Planimetrie

Kolineace

Michal Zamboj

Pedagogická fakulta

2023

www.karlin.mff.cuni.cz/~zamboj/

Incidence

Incidence je základní vztah - nedefinujeme ji.

Bod leží na přímce = Přímka prochází bodem = Bod je incidentní s přímkou.

Definice

Body, které jsou incidentní s jednou přímkou nazýváme *kolineární*.
Přímky, které jsou incidentní s jedním bodem nazýváme *konkurentní*.

Incidenční (polohové) vlastnosti bodů a přímek

Každými dvěma různými body lze proložit přímku.

Definice (Klasifikace přímek podle incidence)

Dvě přímky jsou vzájemně

- *totožné*, když mají společné všechny body
- *různoběžné*, když mají společný právě jeden bod
- *rovnoběžné*, když nejsou různoběžné ani totožné (resp. nemají společný žádný bod)

Mezi je základní vztah - nedefinujeme ho.

Uspořádání bodů na přímce: Bod B leží na přímce mezi body A a C a zároveň mezi body C a A.

Definice (Úsečka, orientovaná úsečka)

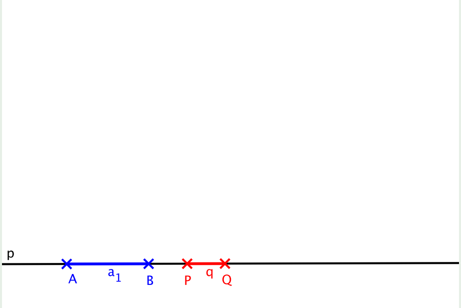
Množina všech bodů, které leží na přímce mezi body A a B včetně A, B nazýváme *úsečka* $\overline{AB}$. Body A a B nazýváme *krajní*.

Volbou počátečního bodu A a koncového bodu B úsečky $\overline{AB}$ dostaneme *orientovanou úsečku* $\overrightarrow{AB}$.

Sčítaní a odečítaní úseček

Úsečky na přímce můžeme synteticky sčítat, odečítat, násobit a dělit daným číslem.

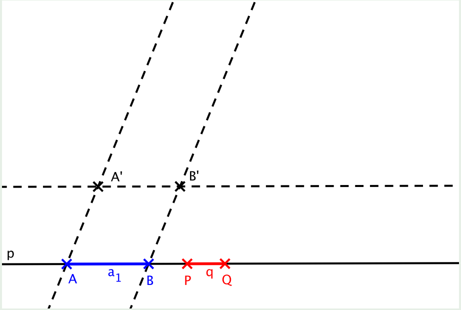
Konstrukce (Sčítaní úseček)



Sčítaní a odečítaní úseček

Úsečky na přímce můžeme synteticky sčítat, odečítat, násobit a dělit daným číslem.

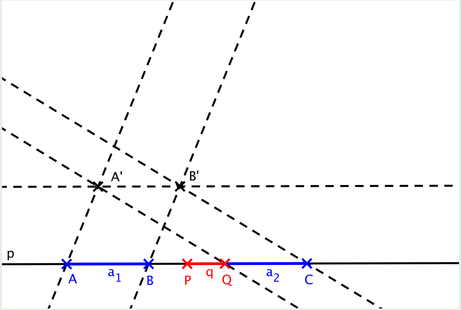
Konstrukce (Sčítaní úseček)



Sčítaní a odečítaní úseček

Úsečky na přímce můžeme synteticky sčítat, odečítat, násobit a dělit daným číslem.

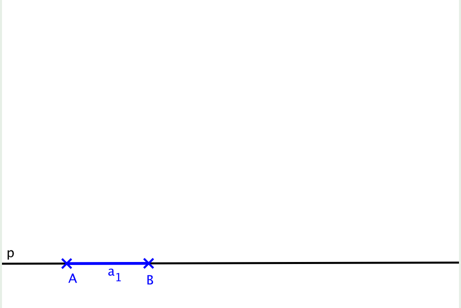
Konstrukce (Sčítaní úseček)



Násobení úsečky číslem

Úsečky na přímce můžeme synteticky sčítat, odečítat, násobit a dělit daným číslem.

