Planimetrie

Kružnice

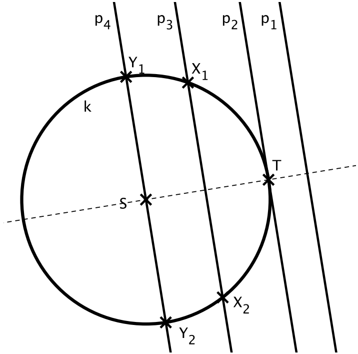
Michal Zamboj

Pedagogická fakulta

2021

www2.karlin.mff.cuni.cz/~zamboj/

Vzájemná poloha přímky a kružnice



p_1 vnější přímka

p_2 tečna s bodem dotyku T

p_3 sečna

$\overline{X_1X_2}$ tětiva

$\overline{Y_1Y_2}$ průměr

$\overline{Y_1S}$ poloměr

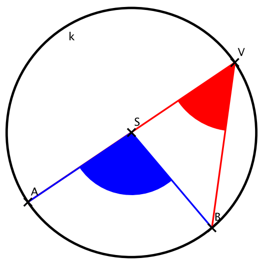
Úhly v kružnici

Věta (O obvodovém a středovém úhlu)

Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti každého obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku.

Důkaz (Výčtem možností)

$\sphericalangle AVB$ - *obvodový úhel*
$\sphericalangle ASB$ - *středový úhel*



a) $S \in \overline{AV}$
$\triangle BSV$ - *rovnoramenný*
$|\sphericalangle SBV| = |\sphericalangle BVS| = \alpha$
$|\sphericalangle BSV| = \pi - 2\alpha$
$|\sphericalangle BSA| = 2\alpha$

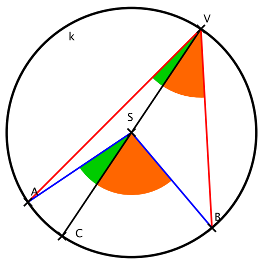
Úhly v kružnici

Věta (O obvodovém a středovém úhlu)

Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti každého obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku.

Důkaz (Výčtem možností)

$\sphericalangle AVB$ - *obvodový úhel*
$\sphericalangle ASB$ - *středový úhel*



b) S je vnitřní bod konvex. úhlu $\sphericalangle AVB$
$C \in \overline{SV} \cap k$
převedeme na úhly
$\sphericalangle AVC, \sphericalangle BVC$
$|\sphericalangle AVB| = |\sphericalangle AVC| + |\sphericalangle BVC|$

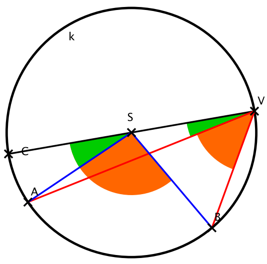
Úhly v kružnici

Věta (O obvodovém a středovém úhlu)

Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti každého obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku.

Důkaz (Výčtem možností)

$\sphericalangle AVB$ - *obvodový úhel*
$\sphericalangle ASB$ - *středový úhel*



c) S je vnější bod konvex. úhlu $\sphericalangle AVB$

$C \in \overline{SV} \cap k$

převedeme na úhly $\sphericalangle AVC, \sphericalangle BVC$

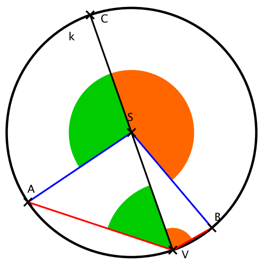
$|\sphericalangle AVB| = |\sphericalangle BVC| - |\sphericalangle AVC|$

Věta (O obvodovém a středovém úhlu)

Velikost středového úhlu je rovna dvojnásobku velikosti každého obvodového úhlu příslušného k témuž oblouku.

Důkaz (Výčtem možností)

$\sphericalangle AVB$ - *obvodový úhel*
$\sphericalangle ASB$ - *středový úhel*



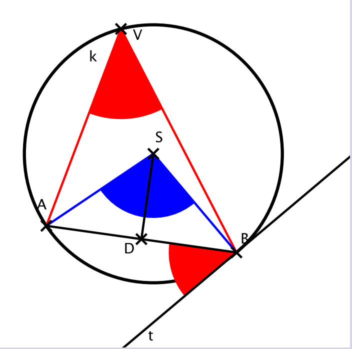
d) pro tupý $\sphericalangle AVB$
$C \in \overline{SV} \cap k$
převedeme na úhly
$\sphericalangle AVC, \sphericalangle BVC$
$|\sphericalangle AVB| = |\sphericalangle BVC| + |\sphericalangle AVC|$

Úhly v kružnici

Věta (O úsekovém úhlu)

Úsekový úhel daného oblouku je shodný se všemi obvodovými úhly příslušnými k danému oblouku,

Důkaz



$|\sphericalangle \overline{AB}, t|$ - *úsekový úhel*
$\triangle ABS$ *je rovnoramenný*
$\triangle DBS$ *je pravoúhlý*
$\overline{SD}$ *je osa úhlu* $\sphericalangle ASB$
$|\sphericalangle DSA| = |\sphericalangle DSB| = \alpha$
$|\sphericalangle DBS| = \frac{\pi}{2} - \alpha$
$|\sphericalangle \overline{AB}, t| = \alpha$

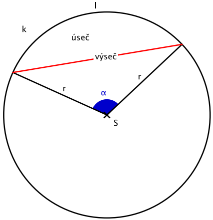
Aplikace:
množina $\mathcal{G}$ všech vrcholů V úhlu $\sphericalangle AVB$ o velikosti α, jejíchž ramena procházejí body $A \neq B$.

