Planimetrie

Dělicí poměr, dvojpoměr, kolineace

1. Na přímce p jsou dány orientované úsečky $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$. Sestrojte na p jen pomocí pravítka (s rovnoběžkami, bez stupnice, bez pravého úhlu, bez úhloměru, bez kružítka):
   a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$
   b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$
   c) $3\overrightarrow{AB}$
   d) $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
   e) $-\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

2. Nechť jsou dány různé body A, B. Určete jakých hodnot nabývá reálné číslo λ pro různé volby bodu C na přímce $\overleftrightarrow{AB}$, když platí:
$$\lambda\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$
(zn. $\lambda = (AB; C)$ pro $A \neq C \neq B$, dělicí poměr).

☠ Volte hodnoty $A = 0, B = 1$ a určete graf funkce $f(C) = (AB; C)$.

DÚ Je-li dělicí poměr $(AB; C) = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$, určete $(BA; C), (AC; B), (CA; B), (CB; A), (BC; A)$ v závislosti na λ.

3. Nechť A, B, C, D jsou čtyři různé kolineární body. Definujme reálné číslo
$$\delta = \frac{(AB; C)}{(AB; D)}.$$
Určete kdy je δ kladné a kdy záporné číslo.
(zn. $\delta = (AB; CD)$, dvojpoměr).

4. Ověřte, že krajní body těžnice, její střed a těžiště příslušného trojúhelníku tvoří harmonickou čtveřici. Určete v jakém pořadí.

5. Nalezněte body A, B, C, D na celočíselné ose (souřadnice jsou celá čísla) tak, aby dvojpoměr $(AB; CD) = -1$ (t.j. A, B, C, D tvoří harmonickou čtveřici) a určete hodnotu $(CD; AB)$.

DÚ 2 V rovině jsou dány body A a B. Na přímce $\overleftrightarrow{AB}$ najděte množinu bodů X takových, že

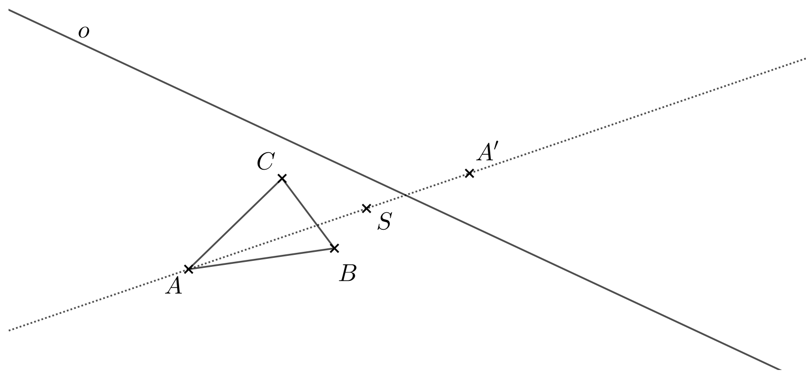
- $|(AB;X)| = 2$
- $|(AB;X)| = 1/3$
- $(AB;X) \cdot (BX;A) = 1$

6. Jsou dány 3 různé kolineární body A, B, C. Dělicí poměr $(AB;C)$ označme λ. Určete hodnotu rozdílu součtu dělicích poměrů $(AB;C)$ a $(AC;B)$ a součinu dělicích poměrů $(AB;C)$ a $(BA;C)$.

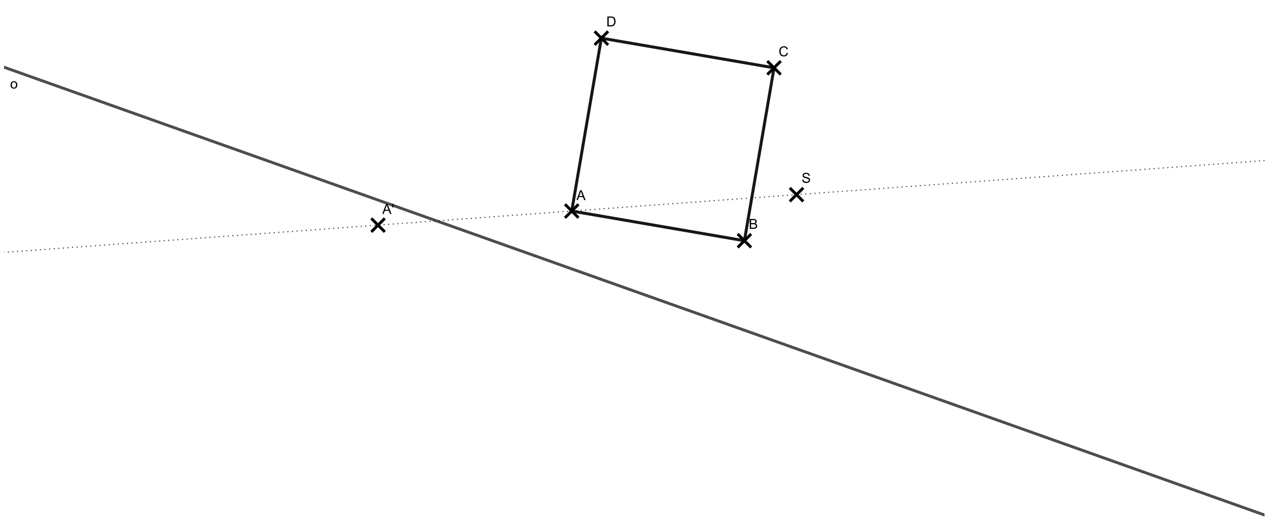
7. Na přímce $\overleftrightarrow{AB}$ je dán bod D takový, že dělicí poměr $(AB;D) = 2$. Najděte bod C takový, že body A, B, C a D tvoří harmonickou čtveřici.

