Planimetrie

Shodnost

Michal Zamboj

Pedagogická fakulta

2022

www2.karlin.mff.cuni.cz/~zamboj/

Vzdálenost dvou bodů

Definice (Vzdálenost)

Nechť $A, B, C \in \rho$. Vzdálenost dvou bodů A, B v rovině je číslo $|AB|$ a platí

$$|AB| \geq 0 \land |AB| = 0 \Leftrightarrow A = B \qquad \text{„pozitivně definitní“}$$
$$|AB| = |BA| \qquad \text{„symetrie“}$$
$$|AC| \leq |AB| + |BC| \qquad \text{„}\triangle \neq\text{“}$$

Vzdálenost měříme pomocí zadané jednotkové vzdálenosti, kterou přenášíme pohybem (třeba kružítkem, stupnicí na pravítku …)

Vzdálenost bodu a přímky, délka úsečky

Definice (Vzdálenost bodu a přímky)

Vzdálenost bodu A od přímky p je vzdálenost bodu A od kolmého průmětu A' bodu A na přímku p.

Definice (Délka úsečky)

Délka úsečky je vzdálenost její koncových bodů.

Délky v $\triangle$

Věta („$\triangle \neq$“)

V trojúhelníku se stranami a, b, c platí:

$$a < b + c \wedge b < a + c \wedge c < a + b$$

neboli

$$|a - b| < c < a + b$$

Definice (Klasifikace $\triangle$ podle délek stran)

Obecný, $a \neq b \neq c \neq a$.

Rovnoramenný, dvě strany (*ramena*) jsou stejné délky. Třetí strana se nazývá *základna*.

Rovnostranný, všechny strany jsou stejně dlouhé.

Obsah

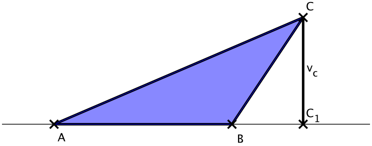
Definice (Obsah)

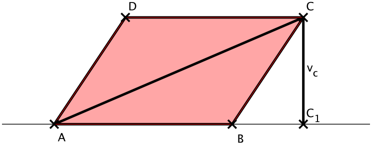
Obsah S rovinného útvaru je kladné číslo přiřazené útvaru tak, že platí:

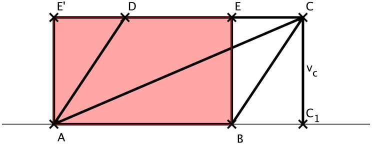
1. shodné útvary mají stejný obsah
2. skláda-li se útvar z několika disjunktních útvarů, pak je jeho obsah součtem obsahů těchto útvarů
3. obsah čtverce o straně $1j$ $(cm, mm, \dots)$ je $1j^2$ $(cm^2, mm^2, \dots)$

Obsah trojúhelníku $\triangle ABC$ je

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2} a v_a = \frac{1}{2} b v_b = \frac{1}{2} c v_c$$

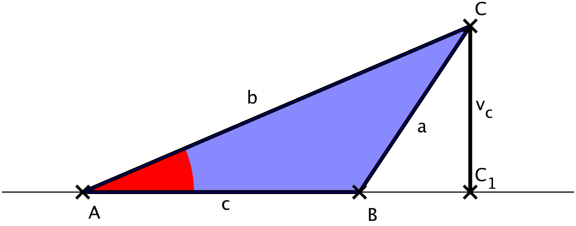






Obsah trojúhelníku $\triangle ABC$ je

$$S_\triangle = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta$$



$$S_\triangle = \frac{1}{2}cv_c = \frac{1}{2}cb\sin\alpha$$

Eukleidovy věty

Eukleidés (cca 3.-4. st. p. n. l.)

Eukleidovy věty

Věta (Eukleidova o výšce)

Je dán trojúhelník $\triangle ABC$. Trojúhelník $\triangle ABC$ je pravoúhlý s pravým úhlem při vrholu C právě tehdy, když pata C_1 výšky v_c na stranu c rozděluje stranu c na úseky $c_a = \overline{C_1B}$, $c_b = \overline{C_1A}$, pro které platí $v_c^2 = c_a c_b$.

Důkaz

„$\Rightarrow$“ (Přímo)

$\triangle ABC$ *je pravoúhlý* $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle CBC_1 \sim \triangle ACC_1$ *podle (uu)*

$$\Rightarrow \frac{v_c}{c_b} = \frac{c_a}{v_c} \Rightarrow v_c^2 = c_a c_b.$$

„$\Leftarrow$“ (Sporem)

Nechť v $\triangle ABC$ *platí* $v_c^2 = c_a c_b \Rightarrow ?$ *je pravoúhlý.*

Není-li $\triangle ABC$ *pravoúhlý pak existuje* $A' \in \overline{AB} \cap (\overline{CA'} \perp \overline{CB})$.

Označme $\overline{A'C_1} = c_b'$, *pak dle „$\Rightarrow$“ platí v* $\triangle A'BC : v_c^2 = c_a c_b'$ *a podle předpokladu* $v_c^2 = c_a c_b$, *tedy* $c_b' = c_b$ *a* $A' = A$.

Eukleidovy věty

Věta (Eukleidova o odvěsně)

Je dán trojúhelník $\triangle ABC$. Trojúhelník $\triangle ABC$ je pravoúhlý s pravým úhlem při vrholu C právě tehdy, když pata C_1 výšky v_c na stranu c rozděluje stranu c na úseky $c_a = \overline{C_1 B}$, $c_b = \overline{C_1 A}$, pro které platí $a^2 = cc_a$ $(b^2 = cc_b)$.

Důkaz

„$\Rightarrow$“ (Přímo)

$\triangle ABC$ *je pravoúhlý* $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle CBC_1$ *podle (uu)*

$$\Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{a}{c_a} \Rightarrow a^2 = cc_a.$$

„$\Leftarrow$“ (Sporem)

Nechť v $\triangle ABC$ *platí* $a^2 = cc_a \Rightarrow ?$ *je pravoúhlý.*

Stejně jako v Eukleidově větě o výšce ☺... $c = c'$.

Pýthagorás (cca 6. st. p. n. l.)