konstrukce tečny daným bodem

3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825
3421170679821480865132823066470938446095505822317253594081284811174502841027019385211055596
4462294895493038196442881097566593344612847564823378678316527120190914564856692346034861045
4326648213393607260249141273724587006606315588174881520920962829254091715364367892590360011
3305305488204665213841469519415116094330572703657595919530921861173819326117931051185480744
6237996274956735188575272489122793818301194912983367336244065664308602139494639522473719070
2179860943702770539217176293176752384674818467669405132000568127145263560827785771342757789
6091736371787214684409012249534301465495853710507922796892589235420199561121290219608640344
1815981362977477130996051870721134999999837297804995105973173281609631859502445945534690830
2642522308253344685035261931188171010003137838752886587533208381420617177669147303598253490
4287554687311595628638823537875937519577818577805321712268066130019278766111959092164201989
3809525720106548586327886593615338182796823030195203530185296899577362259941389124972177528
3479131515574857242454150695950829533116861727855889075098381754637464939319255060400927701
6711390098488240128583616035637076601047101819429555961989467678374494482553797747268471040
4753464620804668425906949129331367702898915210475216205696602405803815019351125338243003558
7640247496473263914199272604269922796782354781636009341721641219924586315030286182974555706
7498385054945885869269956909272107975093029553211653449872027559602364806654991198818347977
5356636980742654252786255181841757467289097777279380008164706001614524919217321721477235014
1441973568548161361157352552133475741849468438523323907394143334547762416862518983569485562
0992192221842725502542568876717904946016534668049886272327917860857843838279679766814541009
5388378636095068006422512520511739298489608412848862694560424196528502221066118630674427862
2039194945047123713786960956364371917287467764657573962413890865832645995813390478027590099
4657640789512694683983525957098258226205224894077267194782684826014769909026401363944374553
0506820349625245174939965143142980919065925093722169646151570985838741059788595977297549893
0161753928468138268683868942774155991855925245953959431049972524680845987273644695848653836
7362226260991246080512438843904512441365497627807977156914359977001296160894416948685558484
0635342207222582848864815845602850601684273945226746767889525213852254995466672782398645659
6116354886230577456498035593634568174324112515076069479451096596094025228879710893145669136
8672287489405601015033086179286809208747609178249385890097149096759852613655497818931297848
2168299894872265880485756401427047755513237964145152374623436454285844479526586782105114135
4735739523113427166102135969536231442952484937187110145765403590279934403742007310578539062
1983874478084784896833214457138687519435064302184531910484810053706146806749192781911979399
5206141966342875444064374512371819217999839101591956181467514269123974894090718649423196156
7945208095146550225231603881930142093762137855956638937787083039069792077346722182562599661
501421503068038447734549202605414 6

Obvod a obsah

Obvod kružnice: $o = 2\pi r$
Obsah kružnice: $S = \pi r^2$



Délka oblouku kružnice: $l = \dfrac{\alpha}{2\pi} o = \dfrac{2\pi\alpha r}{2\pi} = \alpha r$

Obsah kruhové výseče: $S_{\text{výseče}} = \dfrac{\alpha}{2\pi} S = \dfrac{\pi\alpha r^2}{2\pi} = \dfrac{\alpha r^2}{2}$

Obsah kruhové úseče:

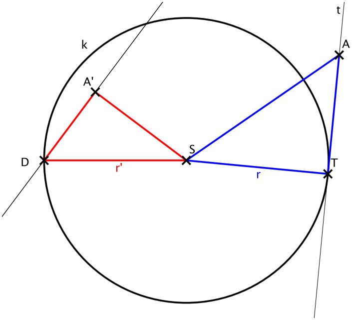
$$S_{\text{úseče}} = S_{\text{výseče}} - S_{\triangle} = \frac{\alpha r^2}{2} - \frac{1}{2} r^2 \sin\alpha = \frac{1}{2} r^2 (\alpha - \sin\alpha)$$

Mocnost bodu ke kružnici

Definice (Mocnost bodu ke kružnici)

Mocností bodu A ke kružnici $k(S, r)$ nazýváme číslo

$$M(A, k) = |AS|^2 - r^2.$$



$M(A, k) > 0 \Leftrightarrow A$ je vně k
$|AS|^2 - r^2 = |AT|^2 > 0$

$M(A, k) = 0 \Leftrightarrow A \in k$
$|AS|^2 - r^2 = 0$

$M(A, k) < 0 \Leftrightarrow A$ je uvnitř k
$|AS|^2 - r^2 = -|AD|^2 < 0$

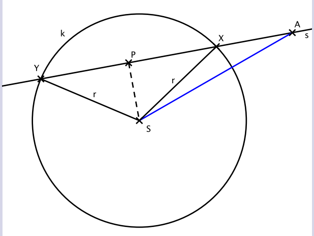
Mocnost bodu ke kružnici

Věta (Mocnost a sečna)

Je dána kružnice k a bod A. Bodem A veďme libovolnou sečnu s kružnice k. Průsečíky sečny s a kružnice k označme X, Y. Pro body X a Y platí:

$$|AX||AY| = \begin{cases} M(A,k) \text{ pokud } A \in k \text{ nebo } A \text{ je vně } k & (1) \\ -M(A,k) \text{ pokud } A \text{ je uvnitř } k & (2) \end{cases}$$

Důkaz



(1)

$$|AX||AY| = (|AP| - |XP|)(|AP| + |YP|)$$
$$|AX||AY| = |AP|^2 - |XP|^2$$
$$|AX||AY| = |AS|^2 - |SP|^2 - (r^2 - |SP|^2)$$
$$|AX||AY| = |AS|^2 - r^2 = M(A,k)$$

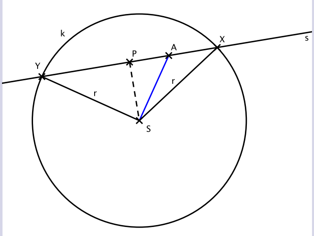
Mocnost bodu ke kružnici

Věta (Mocnost a sečna)

Je dána kružnice k a bod A. Bodem A veďme libovolnou sečnu s kružnice k. Průsečíky sečny s a kružnice k označme X, Y. Pro body X a Y platí:

$$|AX||AY| = \begin{cases} M(A,k) \text{ pokud } A \in k \text{ nebo } A \text{ je vně } k & (1) \\ -M(A,k) \text{ pokud } A \text{ je uvnitř } k & (2) \end{cases}$$

