

Planimetrie

Afinita

Michal Zamboj

Pedagogická fakulta

2023

`www2.karlin.mff.cuni.cz/~zamboj/`

Dvě rovnoběžné přímky mají stejný (neorientovaný) *směr*.

Definice (Samodružný směr)

Když se při zobrazení f zobrazí přímka p na přímku p' tak, že $p \parallel p'$, říkáme, že její (neorientovaný) směr je *samodružný*.

Definice (Afinní zobrazení v rovině)

Zobrazení $f : \rho \rightarrow \rho$ se nazývá *afinní zobrazení (transformace) v rovině* neboli *afinita* ρ , právě když jsou obrazy A', B', C' libovolných tří kolineárních bodů A, B, C rovněž kolineární a pro její dělicí poměry platí

$$(AB; C) = (A'B'; C').$$

Definice (Osová afinita)

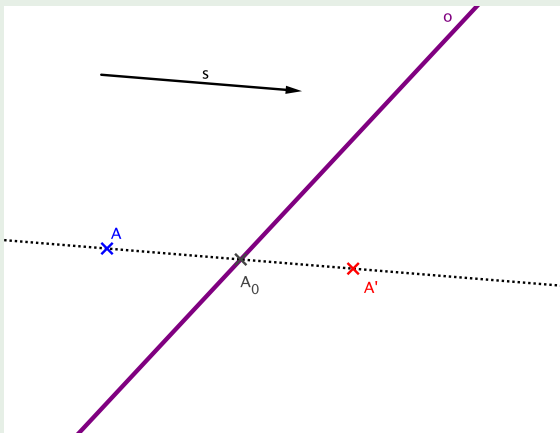
Osová afinita je afinita, která má přímku samodružných bodů o , nazýváme ji *osa afinity* a samodružný směr \vec{s} , nazýváme jej *směr afinity*. Body a jejich obrazy leží na přímkách se směrem \vec{s} .

Definice (Charakteristika k osové afinity)

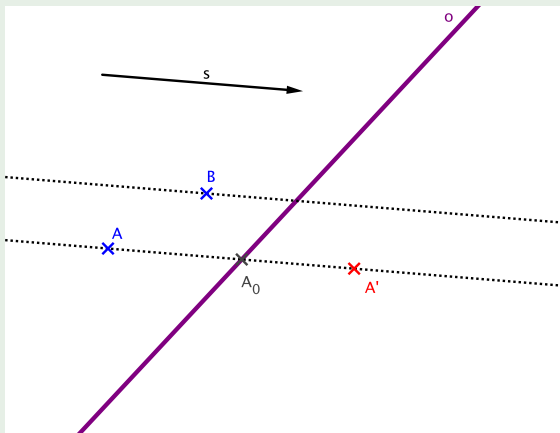
Nechť \mathbf{a} je osová afinita s osou o , která zobrazí bod X na X' . Dále necht' X_0 je průsečík přímky $\overleftrightarrow{XX'}$ s osou o . Číslo $k = (X'X; X_0)$ nazýváme *charakteristikou osové afinity* \mathbf{a} .

Pozn. Osovou afinitu si můžeme představit jako středovou kolineaci, která má střed v nekonečnu.

Příklad (Zadání $o, \vec{s}, A \rightarrow A'$)

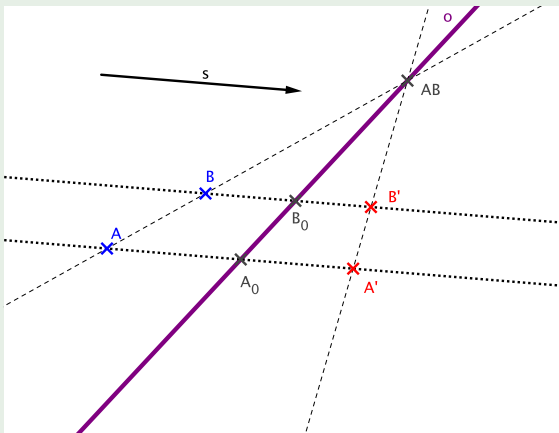


Příklad (Zadání $o, \vec{s}, A \rightarrow A'$)



Osová afinita

Příklad (Zadání $o, \vec{s}, A \rightarrow A'$)

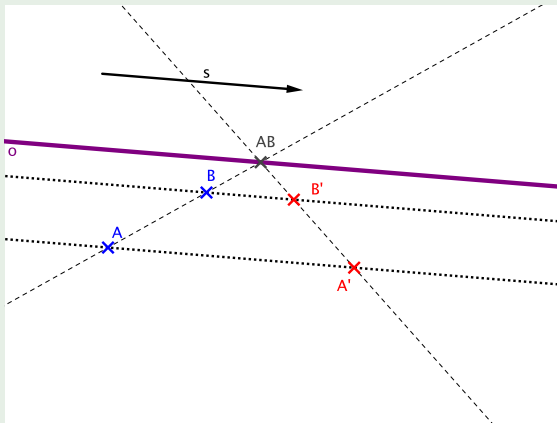


Osová afinita

Definice (Elace)

Elace je osová afinita jejíž směr je rovnoběžný s osou afinity.

Příklad



Věta

Libovolné afinní zobrazení lze rozložit na nejvýše tři osově afinity.

Důkaz (skripta 146)

Věta (Vlastnosti afinity)

Afinita

- 1 zachovává incidenci.
- 2 zachovává uspořádání.
- 3 zachovává dvojpoměr.
- 4 zachovává středy úseček (a dělicí poměr).
- 5 NEzachovává velikosti úhlů.
- 6 NEzachovává délky úseček (a obsahy).

Dělicí poměr je *invariant* při afinitě.

