Planimetrie

Shodnost

DÚ 1 Do čtverce $\square KLMN$ o straně délky a je vepsán rovnostranný trojúhelník $\triangle KXY$. Vypočítejte délku strany rovnostranného trojúhelníku bez použití goniometrických funkcí.

1. Vypočítejte délku základny AB rovnoramenného trojúhelníku ABC, znáte-li délky výšek v_a, v_c.

2. Do pravoúhlého trojúhelníku $\triangle ABC$ je vepsán čtverec $\square KLMN$, jehož strana KL leží na přeponě AB (kde K je blíže k A). Dokažte, že $\frac{|AK|}{|KL|} = \frac{|KL|}{|BL|}$.

3. Vypočítejte délky stran a, b v $\triangle ABC$, je-li $a + b = 16, c = 10, \gamma = 60°$.

4. Vypočítejte délku těžnice t_a v $\triangle ABC$, znáte-li délky jeho stran a, b, c.

5. Jestliže v trojúhelníku dělí těžnice a výška k téže straně úhel, z nehož vycházejí, na tři shodné části, pak je trojúhelník pravoúhlý. Dokažte.

DÚ 2 Vyjádřete délky stran pravoúhlého trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C, znáte-li délky těžnic t_a, t_b.

6. V trojúhelníku ABC jsou dány: velikost úhlu $\alpha = 30°$, délka strany $b = 4$ a délka strany $c = 3\sqrt{3}$. Určete, jestli je trojúhelník ABC pravoúhlý.

7. V trojúhelníku $\triangle ABC$ označme P patu výšky na stranu c. Nechť $|AP| = 2; |BP| = 1$ a $v_c = \sqrt{2}$. Vypočítejte velikost úhlu γ.

8. Těžnice a výška vedené na přeponu pravoúhlého trojúhelníku svírejí úhel velikosti rozdílu ostrých úhlů trojúhelníku. Dokažte.

9. Jsou dány úsečky délek a, b a 1. Popište, načrtněte a uveďte podmínky pro sestrojení úsečky délky:

   (a) $x = \sqrt{5}$

   (b) $x = \sqrt{5 - a}$

   (c) $x = \dfrac{a}{b^2}$

   (d) $x = \dfrac{\sqrt{6}}{ab}$

   (e) $x = \dfrac{\sqrt{2 + \sqrt{5}}}{a}$

   (f) $x = b\sqrt{3 - ab} + 2$

   (g) $x = \dfrac{\sqrt{4 + a}}{b + \sqrt{3}}$

   (h) $x = \dfrac{a}{5}\sqrt{3 + b^2}$

   (i) $x = \sqrt{a + \dfrac{7}{b}}$

   (j) $x = |\dfrac{b}{2} - \sqrt{b^2 - a^2}|$

DÚ 3 Sestrojte do jednoho obrázku aritmetický, geometrický a harmonický průměr úseček a a b a porovnejte je.

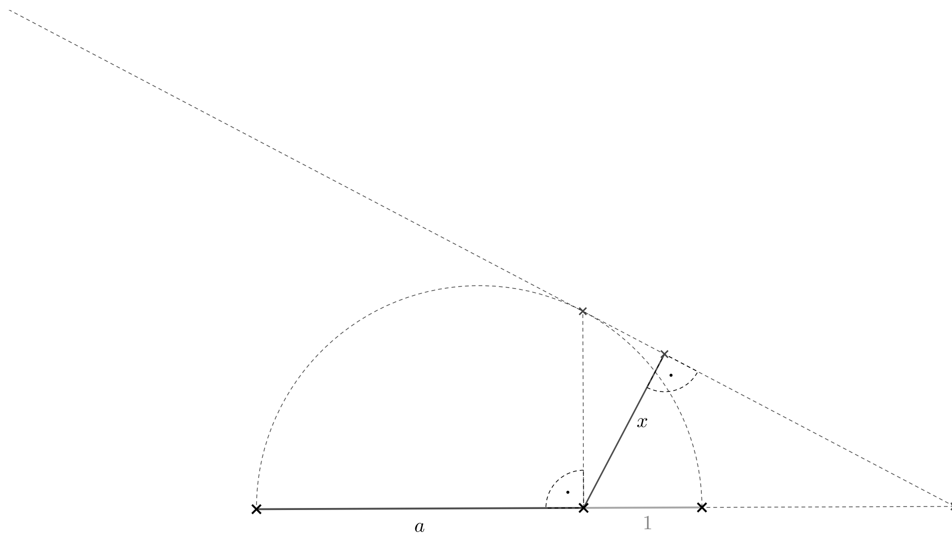
DÚ 4 Jsou dány úsečky délek x, y v cm. Použijte Eukleidovy, Pýthagorovu a Thalétovu větu pro sestrojení úseček délek $\sqrt{x-y}$, $\sqrt{y}-\sqrt{x}$, $\sqrt{xy}$.