Důkaz



(2)

$$|AX||AY| = (|XP| - |AP|)(|AP| + |YP|)$$
$$|AX||AY| = |XP|^2 - |AP|^2$$
$$|AX||AY| = r^2 - |SP|^2 - (|AS|^2 - |SP|^2)$$
$$|AX||AY| = r^2 - |AS|^2 = -M(A,k)$$

Mocnost bodu ke kružnici

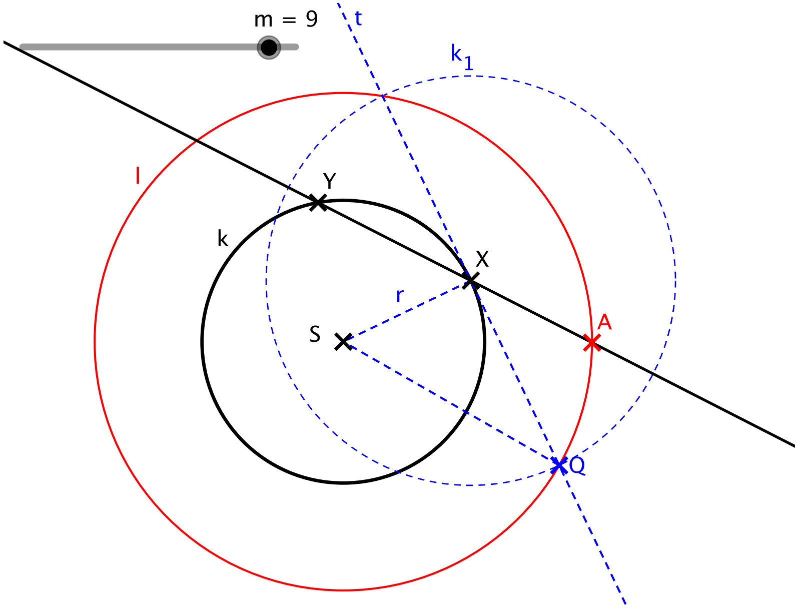
Konstrukce (Dáno: kružnice k, $X, Y \in k$, $M(A,k) > 0$. Sestrojte bod $A \in \overleftrightarrow{XY}$)

Pro $M(A,k) > 0$ platí $M(A,k) = |AS|^2 - r^2$
Bod A leží na $\overleftrightarrow{XY}$ a na kružnici $l(S, |AS| = \sqrt{M(A,k) + r^2})$.

Postup:

1. t; t je tečna ke k v bodě X
2. k_1; $k_1(X, \sqrt{M(A,k)})$
3. Q; $Q \in t \cap k_1$
4. l; $l(S, |SQ|)$
5. $A \in l \cap \overleftrightarrow{XY}$

Mocnost bodu ke kružnici



Mocnost bodu ke kružnici

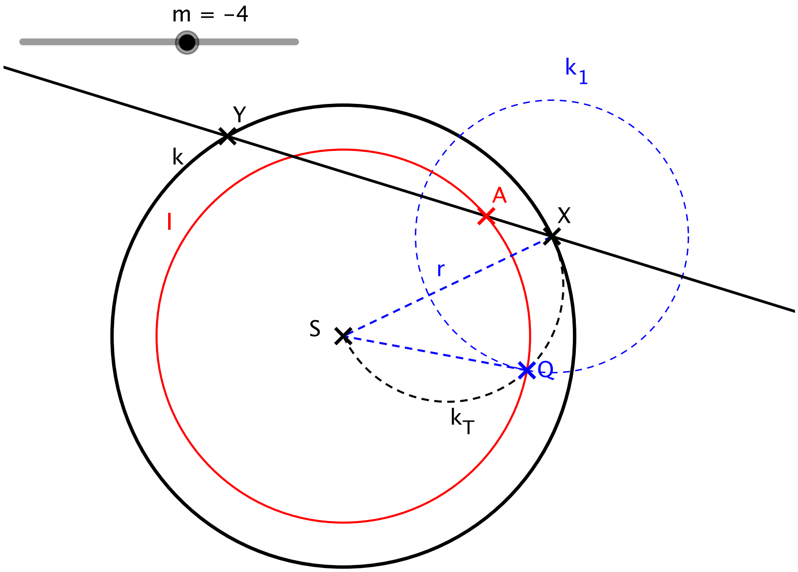
Konstrukce (Dáno: kružnice $k, X, Y \in k, M(A,k) < 0$. Sestrojte bod $A \in \overleftrightarrow{XY}$)

Pro $M(A,k) < 0$ platí $-M(A,k) = r^2 - |AS|^2$
Bod A leží na $\overleftrightarrow{XY}$ a na kružnici $l(S, |AS| = \sqrt{r^2 + M(A,k)})$.

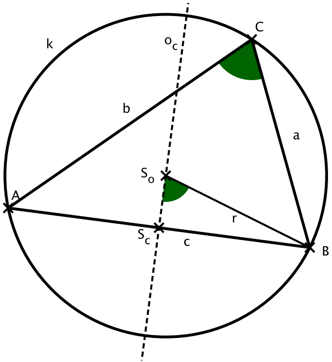
Postup:

1. $k_t; k_t(XS)$
2. $k_1; k_1(X, \sqrt{-M(A,k)})$
3. $Q; Q \in k_T \cap k_1$
4. $l; l(S, |SQ|)$
5. $A \in l \cap \overleftrightarrow{XY}$

Mocnost bodu ke kružnici



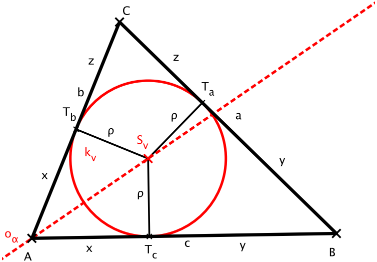
Kružnice opsaná $k(S_o, r)$



$$\triangle BS_oS_c \rightarrow \sin\gamma = \frac{c}{2r}$$
$$2r = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

$$S_\triangle = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$
$$S_\triangle = \frac{abc}{4r}$$

