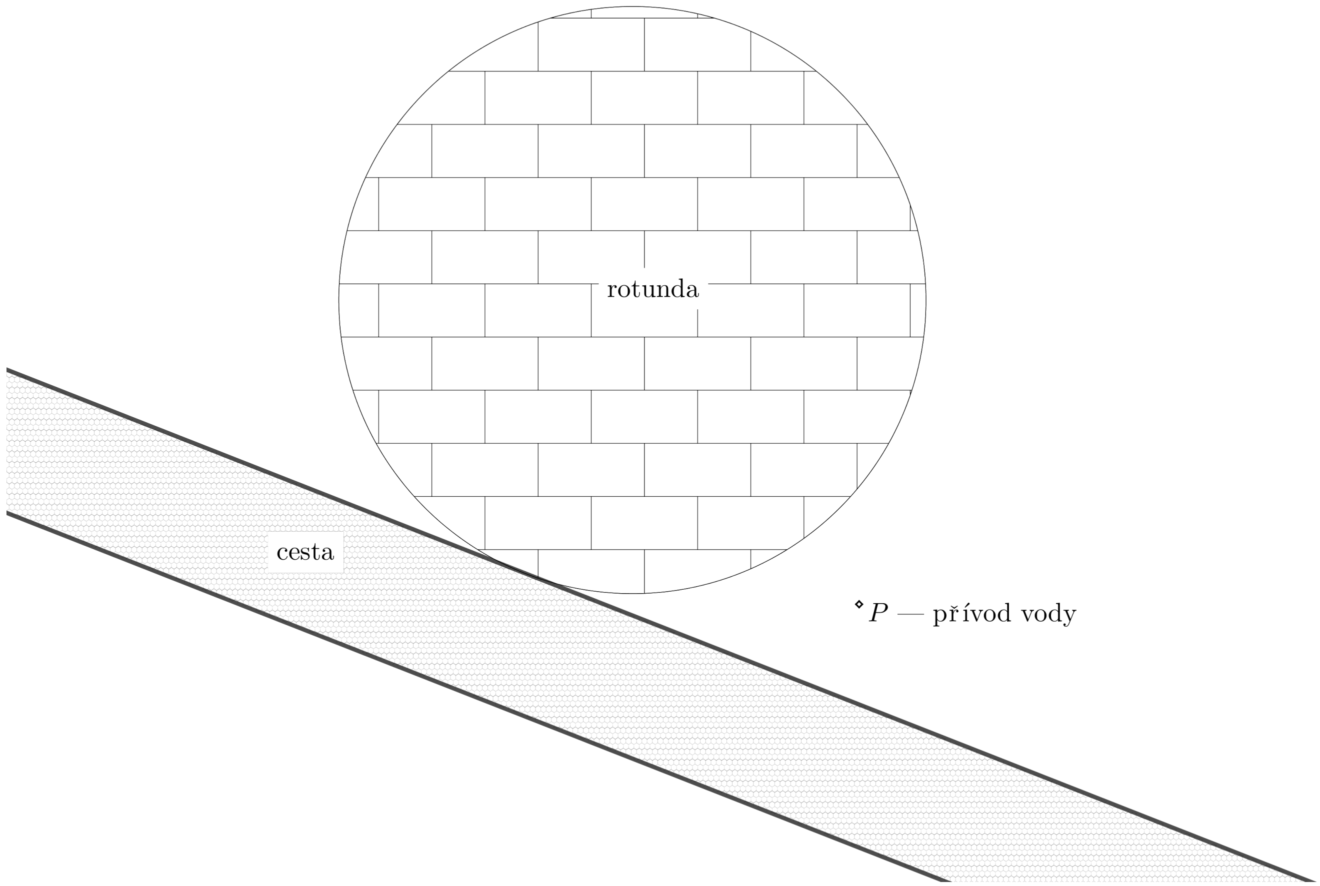
6. Řešte Apolloniovu úlohu kkk pro kružnice $k_1(S_1, r_1);\ k_2(S_2, r_2);\ k_3(S_3, r_3)$. Kružnice k_1 a k_2 mají vnitřní dotyk v bodě S_3.



7. Řešte Apolloniovu úlohu ppk pro přímky p, q a kružnici $k(S, r)$. Přímky p a q se protínají v bodě S.



☽ Na obrázku je plán parku v němž je rotunda s kruhovým půdorysem a rovný chodník, jež se rotundy okrajem dotýká. Doplňte do plánu nákres kruhového jezera, na jehož hranici leží bod přívodu vody (P) a dotýkajícího se okraje chodníku a půdorysu rotundy. Na vedlejší papír udělejte náčrt a rozbor s hlavními body konstrukce. Do zadání proveďte konstrukci všech řešení takových, aby rotunda neležela uvnitř jezera.



☽ Měsíc byl tu noc v úplňku. Mladý student geometrie dojížděl na zkoušku nočním vlakem. Po zopakování si všech typů Apolloniových úloh se podíval do okna svého kupé, ve kterém se obrys měsíce dotýkal spodního okraje okna a současně obou částečně odhrnutých závěsů tvořících kružnicové oblouky. Sestrojte všechny možnosti obrysu kruhového měsíce tak, aby ho bylo v okně celý vidět.
Na vedlejší papír udělejte náčrt a rozbor s hlavními body konstrukce.