☠ Je-li dána úsečka a a 1, sestrojte úsečku $x = \sqrt[4]{a^3}$.

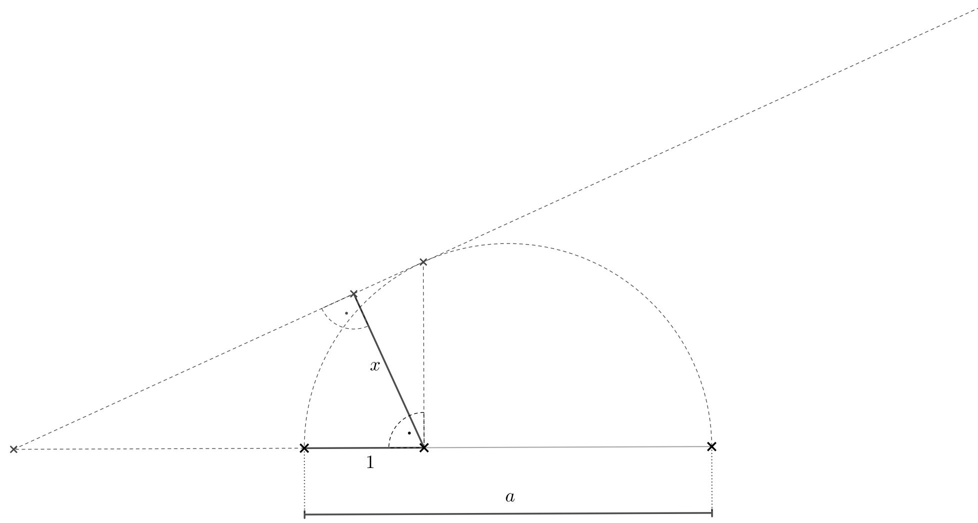
☠ Sestrojte použitím pravítka a kružítka úhel velikosti $\frac{\pi}{10}$.

10. Váš spolužák provedl konstrukci čísla x pravítkem a kružítkem podle náčrtku níže. Sestrojený oblouk je polokružnicí a polopřímka je její tečna. Jaká je hodnota čísla x v závislosti na a? Odvoďte bez měření.

(a)



(b)



11. Je dána přímka p a dvě nesoustředné kružnice $k_1(S_1, r_1), k_2(S_2, r_2)$. Veďte přímku q rovnoběžnou s přímkou p tak, aby na ní kružnice k_1, k_2 vytínaly shodné tětivy.

12. Je dán čtverec $\square KLMN$. Sestrojte rovnostranný trojúhelník $\triangle KXY$ vepsaný do čtverce $\square KLMN$.

13. Je dána přímka p, délka úsečky d a dva různé body A a B. Sestrojte nejkratší cestu z A do B tak, aby se po přímce p ušla délka d.

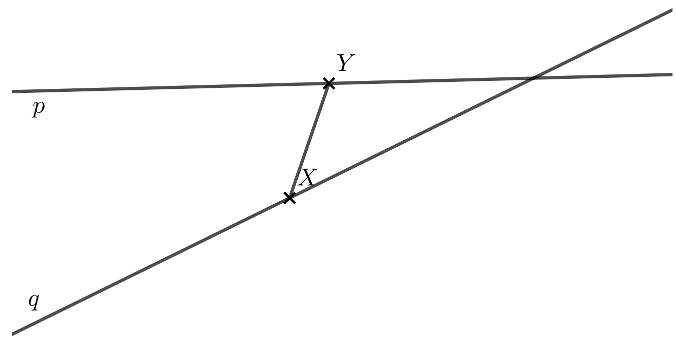
DÚ 5 Sestrojte $\triangle ABC$ jsou-li dány délky těžnic.

14. Jsou dány kružnice k_1, k_2. Sestrojte rovnostranný trojúhelník $\triangle ABC$ tak, aby $A, B \in k_1$ a $C \in k_2$.