Kružnice vepsaná $k(S_v, \rho)$

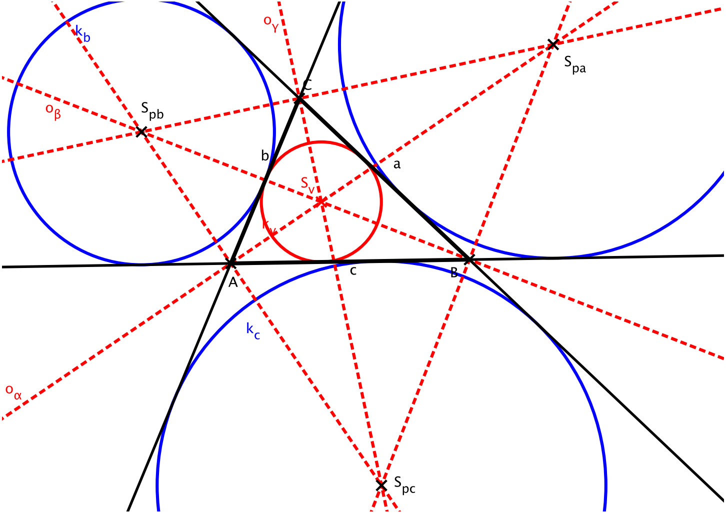


$$\rho = \frac{S_{ABC}}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$\triangle AT_cS_v \cong AT_bS_v \text{ dle}$$
$$Ssu\ (|AS_v|, \rho, \tfrac{\pi}{2})$$
$$\Rightarrow |AT_c| = |AT_b| = x$$
$$|BT_c| = |BT_a| = y$$
$$|CT_a| = |CT_b| = z$$
$$a+b+c = 2x+2y+2z$$
$$s = x+y+z$$
$$s-a = x$$
$$\rho = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$$

$$S_{ABC} = S_{ABS_v} + S_{BCS_v} + S_{ACS_v}$$
$$S_{ABC} = \tfrac{1}{2}\rho c + \tfrac{1}{2}\rho a + \tfrac{1}{2}\rho b$$
$$S_{ABC} = \rho\frac{a+b+c}{2} = \rho s$$

Kružnice připsané k_a, k_b, k_c



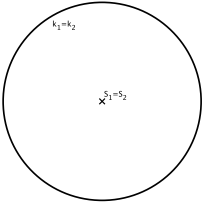
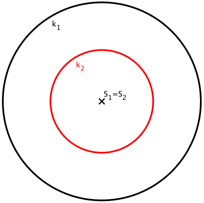
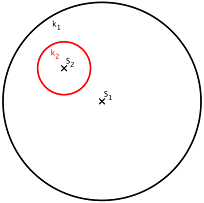
Vzájemná poloha 2 ◯

Definice (Soustředné kružnice)

Dvě kružnice se nazývají *soustředné* když mají společný střed.

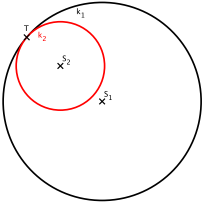
Definice (Středná)

Spojnice středů dvou kružnic se nazývá jejich *středná*.

totožné	soustředné	k_2 uvnitř k_1
		
$S_1 = S_2$ $r_1 = r_2$	$S_1 = S_2$ $r_1 \neq r_2$	$S_1 \neq S_2$ $\lvert S_1 S_2 \rvert < \lvert r_1 - r_2 \rvert$

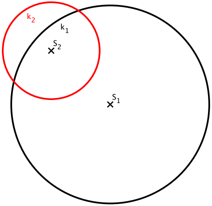
Vzájemná poloha 2

vnitřní dotyk



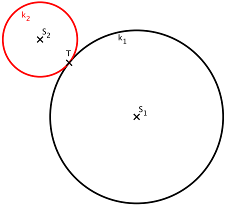
$$S_1 \neq S_2$$
$$|S_1S_2| = |r_1 - r_2|$$

k_1 a k_2 se protínají ve 2 bodech



$$S_1 \neq S_2$$
$$|r_1 - r_2| < |S_1S_2| < r_1 + r_2$$

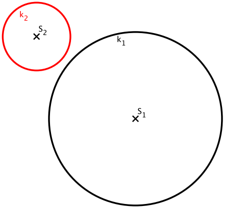
vnějši dotyk



$$S_1 \neq S_2$$
$$|S_1S_2| = r_1 + r_2$$

Vzájemná poloha 2 ◯

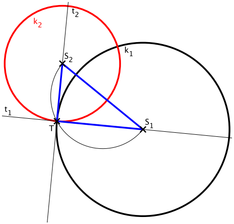
k_1 a k_2 leží vzájemně vně



$$S_1 \neq S_2$$
$$|S_1 S_2| > r_1 + r_2$$

Definice (Ortogonální kružnice)

Dvě kružnice, které se protínají, se nazývají *vzájemně kolmé (ortogonální)*, jsou-li vzájemně kolmé jejich tečny ve společných průsečících.



$$S_1 \neq S_2$$
$$|S_1S_2|^2 = r_1^2 + r_2^2$$

Stejnolehlost dvou kružnic

Věta (Stejnolehlost dvou kružnic)

Nechť jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1, r_1), k_2(S_2, r_2)$. Platí, že:

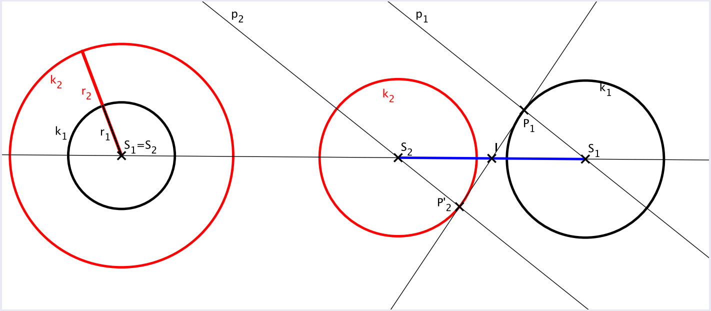
- *jsou-li k_1, k_2 soustředné, potom mezi nimi existují 2 stejnolehlosti s opačnými koeficienty.*
- *jsou-li $S_1 \neq S_2$ a současně $r_1 = r_2$, potom mezi nimi existuje 1 stejnolehlost (a 1 posunutí).*
- *jsou-li $S_1 \neq S_2$ a současně $r_1 \neq r_2$, potom mezi nimi existují 2 stejnolehlosti.*
  Vnitřní stejnolehlost se středem I na úsečce $\overline{S_1 S_2}$.
  Vnější stejnolehlost se středem E vně úsečky $\overline{S_1 S_2}$.