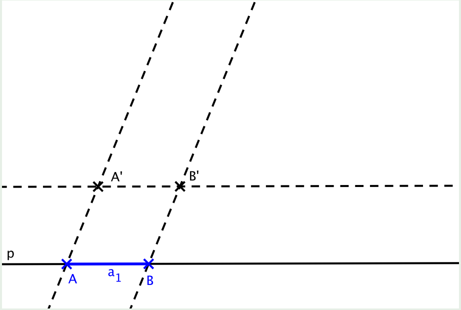
Konstrukce (Násobení úsečky číslem)



Násobení úsečky číslem

Úsečky na přímce můžeme synteticky sčítat, odečítat, násobit a dělit daným číslem.

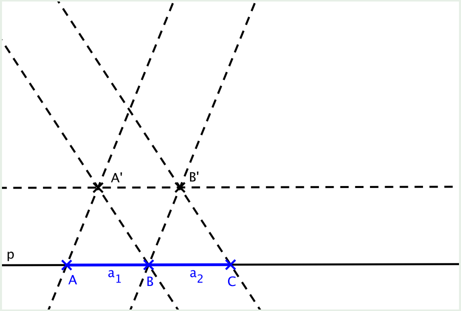
Konstrukce (Násobení úsečky číslem)



Násobení úsečky číslem

Úsečky na přímce můžeme synteticky sčítat, odečítat, násobit a dělit daným číslem.

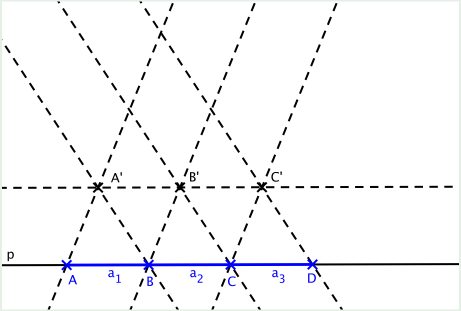
Konstrukce (Násobení úsečky číslem)



Násobení úsečky číslem

Úsečky na přímce můžeme synteticky sčítat, odečítat, násobit a dělit daným číslem.

Konstrukce (Násobení úsečky číslem)



Dělicí poměr

Definice (Dělicí poměr)

Nechť A, B, C jsou tři různé kolineární body. *Dělicí poměr bodu C vzhledem k bodům A, B,* je reálné číslo λ takové, že

$$\lambda\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

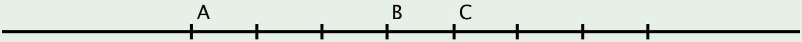
Zn. $(AB; C)$ (v učebnici (ABC))

Věta (Vlastnosti dělicího poměru)

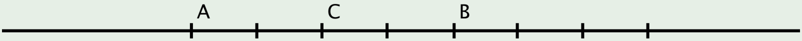
- $\lambda \in (0; 1)$ *pro bod C ležící vně úsečky $\overline{AB}$ za bodem A*
- $\lambda = 0$ *pro $C = A$*
- $\lambda < 0$ *pro bod C ležící uvnitř úsečky $\overline{AB}$*
- λ *neexistuje pro bod $C = B$*
- $\lambda > 1$ *pro bod C ležící vně úsečky $\overline{AB}$ za bodem B*
- $\lambda \neq 1$

