Planimetrie

Podobnost

Michal Zamboj

Pedagogická fakulta

2022

www2.karlin.mff.cuni.cz/~zamboj/

Úhel

Zvolíme-li na přímce bod, rozdělí ji na dvě polopřímky.

Definice (Úhel)

Systém dvou polopřímek $\overrightarrow{VA}$, $\overrightarrow{VB}$ se společným počátečním bodem V nazýváme *úhel* $\measuredangle AVB$. Polopřímky $\overrightarrow{VA}$, $\overrightarrow{VB}$ nazýváme *ramena* úhlu a bod V *vrchol* úhlu.

Úhel rozděluje rovinu na dvě množiny ohraničené rameny:

- Každé dva body množiny je možno spojit úsečkou, která leží v dané množině - *množina vnitřních bodů úhlu (Konvexní úhel)*
- Nelze $\uparrow$ - *množina vnějších bodů úhlu (Nekonvexní úhel)*

Pozn.: v uvedené definici nezáleží na orientaci úhlu.
Pro orientovaný úhel volíme počáteční a koncové rameno úhlu.

Velikost úhlu

Definice (Klasifikace úhlů podle velikosti)

Úhel je

nulový, konvexní úhel, jehož ramena se překrývají. $0/0$

plný, nekonvexní úhel, jehož ramena se překrývají. $360/2\pi$

přímý, když jeho ramena tvoří přímku. $180/\pi$

pravý, když jeho zdvojení vytvoří přímý úhel (pozn. neříkali jsme co je to zdvojení úhlu). $90/\frac{\pi}{2}$

ostrý, když je menší než pravý a větší než nulový. $(0; 90)/(0; \frac{\pi}{2})$

tupý, když je větší než pravý a menší než přímý. $(90; 180)/(\frac{\pi}{2}; \pi)$

nekonvexní, když je větší než přímý a menší než plný. $(180; 360)/(\pi; 2\pi)$

Pozor! tento slide je plný zrádných pojmů!

Úhel

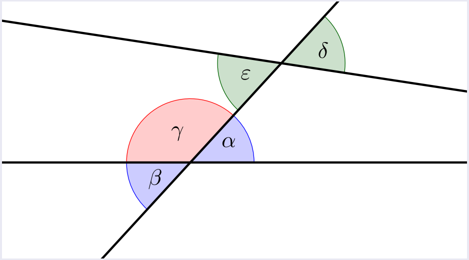
Definice (Klasifikace dvojic úhlů)

Dva úhly jsou

styčné, když mají jedno rameno společné a zbývající dvě ramena leží v opačných polorovinách vymezených hraniční přímkou, v níž leží společné rameno.

vrcholové, jsou-li jejich ramena opačné polopřímky (α, β).

vedlejší, když mají jedno rameno společné a druhé ramena jsou opačné polopřímky (α, γ).



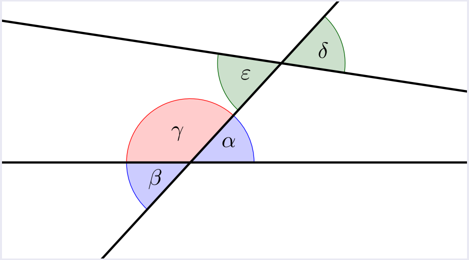
Definice (Klasifikace dvojic úhlů)

Dvě přímky *a*, *b* jsou proťaté příčkou *p*

souhlasné, když leží na stejné straně příčky *p* i přímek *a*, *b* (α, δ).

střídavé, když leží-li na opačných stranách příčky *p* i přímek *a*, *b* (α, ϵ).

přilehlé, když leží-li stejné straně příčky *p* a na opačných stranách přímek *a*, *b* (γ, ϵ).