Stejnolehlost dvou kružnic

Věta (Stejnolehlost dvou kružnic)

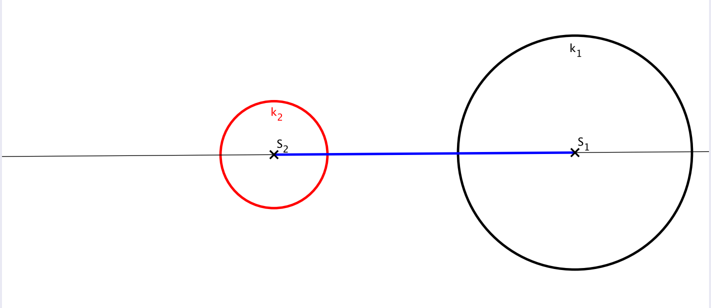
$$S_1 = S_2 \to H(S_1, \tfrac{r_2}{r_1}), H(S_1, -\tfrac{r_2}{r_1})$$

$$S_1 \neq S_2 \wedge r_1 = r_1 \to H(I(\mathit{st\check{r}ed}\overline{S_1 S_2}), -1)$$



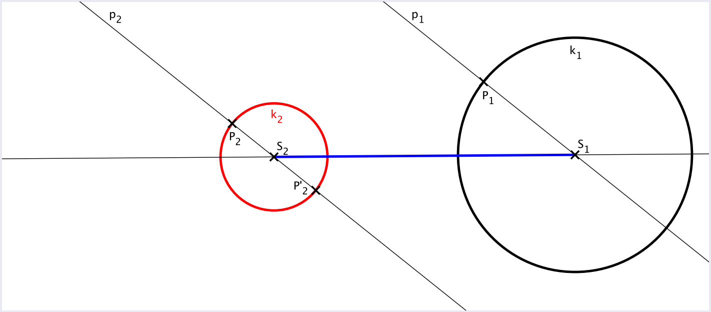
Věta (Stejnolehlost dvou kružnic)

$$S_1 \neq S_2 \wedge r_1 \neq r_1$$



Věta (Stejnolehlost dvou kružnic)

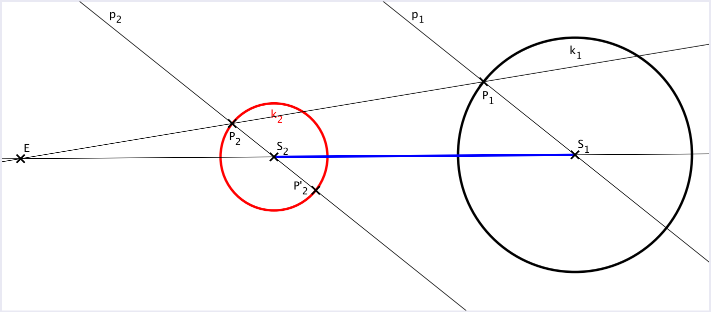
$$S_1 \neq S_2 \wedge r_1 \neq r_1$$



Stejnolehlost dvou kružnic

Věta (Stejnolehlost dvou kružnic)

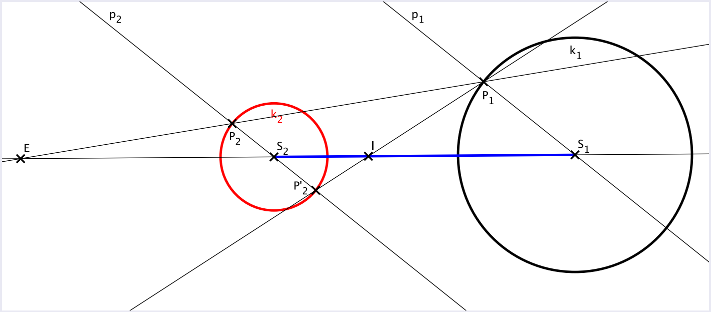
$$S_1 \neq S_2 \wedge r_1 \neq r_1$$



Stejnolehlost dvou kružnic

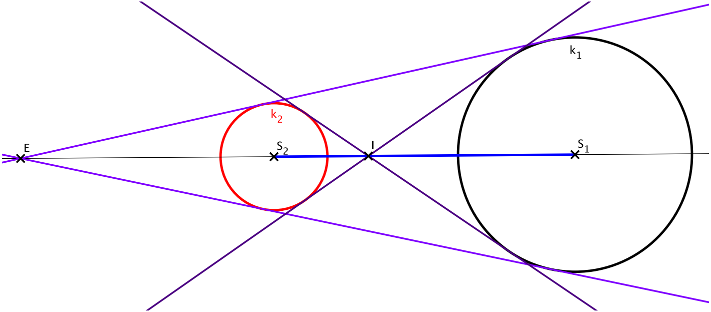
Věta (Stejnolehlost dvou kružnic)

$$S_1 \neq S_2 \wedge r_1 \neq r_1$$



Aplikace: sestrojení tečen dvou kružnic.