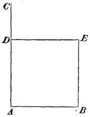
Pýthagorova věta

Tedy na daném $\sphericalangle FKM$, jenž se rovná danému $\sphericalangle E$, sestrojen jest rovnoběžník $KFLM$ rovný danému útvaru přímkovému $ABCD$; což právě bylo vykonati.

XLVI.

Na dané přímce narýsuj čtverec.

Danou přímkou buď AB; má se tedy na přímce AB narýsovati čtverec.

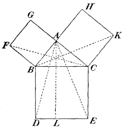


Veďme ku přímce AB z bodu na ní A kolmici AC, a buď $AD = AB$; a z bodu D veďme $DE \parallel AB$, z bodu pak B veďme $BE \parallel AD$. Tedy $ADEB$ jest rovnoběžník; tedy $AB = DE$, $AD = BE$; ale $AB = AD$; tedy všecky čtyři, BA, AD, DE, EB, jsou si rovny; pročež rovnoběžník $ADEB$ je stejnostranný. Pravím ovšem, že též pravoúhlý. Neboť ježto rovnoběžky AB, DE protala přímka AD, tedy $\sphericalangle BAD + ADE = 2R$. Avšak BAD jest pravý, tedy jest pravý též ADE. V rovnoběžnících pak protější strany i úhly jsou si navzájem rovny; tedy též oba protější úhly ABE, BED jsou pravé. Tedy $ADEB$ jest obrazec pravoúhlý. Dokázáno však bylo, že též stejnostranný.

Jest to tedy čtverec a jest narýsován na přímce AB; co právě bylo vykonati.

XLVII.

V pravoúhlých trojúhelnících čtverec na straně proti úhlu pravému ležící rovná se čtvercům na stranách pravý úhel svírajících (»věta Pythagorova«).



Trojúhelníkem pravoúhlým buď ABC, maje pravý úhel BAC; pravím, že čtverec na BC rovná se (součtem) čtvercům na BA a na AC.

Nuže buď narýrován na BC čtverec $BDEC$, na BA, AC pak GB, HC, a z bodu A vedena buď $AL \parallel BD$ nebo CE a spojnice AD, FC. A ježto $\sphericalangle BAC$ i BAG jsou pravé, tož na jakési přímce BA a při bodě na ní A dvě přímky AC, AG na rozličných stranách tvoří stýkavé úhly rovné dvěma pravým, tedy CA, AG činí přímku; z téže příčiny ovšem též BA, AH činí přímku (I. XIV.). A ježto $\sphericalangle DBC = FBA$, oba totiž jsou pravé; společný přičtěmež ABC; tedy celý $\sphericalangle DBA = FBC$. A ježto $DB = BC$ a $FB = BA$, jsou ovšem DB, BA oběma FB, BC jednotlivě rovny, a $\sphericalangle DBA = FBC$; tedy základna $AD = FC$ a $\triangle ABD = FBC$; a dvakrát větší než $\triangle ABD$ jest rovnoběžník BL; neboť mají touž základnu a jsou mezi týmiž rovnoběžkami BD, AL (I. XLI.); a dvakrát větší než $\triangle FBC$ je čtverec GB, neboť mají touž základnu a jsou mezi týmiž rovnoběžkami FB, GC. [Dvojnásobky pak týchž veličin jsou si rovny.] Tedy též rovnoběžník BL rovná se čtverci GB.

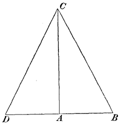
Podobně ovšem vedením spojnic AE, BK dokáže se, že též rovnoběžník CL rovná se čtverci HC. Celý tedy čtverec $BDEC$ rovná se součtu obou čtverců GB, HC. I jest čtverec $BDEC$ narýsován na BC, a GB, HC na BA, AC. Tedy $BC^2 = BA^2 + AC^2$.

Tedy v pravoúhlých trojúhelnících — —.

XLVIII.

Když v trojúhelníku čtverec na jedné ze stran rovná se čtvercům na dvou ostatních stranách trojúhelníku, úhel ostatními dvěma stranami trojúhelníku sevřený jest pravý.

Nuže v $\triangle ABC$ čtverec na jedné straně BC buď roven součtu čtverců na BA, AC; pravím, že $\sphericalangle BAC$ jest pravý.



Nuže veďme z bodu A ku přímce AC kolmici AD, a buď $BA = AD$, a veďme spojnici DC. Ježto $DA = AB$, také čtverec na DA roven čtverci na AB. Společným přičtěme čtverec na AC; tedy $DA^2 + AC^2 = BA^2 + AC^2$. Avšak $DA^2 + AC^2 = DC^2$, neboť $\sphericalangle DAC$ jest pravý; čtverce však $BA^2 + AC^2 = BC^2$; to je totiž podmínkou; tedy $DC^2 = BC^2$, takže též strana $DC = BC$. A ježto $DA = AB$, společnou pak jest AC, patrně obě DA, AC jsou oběma BA, AC jednotlivě rovny a základna $DC = BC$; tedy $\sphericalangle DAC = BAC$. Úhel však DAC jest pravý; pravý tedy též $\sphericalangle BAC$.

Když tedy v trojúhelníku čtverec — —.

Kniha druhá.

Výměry.

1. O každém pravoúhlém rovnoběžníku pravíme, že jej svírají dvě přímky, svírající pravý úhel.

2. V každém útvaru rovnoběžníkovém kterýkoli z rovnoběžníkův objímajících jeho úhlopříčku se dvěma doplňky nazýván buď soudélníkem (gnómón).

Pýthagorova věta

Věta (Pýthagorova)

Je dán trojúhelník $\triangle ABC$. Trojúhelník $\triangle ABC$ je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C, právě tehdy, když $c^2 = a^2 + b^2$.

Důkaz (jeden z mnoha)

„$\Rightarrow$“ (Přímo)

z Eukleidovych vět o odvěsně a výšce:

$a^2 + b^2 = cc_a + cc_b = c(c_a + c_b) = c^2$.

„$\Leftarrow$“ (Sporem)

Nechť v $\triangle ABC$ platí $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow ?$ je pravoúhlý.