Dělicí poměr

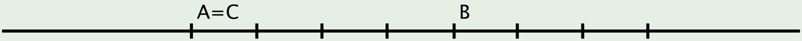
Příklad



$$\lambda = 4$$



$$\lambda = -1$$



$$\lambda = 0$$

Kolineace

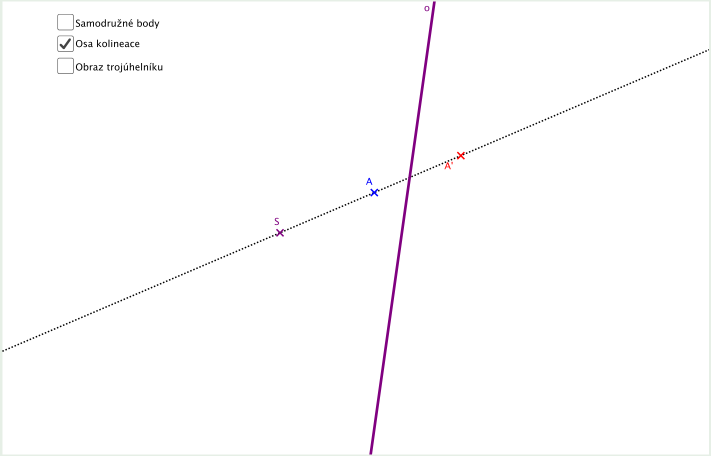
Definice (Kolineace)

Zobrazení $k : \rho \to \rho$ nazýváme *kolineace*, když obrazy všech kolineárních bodů (kromě bodů, které se zobrazí do nekonečna) jsou kolineární.
"Přímky se zobrazí na přímky."

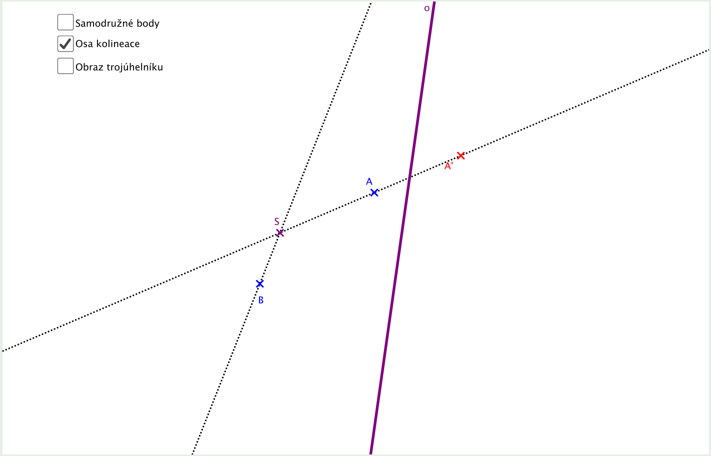
Definice (Středová kolineace)

Středová kolineace je kolineace, která má přímku samodružných bodů o, nazýváme ji *osou kolineace* a samodružný bod $S \notin o$, který nazýváme *střed kolineace*.
Body a jejich obrazy leží na přímkách procházejících středem S.

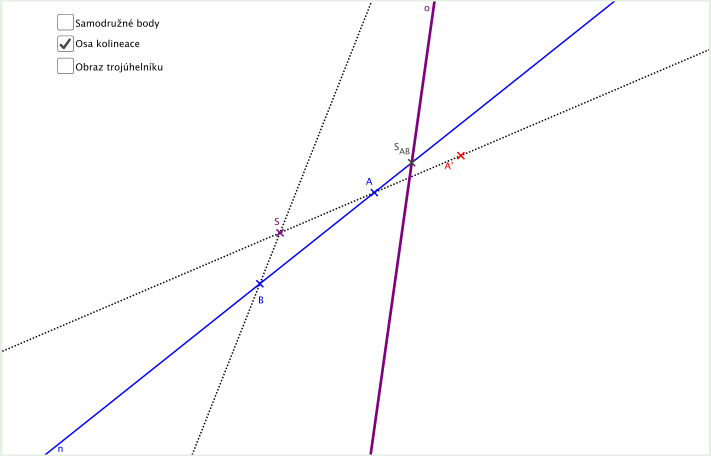
Příklad (Zadání středové kolineace: $S, o, A \to A'$)