Věta (Určenost afinity)

Afinita je určena

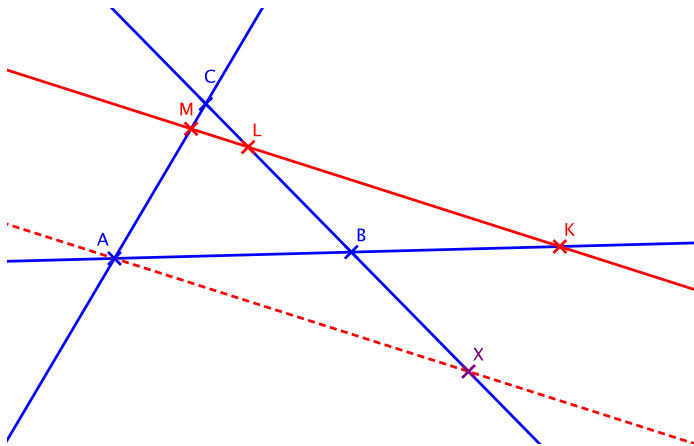
- 1 *osou, směrem a párem odpovídajících si bodů.*
- 2 *osou, směrem a charakteristikou.*
- 3 *třemi páry odpovídajících si bodů.*

Věta (Menelaova)

V rovině je dán $\triangle ABC$, na přímkách \overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{BC} , \overleftrightarrow{CA} leží po řadě body K , L , M , které jsou všechny různé od vrcholů \triangle . Leží-li body K , L , M na společné přímce, pak platí:

$$(AB; K)(BC; L)(CA; M) = 1$$

Menelaova a Cevaova věta



Menelaova a Cevova věta

Věta (Menelaova)

V rovině je dán $\triangle ABC$, na přímkách \overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{BC} , \overleftrightarrow{CA} leží po řadě body K , L , M , které jsou všechny různé od vrcholů \triangle . Leží-li body K , L , M na společné přímce, pak platí:

$$(AB; K)(BC; L)(CA; M) = 1$$

Důkaz

„ \Rightarrow “ Předpoklad: K , L , M jsou na přímce, pak sestrojíme $\overleftrightarrow{AX} \parallel \overleftrightarrow{KM} \Rightarrow (AB; K) = (XB; L)$, $(CA; M) = (CX; L)$ dosadíme do dokazované rovnosti.

Platí i obrácená věta: Platí-li součin dělicích poměrů z Menelaovy věty, pak leží body K , L , M na jedné přímce.

Věta (Cevova)

V rovině je dán $\triangle ABC$, na přímkách \overleftrightarrow{AB} , \overleftrightarrow{BC} , \overleftrightarrow{CA} leží po řadě body K , L , M , které jsou všechny různé od vrcholů \triangle .

Procházejí-li přímky \overleftrightarrow{CK} , \overleftrightarrow{AL} , \overleftrightarrow{BM} jedním bodem, nebo jsou-li rovnoběžné, pak platí:

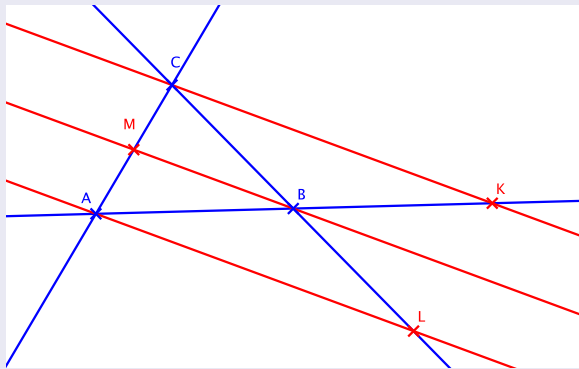
$$(AB; K)(BC; L)(CA; M) = -1$$

Platí i obrácená věta: Platí-li součin dělicích poměrů z Cevovy věty, pak \overleftrightarrow{CK} , \overleftrightarrow{AL} , \overleftrightarrow{BM} procházejí jedním bodem, nebo jsou spolu rovnoběžné.

Menelaova a Cevova věta

Důkaz

a) rovnoběžné



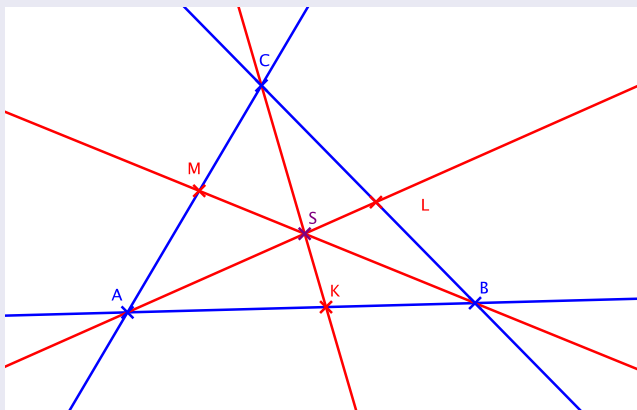
$(AB; K) = (AM; C)$, $(BC; L) = (MC; A)$ dosadíme do dokazované rovnosti

Menelaova a Cevova věta

Důkaz

b) procházejí bodem S

využijeme Menelaovu větu pro $\triangle AKC : (AK; B)(KC; S)(CA; M)$
a $\triangle BCK : (KB; A)(BC; L)(CK; S)$ a přenásobíme



Definice (Těžnice)

Těžnice trojúhelníku je úsečka, která spojuje střed strany s protilehlým vrcholem.

Věta (O těžnicích)

Těžnice \triangle se protínají v právě jednom bodě, který nazýváme těžiště \triangle . Těžiště rozděluje těžnice v poměru 1:2.

Důkaz

*Obrácená Cevova věta \rightarrow protínají se v 1 bodě
Menelaova věta \rightarrow poměr je 1:2.*