Sestrojíme A' (2 možnosti) stejně jako v Eukleidovych větách. Označme $\overline{CA'} = b'$, $\overline{AA'} = d$.

1)$\triangle AC_1C \rightarrow b^2 = v_c^2 + c_b^2$

2)$\triangle A'C_1C \rightarrow b'^2 = v_c^2 + c_b'^2$

3)$\triangle A'CB \rightarrow c'^2 = a^2 + b'^2$.

Dosadíme 2) *do* 3) : $(c \pm d)^2 = a^2 + v_c^2 + (c_b \pm d)^2$.

Dosadíme 1) *do předpokladu:* $c^2 = a^2 + v_c^2 + c_b^2$

$\Rightarrow cd = c_b d \Leftrightarrow d = 0$.

Pravoúhlý $\triangle$ s celočíselnými délkami stran nazýváme *pýthagorejský*.

Kosinová věta

Věta (Kosinová)

V libovolném $\triangle ABC$ se stranami a, b, c a vnitřními úhly α, β, γ platí:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Důkaz

pro ostroúhlý $\triangle \rightarrow \triangle AC_1C : b^2 = v_c^2 + c_b^2 = v_c^2 + (b\cos\alpha)^2$
$\triangle BC_1C : a^2 = v_c^2 + (c - b\cos\alpha)^2$
odečtením dostáváme $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
podobně pro tupoúhlý $\triangle$ $(\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha)$.

Obsah △ 3) - Hérónův vzorec

Hérón 1. pol 1. st. n.l.

Obsah $\triangle$ 3) - Hérónův vzorec

Obsah trojúhelníku $\triangle ABC$ je

$$S_\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \text{ kde } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

$$\begin{aligned} S_\triangle &= \tfrac{1}{2}ab\sin\gamma \\ 16S_\triangle^2 &= 4a^2b^2\sin^2\gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos\gamma \\ 4a^2b^2\cos^2\gamma &= (c^2-(a^2+b^2))^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4a^2b^2 &= 16S_\triangle^2 + (c^2-(a^2+b^2))^2 \\ 16S_\triangle^2 &= (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \\ S_\triangle^2 &= s(s-a)(s-b)(s-c) \end{aligned}$$

Kružnice ◯

Definice (◯)

Kružnice $k(S, r)$ je množina všech bodů, které mají od daného pevného bodu S vzdálenost r.
S - střed kružnice
r - poloměr kružnice

Osa úsečky

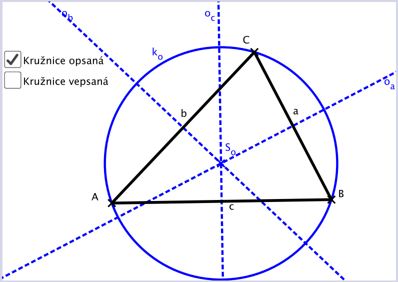
Definice (Osa úsečky)

Osa úsečky je množina všech bodů stejně vzdálených od krajních bodů úsečky.

Věta (Osy stran)

Osy stran v trojúhelníku se protínají v jednom bodě S_o, který je středem kružnice opsané trojúhelníku.

Důkaz.



$$S_o \in o_a \cap o_c$$
$$S_o \in o_a \Rightarrow |S_oB| = |S_oC|$$
$$S_o \in o_c \Rightarrow |S_oA| = |S_oB|$$

$|S_oA| = |S_oB| = |S_oC|$
a body A, B, C leží
na kružnici k_o
se středem S_o.

□

Osa úhlu

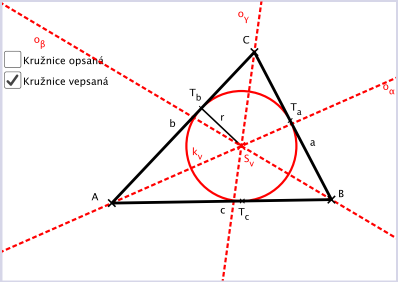
Definice (Osa úhlu)

Osa úhlu je množina všech bodů stejně vzdálených od ramen úhlu.

Věta (Osy úhlů)

Osy vnitřních úhlů v trojúhelníku se protínají v jednom bodě S_v, který je středem kružnice vepsané do trojúhelníku.

Důkaz.



$$S_v \in o_\alpha \cap o_\gamma$$
$$S_v \in o_\alpha \Rightarrow$$
$$|S_v; \overleftrightarrow{AB}| = |S_v; \overleftrightarrow{AC}|$$
$$S_v \in o_\gamma \Rightarrow$$
$$|S_v; \overleftrightarrow{AC}| = |S_v; \overleftrightarrow{BC}|$$

$$|S_v; \overleftrightarrow{AB}| = |S_v; \overleftrightarrow{BC}|$$
a S_v leží na o_β.

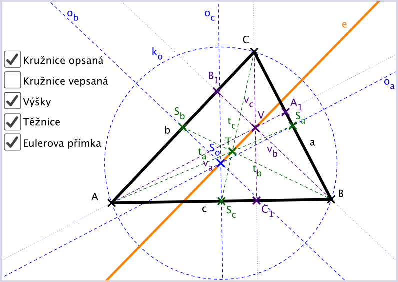
S_v je střed kružnice vepsané k_v, která se dotýká stran $\triangle ABC$ v bodech T_a, T_b, T_c. $\square$

Eulerova přímka

Věta (Eulerova přímka)

V každém nerovnostranném trojúhelníku leží střed kružnice opsané S_o, těžiště T a ortocentrum V na jedné přímce.

Důkaz.