$$S_1 \neq S_2 \wedge r_1 \neq r_1$$

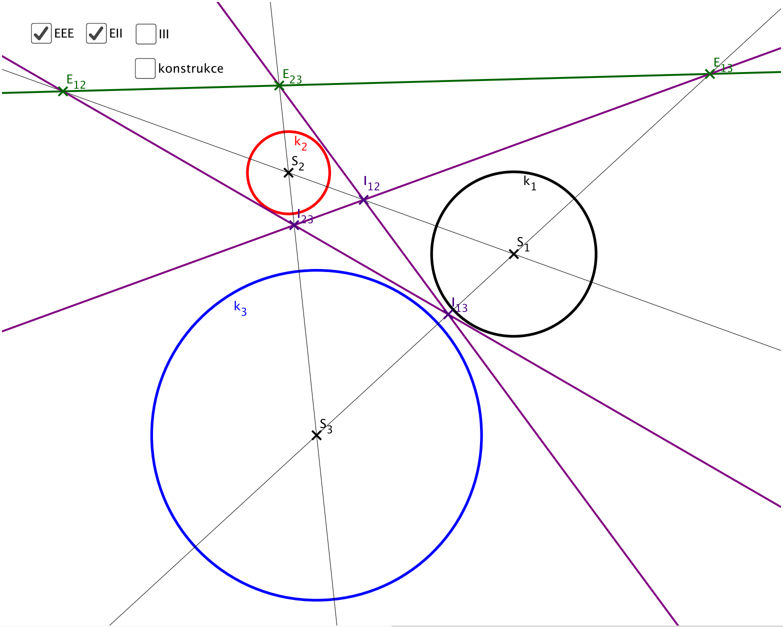


Věta (Mongeova věta)

Jsou-li k_1, k_2, k_3 kružnice s nekolineárními různými středy a různými poloměry, pak platí pro vnější a vnitřní středy stejnolehlosti každých dvou z těchto kružnic:

- *všechny 3 vnější středy stejnolehlosti (E_{12}, E_{23}, E_{13}) leží v přímce*
- *každé dva vniřní středy stejnolehlosti a jeden vnějši leží v přímce*
- *3 vnitřní středy stejnolehlosti (I_{12}, I_{23}, I_{13}) neleží v přímce*

Mongeova věta



Mongeova věta

Věta (Mongeova věta)

Důkaz

Použijeme vlastnosti Mongeovy grupy
Vnější stejnolehlost mezi k_1 *a* k_2 *je* $H_{12}(E_{12}, \frac{r_2}{r_1})$.
Vnitřní stejnolehlost mezi k_1 *a* k_2 *je* $H'_{12}(I_{12}, -\frac{r_2}{r_1})$.

Vnější stejnolehlost mezi k_2 *a* k_3 *je* $H_{23}(E_{23}, \frac{r_3}{r_2})$.
Vnitřní stejnolehlost mezi k_2 *a* k_3 *je* $H'_{23}(I_{23}, -\frac{r_3}{r_2})$.

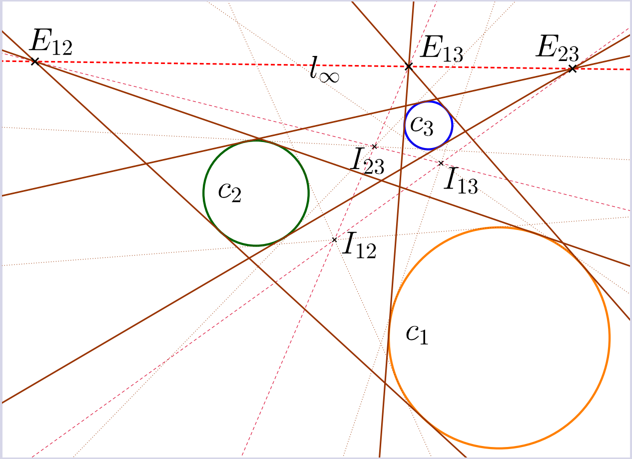
Vnější stejnolehlost mezi k_1 *a* k_3 *je* $H_{13}(E_{13}, \frac{r_3}{r_1})$.
Vnitřní stejnolehlost mezi k_1 *a* k_3 *je* $H'_{13}(I_{13}, -\frac{r_3}{r_1})$.

$H_{13} = H_{23} \circ H_{12}$ *a* E_{13} *leží na přímce* $\overleftrightarrow{E_{12}E_{23}}$
$H'_{13} = H_{23} \circ H'_{12}$ *a* I_{13} *leží na přímce* $\overleftrightarrow{I_{12}E_{23}}$ *atd.*

Mongeova věta

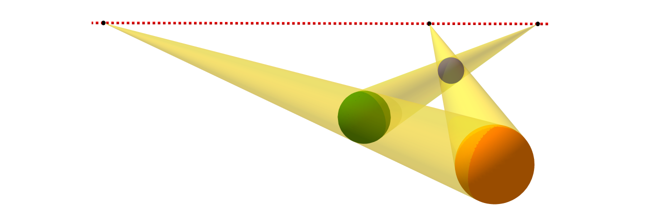
Věta (Mongeova věta)

Důkaz



Věta (Mongeova věta)

Důkaz



Stejnolehlost - kružnicový dodatek

Věta

Každou přímou vlastní podobnost lze rozložit na stejnolehlost a otočení se stejným středem.

Důkaz

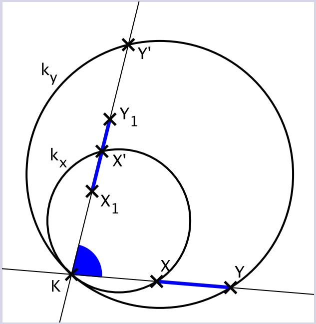
Přímá vlastní podobnost je zadána 2 páry odpovídajících si bodů $X, Y \to X', Y'$.
1) $\overline{XY} \parallel \overline{X'Y'}$*, potom existuje stejnolehlost.*
2) $\overline{XY} \nparallel \overline{X'Y'} \Rightarrow \exists K \in \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{X'Y'}$.
Sestrojíme kružnice opsané $k_x(XX'K), k_y(YY'K)$*:*
2a) k_x, k_y *mají společný právě bod* K *a platí (stejnolehlost* k_x *a* k_y*), že* $\frac{|KX|}{|KX'|} = \frac{|KY|}{|KY'|}$
rotace se středem $K : X \to X_1, Y \to Y_1$ *a následně stejnolehlost se středem* $K : X_1 \to X', Y_1 \to Y'$.