Úhly v $\triangle$

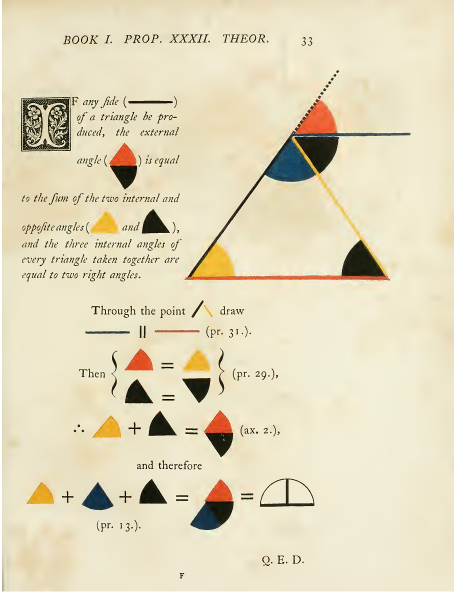
Věta

Součet vnitřních úhlů v $\triangle$ je π.

Důkaz

„Důkaz“ 1- stříhání papíru
Důkaz 2 - Eukleides
Důkaz 3 - Obtáčení

Úhly v △ - O. Byrne, 1847



BOOK I. PROP. XXXII. THEOR. 33

If any ſide ( ) of a triangle be produced, the external angle ( ) is equal to the ſum of the two internal and oppoſite angles (and), and the three internal angles of every triangle taken together are equal to two right angles.

Through the point draw

|| (pr. 31.).

Then = = (pr. 29.),

∴ + = (ax. 2.),

and therefore

+ + = = (pr. 13.).

Q. E. D.

F

Úhly v $\triangle$

Věta

Součet vnějších úhlů v $\triangle$ je 2π.

Důkaz

důsledek předešlé věty

Úhly v △

Definice (Klasifikace △ podle úhlů)

- *ostroúhlý*, všechny vnitřní úhly jsou ostré
- *pravoúhlý*, jeden vnitřní úhel je pravý
- *tupoúhlý*, jeden vnitřní úhel je tupý
- *rovnostranný*, všechny vnitřní úhly jsou stejné
- *rovnoramenný*, dva vnitřní úhly jsou stejné

Goniometrické funkce

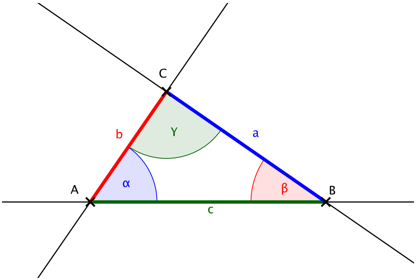
Goniometrické funkce definujeme pro $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ synteticky pomocí pravoúhlého $\triangle$ následovně:

$$\sin\alpha = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přepona}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{přilehlá}}{\text{přepona}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{protilehlá}}{\text{přilehlá}}$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\text{přilehlá}}{\text{protilehlá}}$$

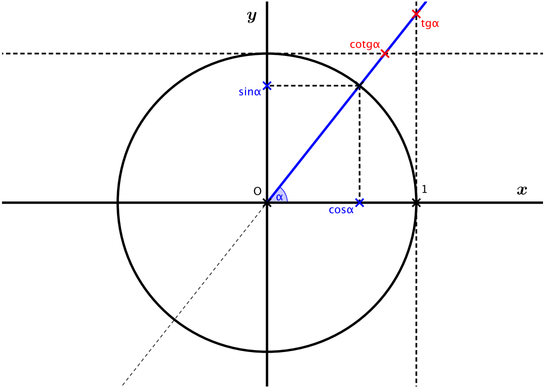


Goniometrické funkce - intermezzo s kružnicí

Goniometrické funkce definujeme pro $\alpha \in \mathbb{R}$ synteticky pomocí jednotkové kružnice následovně:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$



Goniometrické funkce - intermezzo s kružnicí

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sin(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$$
$$\operatorname{cotg}(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$$

Výšky v △

Definice (Výška)

Výška v trojúhelníku je úsečka, jejíž krajními body jsou vrchol a pata kolmice vedené z daného vrcholu k přímce určené ostatními dvěma vrcholy trojúhelníku.