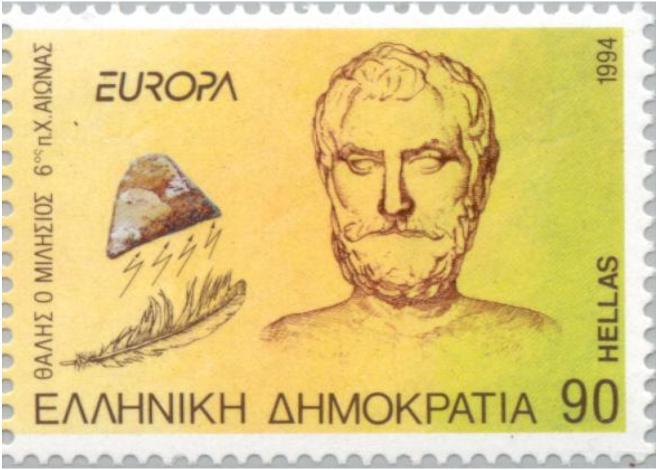
Stejnolehlost $H(T, -2)$:

$$S_c \to C$$
$$S_a \to A$$
$$o_c \to v_c$$
$$o_a \to v_a$$
$$S_o \in o_c \cap o_a \to V \in v_c \cap v_a$$

$$\overleftrightarrow{TS_oV}$$

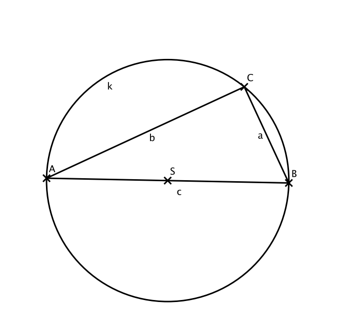
□

Thalés 7.-6.st. p.n.l.



Věta (Thalétova kružnice)

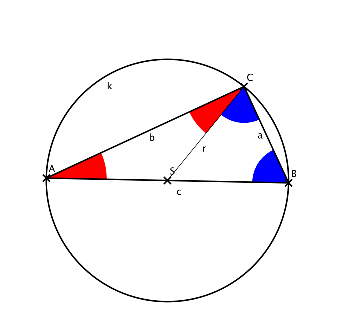
Nechť $\overline{AB}$ je průměrem kružnice k a bod C je libovolný bod na kružnici k takový, že $A \neq C \neq B$, pak úhel $\sphericalangle ACB$ je pravý.



Věta (Thalétova kružnice)

Nechť $\overline{AB}$ je průměrem kružnice k a bod C je libovolný bod na kružnici k takový, že $A \neq C \neq B$, pak úhel $\sphericalangle ACB$ je pravý.

Důkaz.



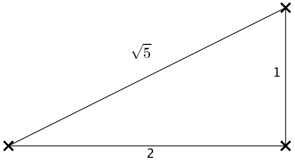
□

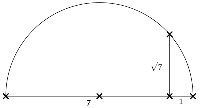
Eukleidovské konstrukce

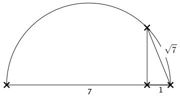
Konstrukce pomocí pravítka a kružítka.
Jsou dány body $B_1, \ldots, B_m$. Každý další bod je možné sestrojit jako průsečík

- dvou přímek, které jsou určeny danými body
- dvou kružnic, které jsou určeny danými body
- přímky a kružnice, které jsou určeny danými body

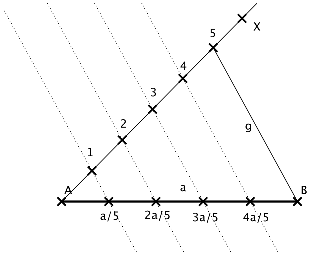
Využití eukleidových a Pýthagorovy věty

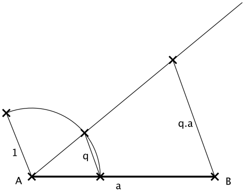






Dělení úsečky v daném poměru.





Definice (Shodná zobrazení - izometrie)

Zobrazení $f : \rho \to \rho$ se nazývá *shodné zobrazení* neboli *shodnost, izometrie*, právě když pro libovolné dva různé body $A, B \in \rho$ a jejich obrazy A', B' platí

$$|A'B'| = |AB|.$$

přímá shodnost zachovává orientaci prostoru $\circlearrowright \to \circlearrowright$

nepřímá shodnost nezachovává orientaci prostoru $\circlearrowright \to \circlearrowleft$

Věty o shodných $\triangle$

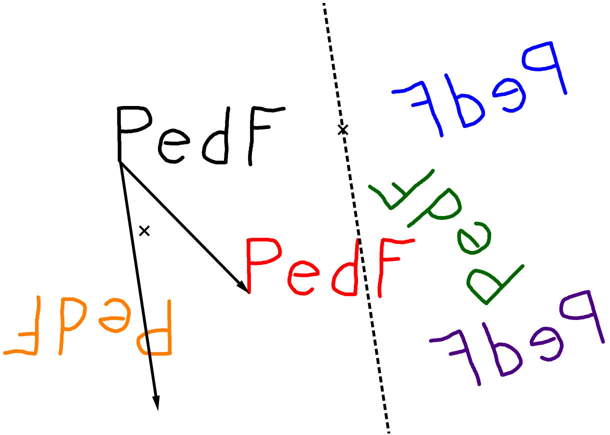
Definice (Shodné útvary)

Dva útvary S_1 a S_2 jsou shodné $S_1 \cong S_2$ právě tehdy, když existuje shodnost, která zobrazí S_1 na S_2.

Věta (Shodné $\triangle$)

Dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se

- sss *v délkách všech stran.*
- sus *v délkách dvou stran a úhlu jimi sevřeném.*
- usu *v délke jedné strany a dvou vnitřných úhlech, které ji svírají.*
- Ssu *v délkách dvou stran a úhlu proti delší z nich.*


PedF
PedF

Věta (Grupa shodností)

Všechna shodná zobrazení v rovině tvoří grupu vzhledem ke skládání zobrazení.

Důkaz (Náznak)

Uzavřenost. $|A'B'| = |AB|; |A''B''| = |A'B'| \Rightarrow |AB| = |A''B''|$. *T.j. skládáním shodností dostaneme shodnost.*
Asociativita.
Neutrální prvek je identita.
Inverzní prvek.

Vlastnosti shodnosti

Věta (Vlastnosti shodnosti)

Shodnost

1. *zachovává incidenci.*
2. *zachovává uspořádání.*
3. *zachovává dvojpoměr.*
4. *zachovává středy úseček (a dělicí poměr).*
5. *zachovává poměry úseček a velikosti úhlů.*
6. *zachovává délky úseček (a obsahy).*

Definice (Osová souměrnost)

Osová souměrnost $O(o)$ s osou o je shodné zobrazení v rovině, které přiřazuje každému bodu $X \notin o$ bod X' tak, že o je osa úsečky $\overline{XX'}$. Osa o je přímka samodružných bodů.