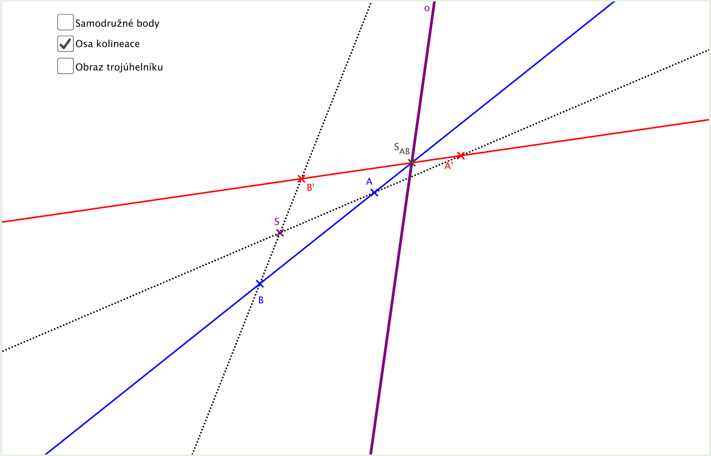
Příklad (Zadání středové kolineace: S, o, $A \to A'$)



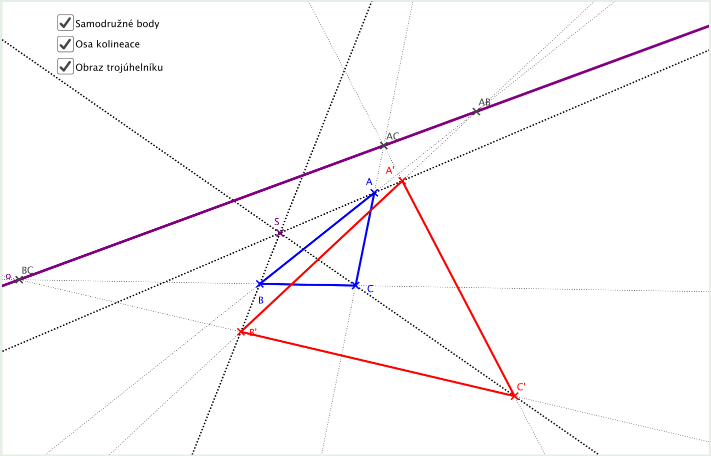
Příklad (Zadání středové kolineace: S, o, $A \rightarrow A'$)



Příklad (Zadání středové kolineace: $S, o, A \to A'$)



Příklad



Samodružné body
Osa kolineace
Obraz trojúhelníku
AB
AC
A'
A
S
o
BC
B
C
B'
C'

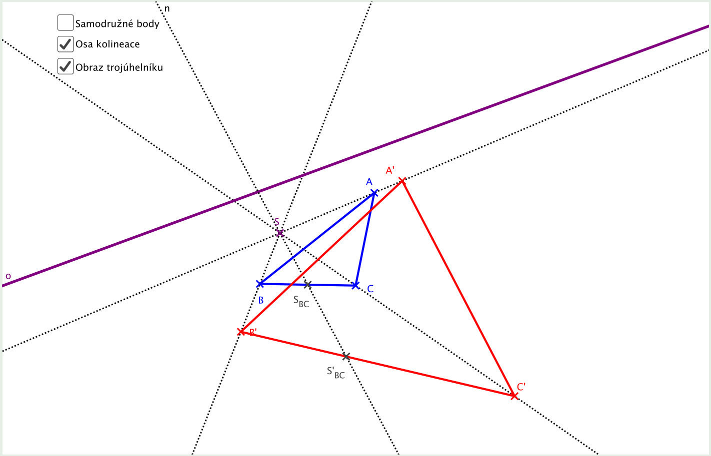
Vlastnosti kolineace

Věta (Vlastnosti kolineace)