Pozn.: někdy (podle kontextu) výškou rozumíme i délku takhle definované výšky, někdy celou přímku, ve které leží

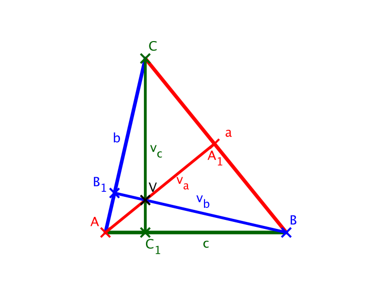
Sinova věta

Věta (Sinova)

V libovolném $\triangle ABC$ *se stranami* a, b, c *a vnitřními úhly* α, β, γ *platí:*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Důkaz (Subdůkaz)



$$\sin\alpha = \frac{v_c}{b}$$

$$\sin\beta = \frac{v_c}{a}$$

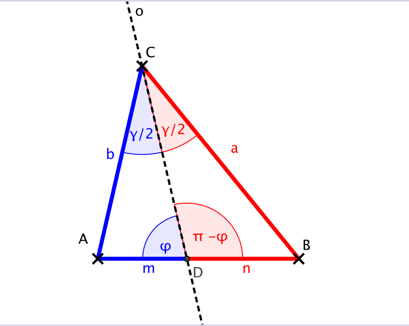
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$$

Osa úhlu v △

Věta (Osa úhlu)

Osa vnitřního úhlu dělí protilehlou stranu △ v poměru stran přilehlých.

Důkaz



$$\frac{b}{\sin\varphi} = \frac{m}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$
$$\frac{a}{\sin\varphi} = \frac{n}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$$

Podobnost

Definice (Podobnost)

Zobrazení $f : \rho \to \rho$ se nazývá *podobnost*, právě když existuje kladné číslo k tak, že pro libovolné dva různé body $A, B \in \rho$ a jejich obrazy A', B' platí

$$\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}.$$

Číslo k nazýváme *koeficient podobnosti*.

$k = 1$ nevlastní podobnost (shodnost)

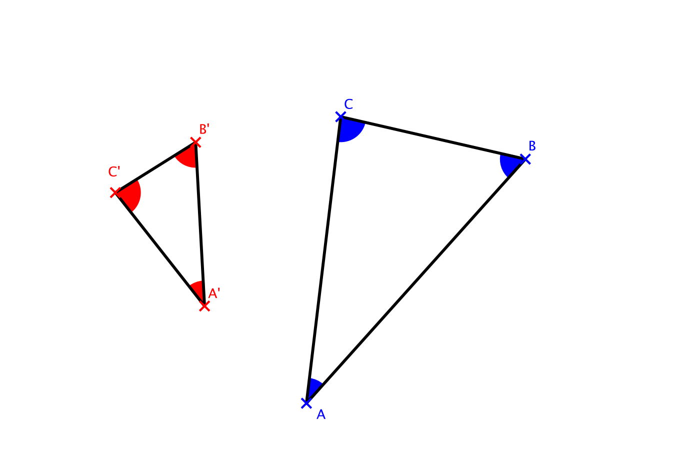
$k \neq 1$ vlastní podobnost

přímá podobnost zachovává orientaci prostoru $\circlearrowright \to \circlearrowright$

nepřímá podobnost nezachovává orientaci prostoru $\circlearrowright \to \circlearrowleft$

Podobná zobrazení

Příklad (Přímá podobnost, $k = \frac{1}{2}$)



Vlastnosti podobnosti

Věta (Vlastnosti podobnosti)

Podobnost

1. *zachovává incidenci.*
2. *zachovává uspořádání.*
3. *zachovává dvojpoměr.*
4. *zachovává středy úseček (a dělicí poměr).*
5. *zachovává poměry úseček a velikosti úhlů.*
6. *NEzachovává délky úseček (a obsahy).*

Velikosti úhlů se zachovávají: $\sin\alpha = \frac{v_c'}{b'} = \frac{kv_c}{kb} = \frac{v_c}{b}$.