Samodružné body: $\forall$ SB leží na o.
Samodružné přímky: $\forall$ přímky $\perp$ k ose a osa o.
Samodružné směry: $\forall$ směry $\perp$ a $\parallel$ s osou.

Klasifikace shodností - osová souměrnost

Věta

Libovolné shodné zobrazení v rovině je buď osovou souměrností, nebo jej lze rozložit na nejvýše 3 osové souměrnosti.

Důkaz (konstrukcí)

Nechť je shodné zobrazení dáno 3 páry odpovídajících si nekolineárních bodů $X, Y, Z \to X', Y', Z'$. *Sestrojíme postupně osové souměrnosti (v obecném případě):*

$O_1 : X \to X_1 = X', Y \to Y_1, Z \to Z_1$

$O_2 : X_1 = X_2 = X', Y_1 \to Y_2 = Y', Z_1 \to Z_2$

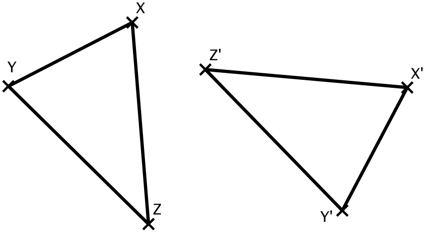
$O_3 : X_2 = X_3 = X', Y_2 = Y_3 = Y', Z_2 \to Z_3 = Z'$

Klasifikace shodností - osová souměrnost

O1

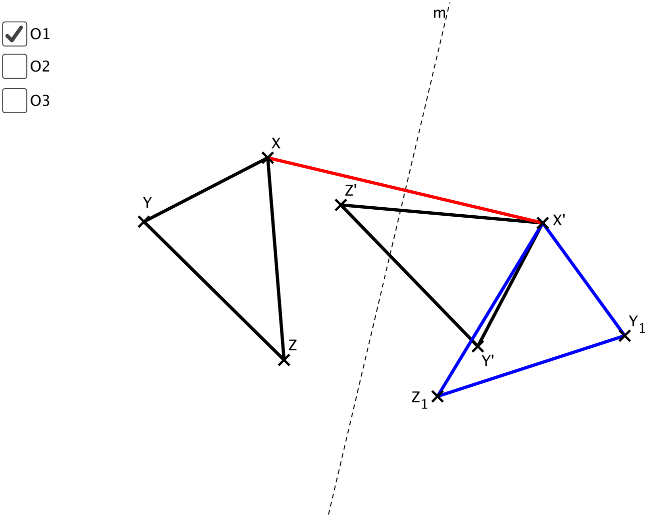
O2

O3

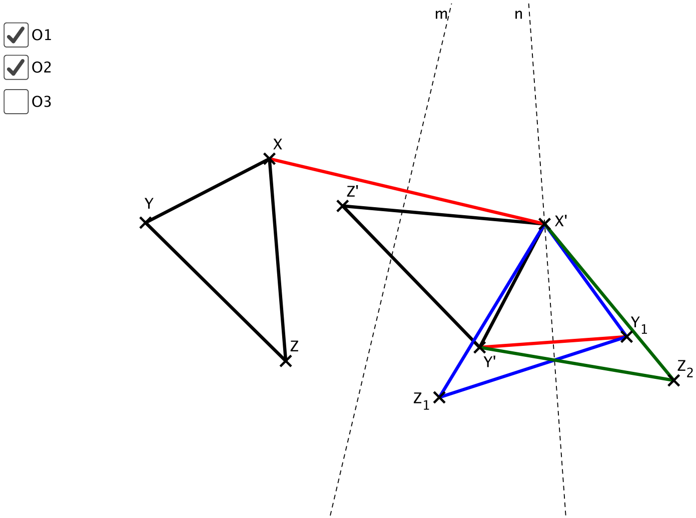


Klasifikace shodností - osová souměrnost

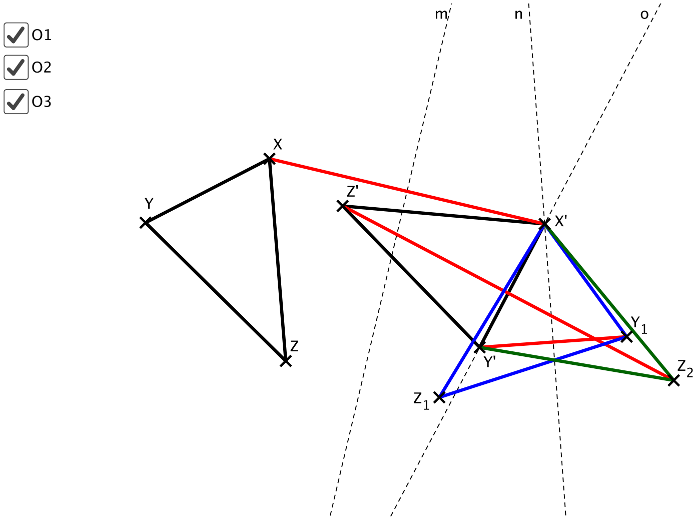
Nechť m je osa úsečky $\overline{XX'}$, volíme $O_1(m)$.



Nechť n je osa úsečky $\overline{Y_1 Y'}$, volíme $O_2(n)$.



Nechť o je osa úsečky $\overline{Z_2Z'}$, volíme $O_3(o)$.



Klasifikace shodností - posunutí (translace)

Definice (Posunutí, translace)

Posunutí, translace $T(\overrightarrow{XX'})$ je shodné zobrazení v rovině, které každému bodu X přiřazuje bod X' tak, že pro každou další dvojici odpovídajících si bodů Y, Y' platí, že úsečky $\overline{XY'}, \overline{X'Y}$ mají společný střed.

Samodružné body: pro $T \neq Id$ neexistují žádne samodružné body.
Samodružné přímky: pro $T \neq Id : \forall$ přímky $\| \overline{XX'}$.
Samodružné směry: $\forall$ směry.