Kolineace

1. *zachovává incidenci.*

Příklad



n
Samodružné body
Osa kolineace
Obraz trojúhelníku
o
A'
A
S
B
C
S_{BC}
B'
S'_{BC}
C'

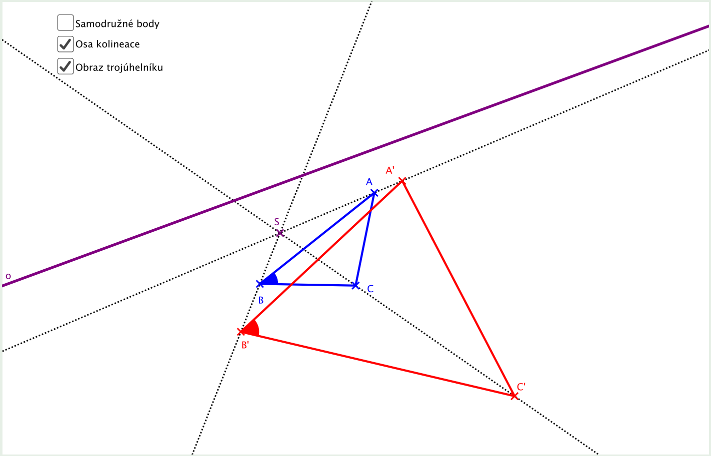
Vlastnosti kolineace

Věta (Vlastnosti kolineace)

Kolineace

1. *zachovává incidenci.*
2.
3. *NEzachovává středy úseček (a dělicí poměr).*

Příklad


Samodružné body
Osa kolineace
Obraz trojúhelníku
A'
A
S
o
B
C
B'
C'

Vlastnosti kolineace

Věta (Vlastnosti kolineace)

Kolineace

1. *zachovává incidenci.*
2.
3. *NEzachovává středy úseček (a dělicí poměr).*
4. *NEzachovává velikosti úhlů.*
5. *NEzachovává délky úseček (a obsahy).*

Pozor! Zatím "nevíme"co je to úhel a délka.

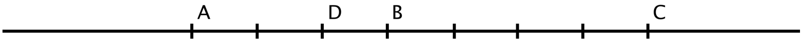
Dvojpoměr čtyř kolineárních bodů

Definice (Dvojpoměr)

Nechť A, B, C, D jsou čtyři různé kolineární body. Číslo $(AB; CD) = \dfrac{(AB; C)}{(AB; D)}$ se nazývá *dvojpoměr bodů A, B, C, D* (v tomto pořadí)

Věta („Vlastnosti“ dvojpoměru)

- *$(AB; CD) < 0$ pokud body C a D leží jeden uvnitř a jeden vně úsečky $\overline{AB}$*
- *$(AB; CD) > 0$ pokud body C a D leží oba uvnitř nebo oba vně úsečky $\overline{AB}$*



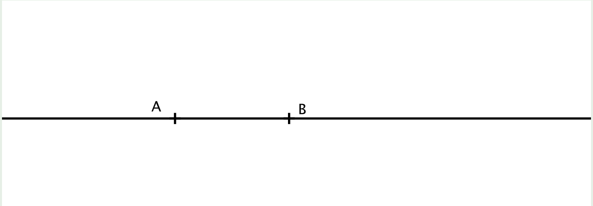
$$(AB; CD) = -\frac{7}{8}$$

Dvojpoměr čtyř kolineárních bodů

Definice (Harmonická čtveřice)

Uspořádanou čtveřici bodů, pro které platí $(AB; CD) = -1$ nazýváme *harmonická čtveřice (čtveřina) bodů*.

Konstrukce (Dvojpoměr $(AB; CD) = -1$ (s použitím rovnoběžnosti))

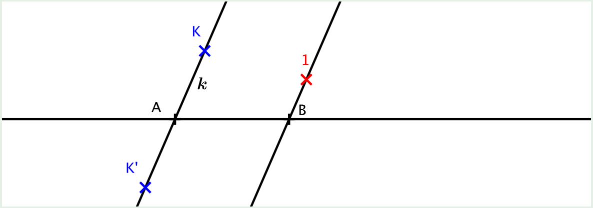


Dvojpoměr čtyř kolineárních bodů

Definice (Harmonická čtveřice)

Uspořádanou čtveřici bodů, pro které platí $(AB;CD) = -1$ nazýváme *harmonická čtveřice (čtveřina) bodů*.