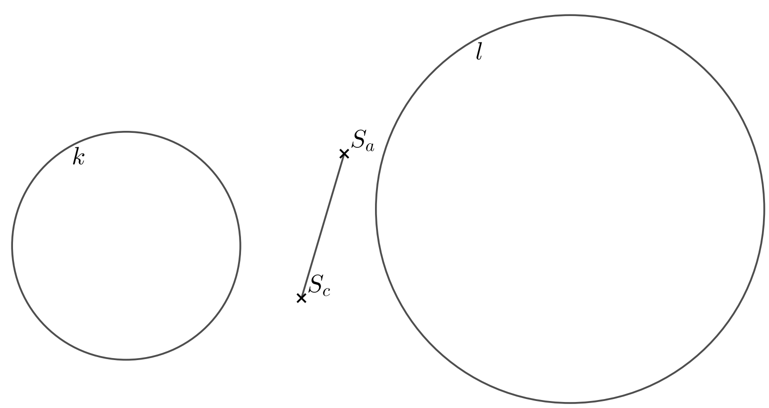
15. Jsou dány tři nekolineární body A, B, S. Sestrojte čtverec $\square MNPQ$ se středem S tak, aby přímka $\overline{MN}$ procházela bodem A a přímka $\overline{PQ}$ bodem B.

16. Sestrojte $\triangle ABC$ jsou-li dány délky stran b a c a délka těžnice t_a.

17. V rovině jsou dány různoběžky p, q a úsečka $\overline{XY}$ podle obrázku. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník $\triangle ABC$ se základnou c a úhlem $\gamma = 30°$ tak, aby vrchol C ležel na úsečce $\overline{XY}$ a vrcholy A, B na množině bodů tvořené přímkami p, q.



18. V rovině jsou dány kružnice k, l a úsečka S_aS_c dle obrázku. Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$ se střední příčkou S_aS_c (S_a je střed strany a, S_c střed strany c) jehož dva vrcholy leží na kružnicích k a l. Konstrukci proveďte do zadání.

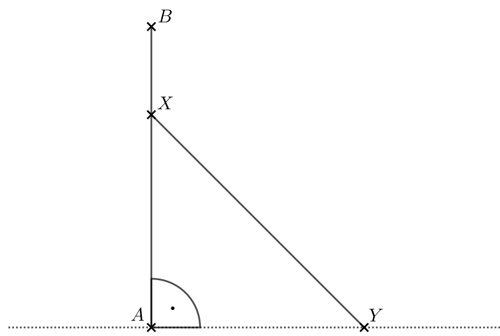


19. V rovině jsou dány shodné úsečky $\overline{AB}$ a $\overline{XY}$ dle obrázku.

    a) Určete všechna shodná zobrazení vrovině, ve kterých se úsečka $\overline{AB}$ zobrazí na úsečku $\overline{XY}$ (nezáleží na pořadí bodů). Popište charakteristické prvky zobrazení, určete jejich samodružné body a samodružné směry.

    b) Je-li to možné, uveďte nějaký rozklad alespoň jedné shodnosti z a) na osové souměrnosti. V případě, že to možné není, uveďte proč.

c) Nechť je dále dána úsečka $\overline{A'B'}$, která je obrazem úsečky $\overline{AB}$ ve středové souměrnosti. Středem souměrnosti je střed úsečky $\overline{XY}$. Sestrojte střed a určete velikost úhlu otočení, které převádí úsečku $\overline{XY}$ na úsečku $\overline{A'B'}$.



DÚ 6 (Zobecnění předešlé) Jsou dány shodné úsečky $\overline{AB}$ a $\overline{XY}$. Najděte pro různé polohy úseček všechny shodnosti, které zobrazí $\overline{AB}$ na $\overline{XY}$.

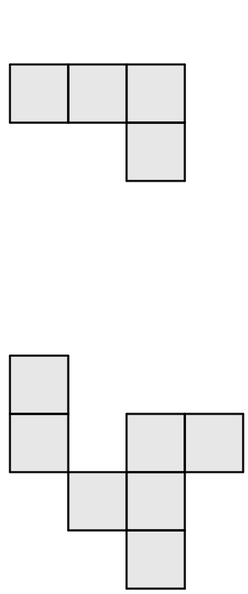
DÚ 7 Na obdélnikovém kulečníkovém stole jsou bílá a černá koule. Určete směr, ve kterém je potřeba posunout bílou kouli, aby narazila do černé a před tím se odrazila od a) jedné, b) dvou, c) tří stěn.

☠ Do ostroúhlého trojúhelníku $\triangle ABC$ vepište trojúhelník s nejmenším obvodem. Své tvrzení dokažte. (Fagnanův problém)

☽ Doplňte daný útvar co nejmenším počtem čtverečků tak, aby výsledný obrazec byl

(a) středově souměrný

(b) osově souměrný



20. Doplňte rovnostranný trojúhelník tak, aby výsledný útvar byl středově souměrný a měl co nejmenší obsah.

☽ Rozdělte danou čtvercovou síť na regiony v souladu s nasledujícími pravidly:

- Každý čtvereček patří do právě jednoho regionu.
- Každý region je spojitý.
- V každém regionu existuje právě jeden vyznačený bod, který je středem souměrnosti daného regionu.