Klasifikace shodností - posunutí (translace)

Věta

Každé posunutí lze rozložit na 2 osové souměrnosti.

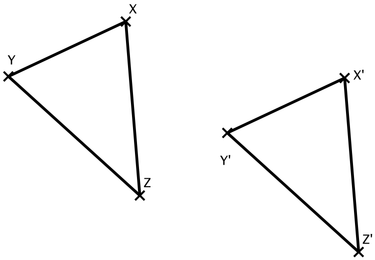
Důkaz (konstrukcí)

Nechť je posunutí dáno párem odpovídajících si bodů $X \to X'$ *a sestrojme páry nekolineárních bodů* $X, Y, Z \to X', Y', Z'$. *Volíme libovolně osovou souměrnost* $O_1(m)$ *takovou, že* $m \perp \overline{XX'}$, *potom sestrojíme druhou osovou souměrnost* $O_2(n)$ *takovou, že* $n \| m$ *:*

$O_1 : X, Y, Z \to X_1, Y_1, Z_1$

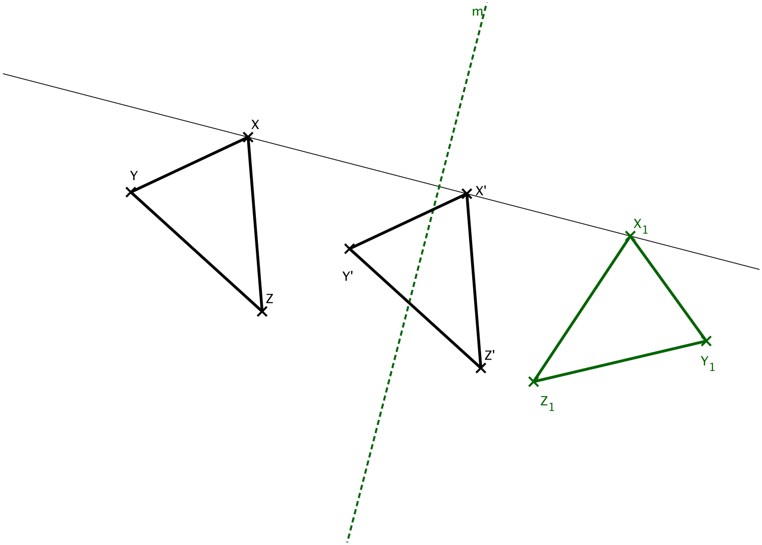
$O_2 : X_1, Y_1, Z_1 \to X', Y', Z'$

Klasifikace shodností - posunutí (translace)



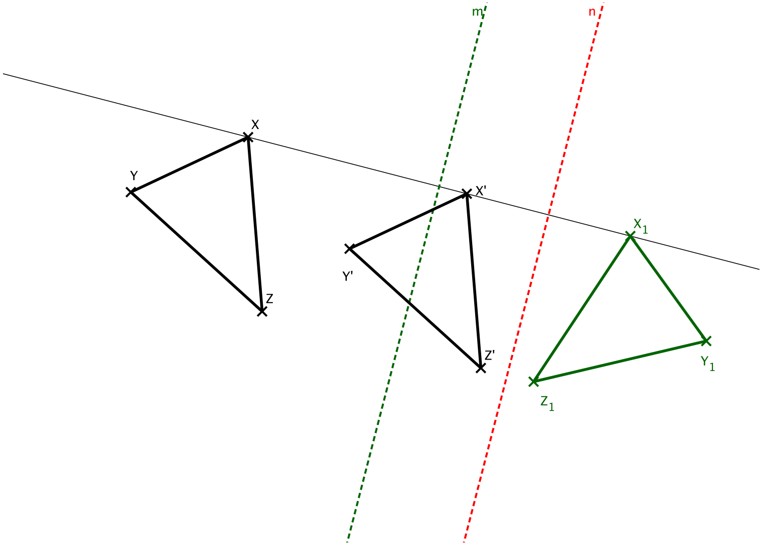
Klasifikace shodností - posunutí (translace)

Volíme $O_1(m)$, osa m je kolmá k $\overline{XX'}$.



Klasifikace shodností - posunutí (translace)

$O_2(n)$ takové, že osa n je osou $\overline{X_1X'}$.



Klasifikace shodností - posunutí (translace)

Věta (Grupa translací)

Posunutí s identitou tvoří grupu vzhledem ke skládání zobrazení.

Důkaz

Uzavřenost. $T(\overrightarrow{X'X''}) \circ T(\overrightarrow{XX'}) \Rightarrow T(\overrightarrow{XX''})$. *T.j. skládáním posunutí dostaneme posunutí.*
Asociativita.
Neutrální prvek je identita.
Inverzní prvek je opačné posunutí $T(\overrightarrow{XX'})^{-1} = T(\overrightarrow{X'X})$.

Definice (Otočení, rotace)

Otočení, rotace je shodné zobrazení v rovině $R(S,\varphi)$, které každému bodu X přiřazuje bod X' tak, že $|XS| = |X'S|$ a $|\sphericalangle X'SX| = \varphi$ je daný orientovaný úhel. Bod S je samodružný bod zobrazení.

Samodružné body: pro $R \neq Id$ je S jediný samodružný bod.
Samodružné přímky: pro $\varphi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ neexistují samodružné přímky.
Samodružné směry: pro $\varphi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ neexistují samodružné směry.

Definice (Středová souměrnost)

Středová souměrnost $S(S)$ je rotace se středem S a úhlem $\varphi = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$.

Samodružné body: S je jediný samodružný bod.
Samodružné přímky: $\forall$ přímky procházející středem.
Samodružné směry: $\forall$ směry.

Věta

Každé otočení lze rozložit na 2 osové souměrnosti, jejíchž osy svírají úhel, kterého velikost je polovina velikosti úhlu otočení.