Konstrukce (Dvojpoměr $(AB;CD) = -1$ (s použitím rovnoběžnosti))

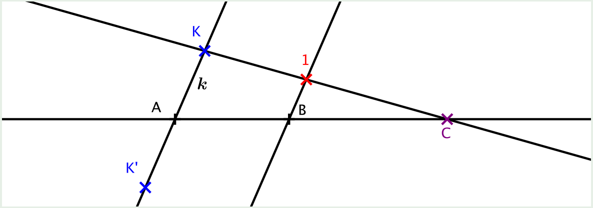


Dvojpoměr čtyř kolineárních bodů

Definice (Harmonická čtveřice)

Uspořádanou čtveřici bodů, pro které platí $(AB; CD) = -1$ nazýváme *harmonická čtveřice (čtveřina) bodů*.

Konstrukce (Dvojpoměr $(AB; CD) = -1$ (s použitím rovnoběžnosti))

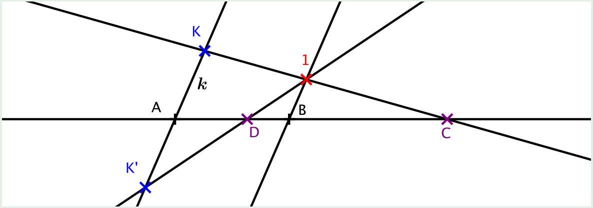


Dvojpoměr čtyř kolineárních bodů

Definice (Harmonická čtveřice)

Uspořádanou čtveřici bodů, pro které platí $(AB; CD) = -1$ nazýváme *harmonická čtveřice (čtveřina) bodů*.

Konstrukce (Dvojpoměr $(AB; CD) = -1$ (s použitím rovnoběžnosti))

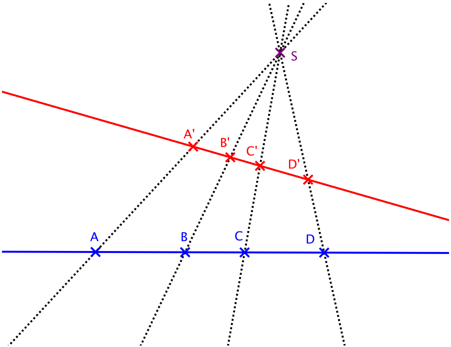


Dvojpoměr čtyř kolineárních bodů

Věta

Při kolineaci sa zachovává dvojpoměr.

$$(AB;CD)=\frac{(AB;C)}{(AB;D)}=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}}=\frac{\overrightarrow{A'C'}\cdot\overrightarrow{B'D'}}{\overrightarrow{B'C'}\cdot\overrightarrow{A'D'}}=\frac{(A'B';C')}{(A'B';D')}=(A'B';C'D')$$



Vlastnosti kolineace

Věta (Vlastnosti kolineace)

Kolineace

1. *zachovává incidenci.*
2. *zachovává dvojpoměr.*
3. *NEzachovává středy úseček (a dělicí poměr).*
4. *NEzachovává velikosti úhlů.*
5. *NEzachovává délky úseček (a obsahy).*