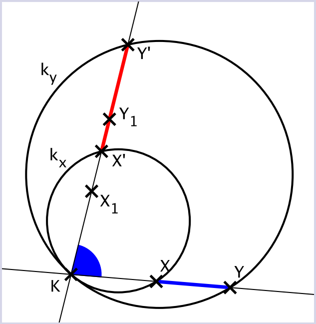
Věta

Každou přímou vlastní podobnost lze rozložit na stejnolehlost a otočení se stejným středem.

Důkaz

2a)





Stejnolehlost - kružnicový dodatek

Věta

Každou přímou vlastní podobnost lze rozložit na stejnolehlost a otočení se stejným středem.

Důkaz

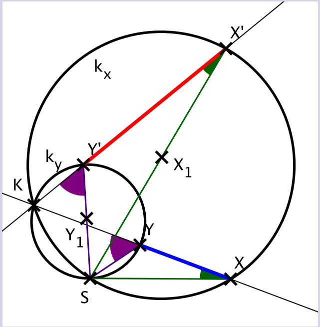
2b) k_x, k_y mají společné body $K, S \to$ obvodové úhly $|\sphericalangle SXK| = |\sphericalangle SX'K|$; $|\sphericalangle SYK| = |\sphericalangle SY'K|$, a $\triangle SXY \sim \triangle SX'Y'$ (podle uu), takže použijeme rotaci se středem S o úhel $\sphericalangle XSX' : X \to X_1, Y \to Y_1$. a potom stejnolehlost se středem $S : X_1 \to X', Y_1 \to Y'$.

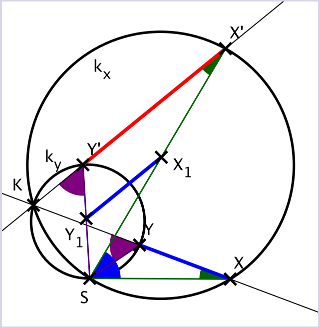
Věta

Každou přímou vlastní podobnost lze rozložit na stejnolehlost a otočení se stejným středem.

Důkaz

2b)





Stejnolehlost - kružnicový dodatek

Věta

Každou nepřímou vlastní podobnost lze rozložit na stejnolehlost a osovou souměrnost, jejíž osa prochází středem stejnolehlosti.

Věta

Každá vlastní podobnost má právě jeden samodružný bod.

Důkaz

Důsledek předešlých dvou vět je, že existuje alespoň jeden samodružný bod. Kdyby existovali dva samodružné body, tak jejich vzdálenost se zachovává a jde o shodnost.

Chordála dvou kružnic

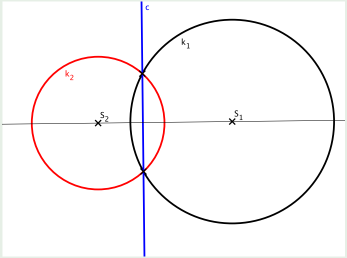
Definice (Chordála)

Množina všech bodů, které mají stejnou mocnost k dvoum nesoustředným kružnicím se nazývá *chordála*.

Chordála je přímka kolmá ke středné (bez důkazu).

Konstrukce

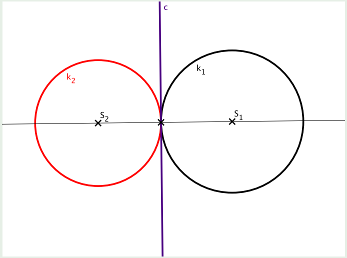
$k_1 \cap k_2$ ve dvou bodech

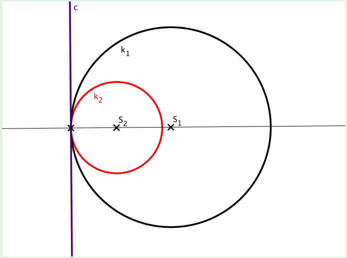


Chordála dvou kružnic

Konstrukce

$k_1 \cap k_2$ v jednom bodě

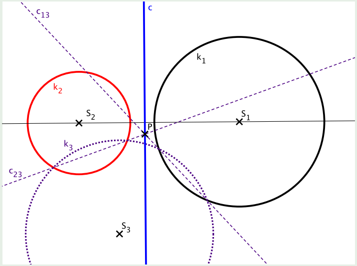


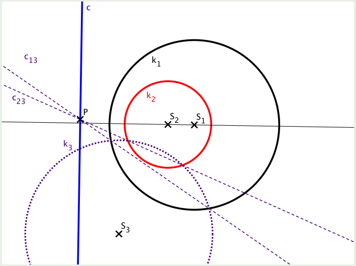


Chordála dvou kružnic

Konstrukce

k_1 a k_2 nemají společný bod





Použijeme třetí kružnici, která má 2 společné body s oběma kružnicemi. Průsečík jejich chordál se nazývá *potenční střed* a leží na chordále k_1 a k_2.