Věty o podobných $\triangle$

Definice (Podobné útvary)

Dva útvary P_1 a P_2 jsou si podobné $P_1 \sim P_2$ právě tehdy, když existuje podobnost, která zobrazí P_1 na P_2.

Věta (Podobné $\triangle$)

Dva trojúhelníky jsou si podobné, shodují-li se

- sss *v poměrech odpovídajících si stran.*
- sus *v poměrech dvou stran a úhlu jimi sevřeném.*
- uu *ve dvou vnitřných úhlech.*
- Ssu *v poměru dvou stran a úhlu proti delší z nich.*

Určenost podobnosti

Věta (Určenost podobnosti)

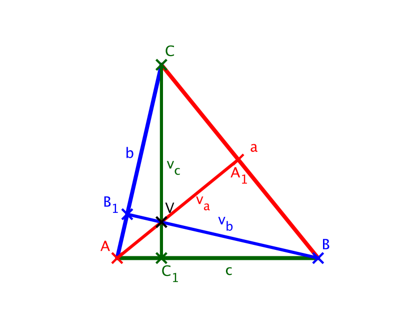
Podobnost je určena

1. *orientací a dvěma páry odpovídajících si bodů.*
2. *třemi páry odpovídajících si bodů.*

Věta (O výškách)

Výšky v $\triangle$ se protínají v právě jednom bodě, který nazýváme ortocentrum $\triangle$.

Důkaz

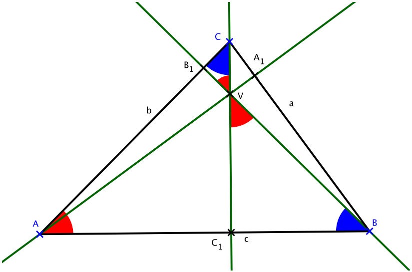


$$\triangle CB_1B \sim \triangle CA_1A \Rightarrow \frac{\overline{CB_1}}{\overline{CA_1}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}$$
$$\triangle AC_1C \sim \triangle AB_1B \Rightarrow \frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB_1}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$
$$\triangle BA_1A \sim \triangle BC_1C \Rightarrow \frac{\overline{BA_1}}{\overline{BC_1}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BC}}$$

užijeme obrácenou Cevovu větu na $\triangle ABC$:

$$(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) \stackrel{?}{=} -1$$

ověříme, že $\uparrow$ platí $\Rightarrow$ výšky se protnou v jednom bodě.



$$\triangle AC_1C \sim \triangle AB_1B \sim \triangle VC_1B \sim \triangle VB_1C$$

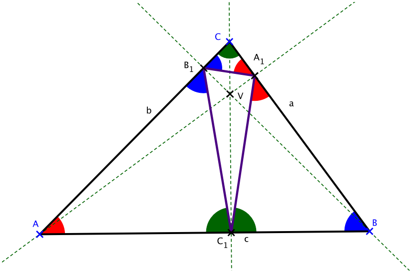
podle věty uu $(\alpha, \frac{\pi}{2})$

Dále platí: $\dfrac{v_c}{b} = \dfrac{v_b}{c}$

t.j. $b : c = \dfrac{1}{v_b} : \dfrac{1}{v_c}$

$$a : b : c = \frac{1}{v_a} : \frac{1}{v_b} : \frac{1}{v_c}$$

Ortický $\triangle\, A_1 B_1 C_1$



$$\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1 \sim \triangle A_1B_1C \sim \triangle A_1BC_1$$

$$\triangle BCC_1 \sim \triangle BAA_1 \Rightarrow \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{BC_1}}{\overline{BA_1}}$$

podle sus $\triangle ABC \sim \triangle A_1BC_1$

Podobná zobrazení

Věta (Grupa podobností)

Všechna podobná zobrazení v rovině tvoří grupu vzhledem ke skládání zobrazení.