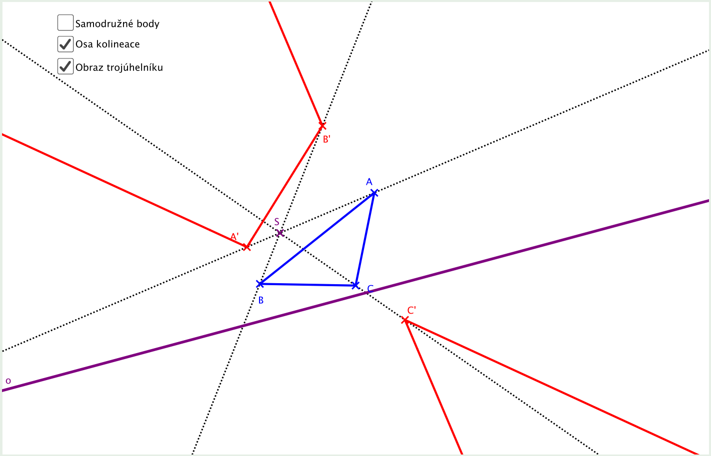
Dvojpoměr je *invariant* při kolineaci.

Trojúhelník $\triangle$

Definice ($\triangle$)

Trojúhelník je průnik tří polorovin určených třemi nekolineárními body A, B, C tak, že ke každým dvoum bodům vybíráme polorovinu, do které náleží třetí bod.
Body A, B, C nazýváme *vrcholy* $\triangle$.
Úsečky $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ nazýváme *strany* $\triangle$.

Příklad

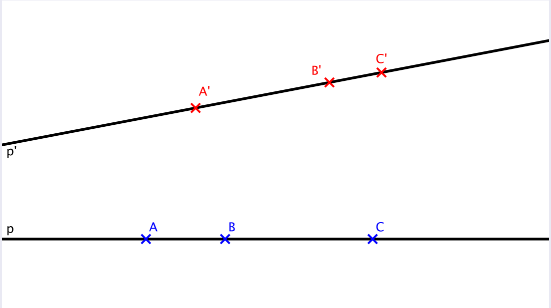


Samodružné body
Osa kolineace
Obraz trojúhelníku
B'
A
S
A'
B
C
C'
o

Pappova věta

Věta (Pappova)

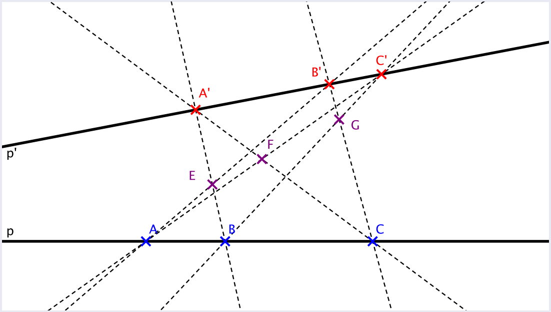
Nechť A, B, C jsou tři body na přímce p a A', B', C' jsou tři body na přímce p', potom jestli existují průsečíky $AB' \cap BA', AC' \cap CA', BC' \cap CB'$, tak jsou taky kolineární.



Pappova věta

Věta (Pappova)

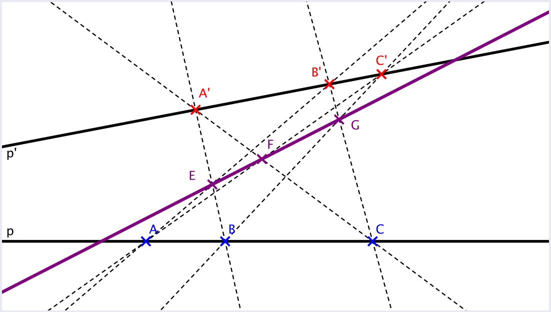
Nechť A, B, C jsou tři body na přímce p a A', B', C' jsou tři body na přímce p', potom jestli existují průsečíky $AB' \cap BA', AC' \cap CA', BC' \cap CB'$, tak jsou taky kolineární.



Pappova věta

Věta (Pappova)

Nechť A, B, C jsou tři body na přímce p a A', B', C' jsou tři body na přímce p', potom jestli existují průsečíky $AB' \cap BA'$, $AC' \cap CA'$, $BC' \cap CB'$, tak jsou taky kolineární.