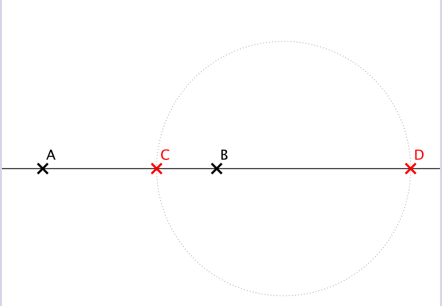
Věta (Apolloniova kružnice)

Nechť jsou v rovině dány dva různé body A, B *a číslo* $0 < \lambda \neq 1$.
Množinou všech bodů X *dané roviny, pro něž platí* $|AX| : |BX| = \lambda$, *je kružnice* k *sestrojená nad průměrem* $\overline{CD}$, *kde* C *a* D *jsou body přímky* $\overleftrightarrow{AB}$, *splňující vztah*

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|} = \lambda.$$

Věta (Apolloniova kružnice)

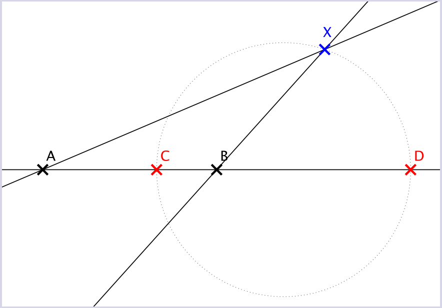
Důkaz ($\Rightarrow$)



1. najdeme body C, D na přímce $\overleftrightarrow{AB}$, splňující $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|} = \lambda$.

Věta (Apolloniova kružnice)

Důkaz (⇒)

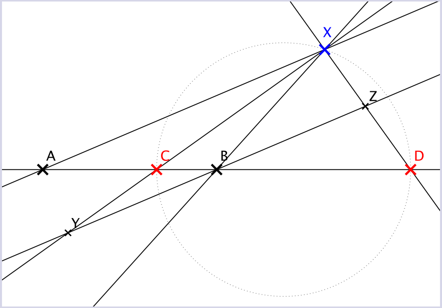


2. nechť pro X platí $\frac{|AX|}{|BX|} = \lambda$*. Dokážeme, že X leží na Thalétově kružnici nad průměrem* $\overline{CD}$ *.*

Apolloniova kružnice

Věta (Apolloniova kružnice)

Důkaz ($\Rightarrow$)

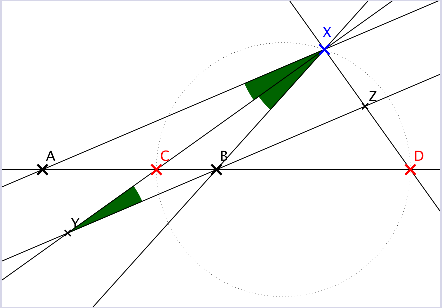


Bodem B vedeme rovnoběžku s $\overline{AX} \rightarrow \triangle XYZ$.

Apolloniova kružnice

Věta (Apolloniova kružnice)

Důkaz (⇒)

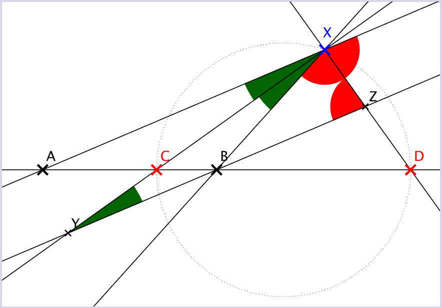


$$\triangle ACX \overset{uu}{\sim} \triangle BCY \Rightarrow \frac{AX}{BY} = \frac{AC}{BC} = \lambda = \frac{AX}{BX} \Rightarrow |BY| = |BX|$$

Apolloniova kružnice

Věta (Apolloniova kružnice)

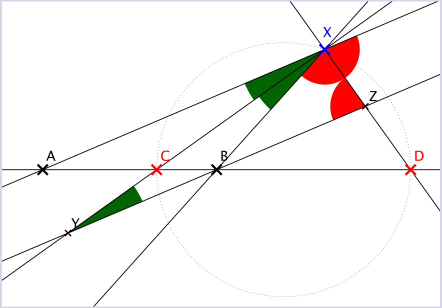
Důkaz ($\Rightarrow$)



$$\triangle ADX \overset{uu}{\sim} \triangle BDZ \Rightarrow \frac{AX}{BZ} = \frac{AD}{BD} = \lambda = \frac{AX}{BX} \Rightarrow |BZ| = |BX|$$

Věta (Apolloniova kružnice)

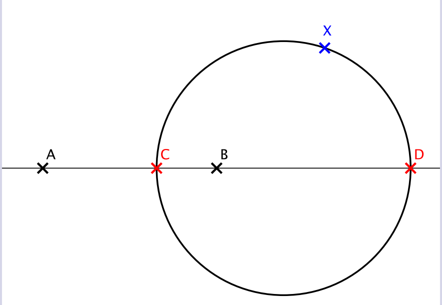
Důkaz ($\Rightarrow$)



$2\sphericalangle(BXC) + 2\sphericalangle(BXD) = 180 \Rightarrow X$ *leží na Thalétově kružnici.*

Věta (Apolloniova kružnice)

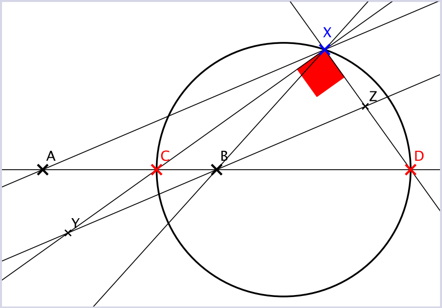
Důkaz ($\Leftarrow$)



Nechť X leží na kružnici nad průměrem $\overline{CD}$.

Věta (Apolloniova kružnice)

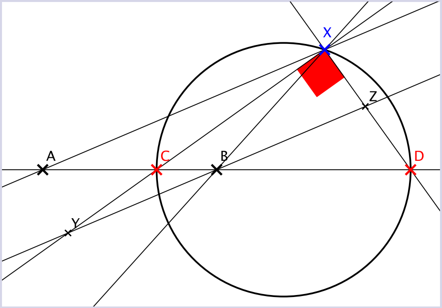
Důkaz ($\Leftarrow$)



Ze stejných trojúhelníků jak v „$\Rightarrow$“ platí $|BY| = |BZ|$ a tedy X leží na Thalétově kružnici se středem B a poloměrem $|BY| = |BZ| = |BX|$.

Věta (Apolloniova kružnice)

Důkaz ($\Leftarrow$)



Konečně $\lambda = \dfrac{|AX|}{|BY|} = \dfrac{|AX|}{|BX|}$.