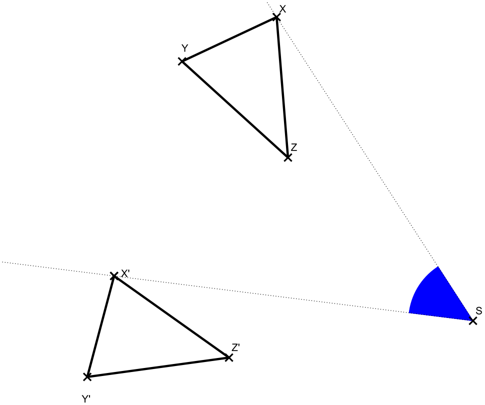
Důkaz (konstrukcí)

Nechť je otočení dáno párem odpovídajících si bodů $X \to X'$ *a středem* S *a sestrojme páry nekolineárních bodů* $X, Y, Z \to X', Y', Z'$. *Volíme libovolně osovou souměrnost* $O_1(m)$ *takovou, že* $S \in m$, *potom sestrojíme druhou osovou souměrnost* $O_2(n)$ *takovou, že* $S \in n$:

$O_1 : X, Y, Z \to X_1, Y_1, Z_1$

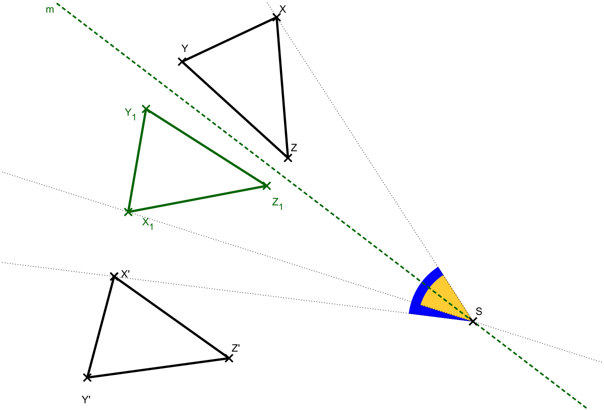
$O_2 : X_1, Y_1, Z_1 \to X', Y', Z'$

Klasifikace shodností - otočení (rotace)



Klasifikace shodností - otočení (rotace)

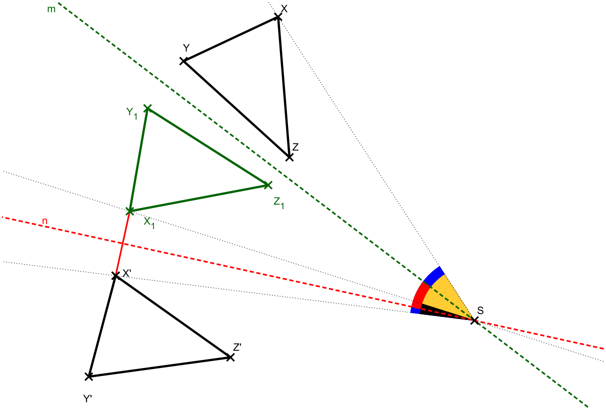
$O_1(m)$ takové, že $S \in m$.



$$|\sphericalangle(\overline{XS}, m)| = |\sphericalangle(\overline{X_1S}, m)| = \mu$$

Klasifikace shodností - otočení (rotace)

$O_2(n)$ takové, že $S \in n$ a n je osa $\overline{X_1X'}$.



$$|\sphericalangle(\overline{X_1S}, n)| = |\sphericalangle(\overline{X'S}, n| = \nu)$$
$$|\sphericalangle XSX'| = 2\mu + 2\nu, |\sphericalangle m, n| = \mu + \nu$$

Klasifikace shodností - otočení (rotace)

Věta

Otočení se stejným středem a identita tvoří grupu vzhledem ke skládání zobrazení.

Důkaz

Uzavřenost. $R(S, \psi) \circ R(S, \varphi) \Rightarrow R(S, \varphi + \psi))$*. T.j. skládáním otočení dostaneme otočení.*
Asociativita.
Neutrální prvek je identita.
Inverzní prvek je otočení o opačný úhel $R(S, \varphi)^{-1} = R(S, -\varphi)$.

Klasifikace shodností - otočení (rotace)

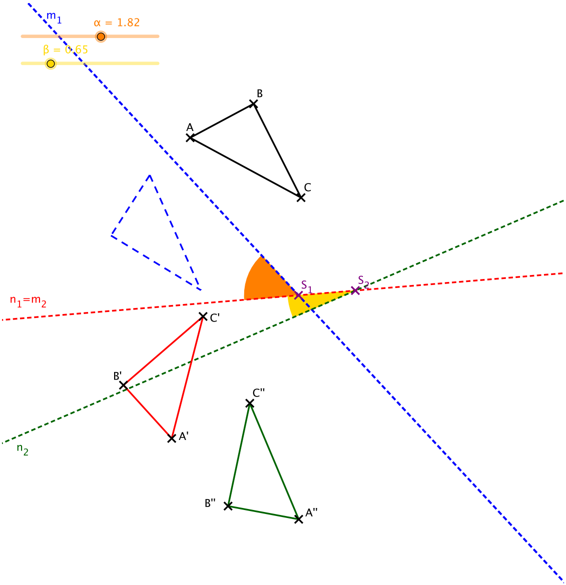
Věta

Složením dvou otočení je otočení, nebo posunutí.

Důkaz

$R_1(S_1,\varphi)$; $R_2(S_2,\psi)$.
Je-li $S_1 = S_2$ *pak tvrzení platí z předešlé věty.*
Je-li $S_1 \neq S_2$, *rozložíme otočení na osové souměrnosti*
$R_2(S_2,\psi)\circ R_1(S_1,\varphi) = (O_{22}(n_2)\circ O_{21}(m_2))\circ(O_{12}(n_1)\circ O_{11}(m_1))$.
Pro R_1 *volíme* n_1; $S_1, S_2 \in n_1$, m_1 *je tedy jednoznačně určena.*
Pro R_2 *volíme* $m_2 = n_1$ *a* n_2 *je jednoznačně určena.*
Osová souměrnost je involuce a tedy:
$O_{22}(n_2)\circ(O_{21}(n_1)\circ O_{12}(n_1))\circ O_{11}(m_1) = O_{22}(n_2)\circ O_{11}(m_1)$.
Z vět o rozkladu posunutí a otočení na osové souměrnosti:
Je-li $m_1 \| n_2$ *pak jde o posunutí.*
Je-li $m_1 \nparallel n_2$ *pak jde o otočení se středem* $S_3 \in m_1 \cap n_2$ *o úhel* $\varphi + \psi$.