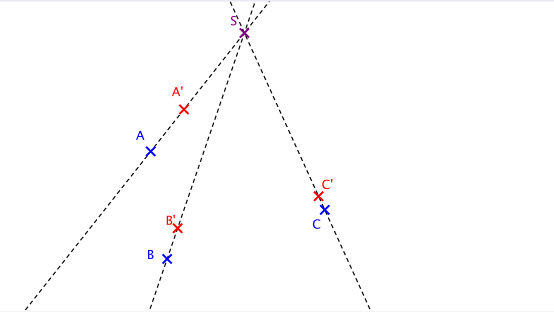


Girard Desargues (1591-1661)

Desarguesova věta

Věta (Desarguesova)

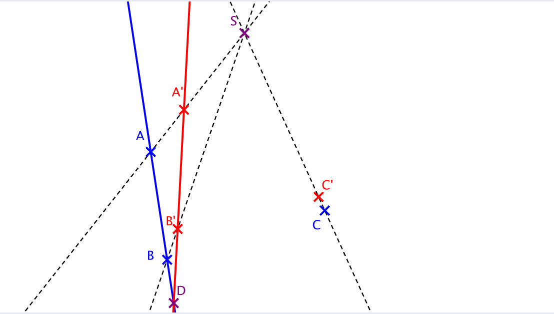
Nechť $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ jsou tři konkurentní nebo rovnoběžné přímky, pak jestli existují průsečíky $AB \cap A'B'$, $AC \cap A'C'$, $BC \cap B'C'$, tak jsou kolineární.



Desarguesova věta

Věta (Desarguesova)

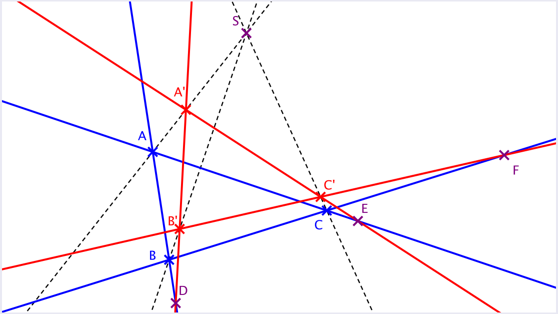
Nechť $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ jsou tři konkurentní nebo rovnoběžné přímky, pak jestli existují průsečíky $AB \cap A'B'$, $AC \cap A'C'$, $BC \cap B'C'$, tak jsou kolineární.



Desarguesova věta

Věta (Desarguesova)

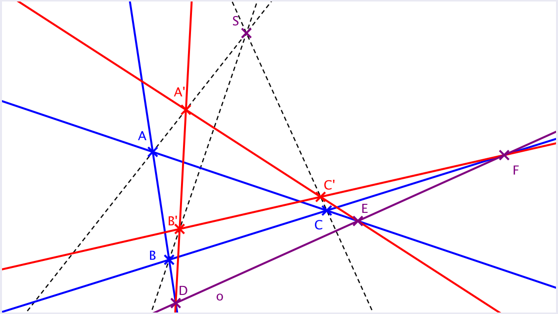
Nechť $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ jsou tři konkurentní nebo rovnoběžné přímky, pak jestli existují průsečíky $AB \cap A'B'$, $AC \cap A'C'$, $BC \cap B'C'$, tak jsou kolineární.



Desarguesova věta

Věta (Desarguesova)

Nechť $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ jsou tři konkurentní nebo rovnoběžné přímky, pak jestli existují průsečíky $AB \cap A'B'$, $AC \cap A'C'$, $BC \cap B'C'$, tak jsou kolineární.



Desarguesova věta

Věta (Desarguesova)

Nechť $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}, \overleftrightarrow{CC'}$ jsou tři konkurentní nebo rovnoběžné přímky, pak jestli existují průsečíky $AB \cap A'B', AC \cap A'C', BC \cap B'C'$, tak jsou kolineární.