Důkaz (Náznak)

Uzavřenost: f_1 *je podobnost s koeficientem* k_1, f_2 *je podobnost s koeficientem* k_2.
$f_1 : \overline{AB} \to \overline{A'B'}$, $f_2 : \overline{A'B'} \to \overline{A''B''}$.
$\overline{A'B'} = k_1 \overline{AB}$, $\overline{A''B''} = k_2 \overline{A'B'}$ *a tedy* $\overline{A''B''} = k_1 k_2 \overline{AB}$.
Složené zobrazení $f_2 \circ f_1$ *je podobnost s koeficientem* $k_1 k_2$.
Asociativita: $(f_3 \circ f_2) \circ f_1 = f_3 \circ (f_2 \circ f_1)$.
Neutrální prvek: Identita.
Inverzní prvek: Podobnost s opačným koeficientem k^{-1}.

Definice (Stejnolehlost, homotetie)

Stejnolehlost se *středem* S a *koeficientem* $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ je zobrazení v rovině, které přiřadí každému bodu $X \neq S$ jeho obraz X' ležící na přímce $\overleftrightarrow{SX}$ tak, že:

$$\overrightarrow{SX'} = \lambda \cdot \overrightarrow{SX}$$

Bod S je samodružným bodem stejnolehlosti.
Zn. $H(S; \lambda)$.

- $\lambda = 1$, Identita
- $\lambda = -1$, Středová souměrnost
- $\lambda < 0$, $\overrightarrow{SX'}$ má opačnou orientaci

Stejnolehlost je podobnost s koeficientem $k = |\lambda|$.

Stejnolehlost

Pro $|\lambda| \neq 1$
Samodružné body: S je jediný samodružný bod.
Samodružné přímky: $\forall$ přímky procházející středem.
Samodružné směry: $\forall$ směry.

Určenost stejnolehlosti

Věta (Určenost stejnolehlosti)

Stejnolehlost je určena

1. *středem a koeficientem.*
2. *středem a párem odpovídajících si bodů.*
3. *dvěma páry odpovídajících si bodů.*

Věta

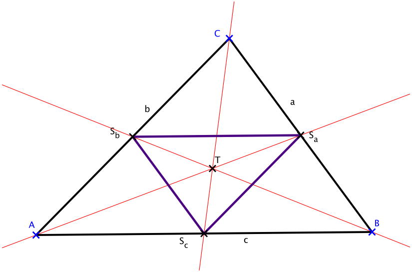
Všechny stejnolehlosti se stejným středem tvoří grupu vzhledem ke skládání zobrazení.

Důkaz

Podobně jak u podobnosti.

Skupiny podobných $\triangle$ů

Příčkový $\triangle S_aS_bS_c$

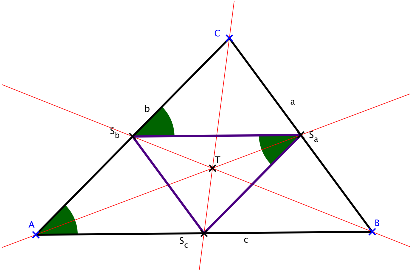


$\triangle ABC \sim \triangle S_bS_aC$
$H(C, \frac{1}{2}) : C \to C, A \to S_b, B \to S_a$
(např. podle sus)

$\triangle ABC \sim \triangle S_aS_bS_c$
$H(T, -\frac{1}{2}) : A \to S_a, B \to S_b, C \to S_c$
(např. podle uu)

Skupiny podobných $\triangle$ů

Příčkový $\triangle S_a S_b S_c$



$$\triangle ABC \sim \triangle S_b S_a C$$
$$H(C, \tfrac{1}{2}) : C \to C, A \to S_b, B \to S_a$$
(např. podle sus)

$$\triangle ABC \sim \triangle S_a S_b S_c$$
$$H(T, -\tfrac{1}{2}) : A \to S_a, B \to S_b, C \to S_c$$
(např. podle uu)