Klasifikace shodností - otočení (rotace)



Klasifikace shodností - posunutá osová souměrnost

Definice (Posunutá osová souměrnost)

Posunutá osová souměrnost P je shodné zobrazení v rovině složené z osové souměrnosti a posunutí ve směru její osy.

Samodružné body: neexistují žádne samodružné body.
Samodružné přímky: osa o (pozor! není přímka samodružných bodů).
Samodružné směry: $\forall$ směry $\perp$ a $\parallel$ s osou.

Klasifikace shodností - shrnutí

Existují následující typy shodností:

přímé:

- *I* identita
- *T* posunutí (translace)
- *R* otočení (rotace) + spec. případ středová souměrnost

nepřímé:

- *O* osová souměrnost
- *P* posunutá osová souměrnost

Věta

Každou přímou shodnost lze rozložit na dvě osové souměrnosti.
Každou nepřímou shodnost lze rozložit na lichý počet osových souměrností.

Důkaz

Přímý důsledek předešlých vět a definic.

Věta (Grupa přímých shodností)

Všechna přímá shodná zobrazení v rovině tvoří grupu vzhledem ke skládání zobrazení.

Skládání shodností a podobností

Věta

Složením shodnosti a stejnolehlosti je podobnost.

Důkaz

Shodnost je nevlastní podobnost a podobnosti tvoří grupu.

Věta

Libovolnou podobnost lze rozložit na stejnolehlost a shodnost.

Důkaz

Nechť je dána podobnost s koeficientem k, která zobrazí
$X, Y, Z \to X', Y', Z'$.
Volíme libovolnou stejnolehlost s koeficientem k, která zobrazí
$X, Y, Z \to X_1, Y_1, Z_1$.
Dourčíme shodnost $X_1, Y_1, Z_1 \to X', Y', Z'$. (nejvýše 3 os. s.)

Mongeova grupa

Gaspard Monge (1746-1818)

Mongeova grupa

Věta (Mongeova grupa, grupa homotetií)

Množina všech stejnolehlostí a posunutí s identitou tvoří grupu vzhledem na skládání zobrazení.

Důkaz (viz 05_monge.ggb)

Víme: posunutí s identitou tvoří grupu, stejnolehlosti se společným středem tvoří grupu.
Skládání dvou stejnolehlostí:
Nechť je dáno $H_1(S_1, \lambda_1), H_2(S_2, \lambda_2)$*, takové, že* $S_1 \neq S_2$*:*
Je-li $\lambda_1 \lambda_2 = 1 \rightarrow |A_2 B_2| = |\lambda_1||\lambda_2||AB| = |AB|$ *a dostáváme shodnost.*
Platí, že $\lambda_1 = (A_1 A; S_1)$*, a tedy existuje dělicí poměr*
$\lambda = (AS_1; A1) = 1 - \frac{1}{\lambda_1} = 1 - \lambda_2$.
A podobně $\lambda_2 = (A_2 A_1; S_2)$*, tedy dělicí poměr* $(A_2 S_2; A_1) = 1 - \lambda_2$
Podle věty sus je $\triangle AA_1A_2 \sim \triangle S_1 A_1 S_2$ *a* $\overline{S_1 S_2} || \overline{AA_2}$.

Stejně tak pro všechny páry odpovídajících si bodů a jedná se o posunutí o $\overrightarrow{AA_2}$.

Mongeova grupa

Věta (Mongeova grupa, grupa homotetií)

Množina všech stejnolehlostí a posunutí s identitou tvoří grupu vzhledem na skládání zobrazení.

Důkaz (viz 05_monge.ggb, pokračování)

Je-li $\lambda_1\lambda_2 \neq 1 \to \overline{S_1S_2} \nparallel \overline{AA_2}$ *a využijeme Menelaovu větu:*

$$\frac{\overrightarrow{AS_3}\,\overrightarrow{A_2S_2}\,\overrightarrow{A_1S_1}}{\overrightarrow{A_2S_3}\,\overrightarrow{A_1S_2}\,\overrightarrow{AS_1}} = 1$$

$$\frac{\overrightarrow{AS_3}}{\overrightarrow{A_2S_3}}\lambda_2\lambda_1 = 1$$

$$\overrightarrow{A_2S_3} = AS_3\lambda_2\lambda_1$$

Bod S_3 je jediný samodružný bod, jinak by zobrazení nebylo vlastní podobností.(vlastní podobnost má nejvýše jeden samodružný bod, jednoduchý důkaz sporem)*

Stejně tak pro všechny ostatní body roviny dostáváme stejnolehlost $H(S_3, \lambda_1\lambda_2)$.

Mongeova grupa

Věta (Mongeova grupa, grupa homotetií)

Množina všech stejnolehlostí a posunutí s identitou tvoří grupu vzhledem na skládání zobrazení.

Důkaz (viz 05_monge.ggb, pokračování)

Složení stejnolehlosti $H(S_1, \lambda_1 \neq 1) : H(A) = A_1$ *a posunutí* $T(\overrightarrow{A_1A_2} \neq 0) : T(A_1) = A_2$.
Středem stejnolehlosti vedeme rovnoběžku p *ve směru posunutí a najdeme průsečík* $S_2 \in \overline{AA_2} \cap p$ *(průsečík existuje, protože* A, A_1 *a* A_2 *jsou nekolineární).*

$\triangle AA_1A_2 \sim \triangle AS_1S_2$ *přičemž* $\dfrac{|S_1S_2|}{|A_1A_2|} = \dfrac{|S_1A|}{|A_1A|} = |\dfrac{1}{1-\lambda_1}|$*.Protože bod* S_1 *je pevný a* A_1A_2 *určují směr a velikost posunutí je bod* S_2 *samodružným bodem výsledné podobnosti. Samodružné směry se složením* H *a* T *zachovají. Jedná se tedy o stejnolehlost.*

V případě složení v opačném pořadí se argument nemění.