8. Je dána úsečka AB a její střed C. Na přímce $\overleftrightarrow{AB}$ najděte bod D takový, že dvojpoměr $(AB;CD) = \frac{1}{2}$.

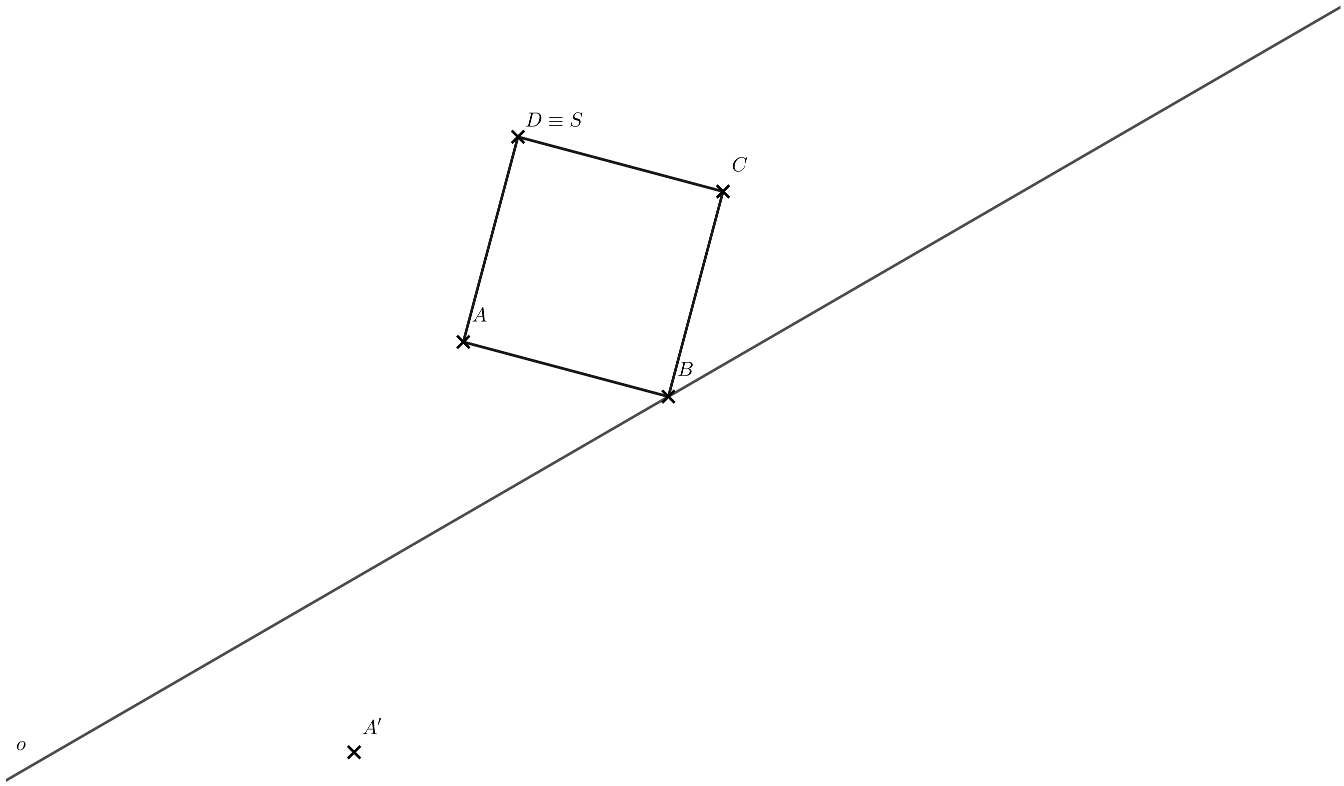
DÚ 3 Zobrazte trojúhelník ABC v středové kolineaci s osou o, středem S a párem odpovídajících si bodů $A \to A'$. Vyznačte (vyšrafujte) obraz množiny vnitřních bodů trojúhelníku ABC.



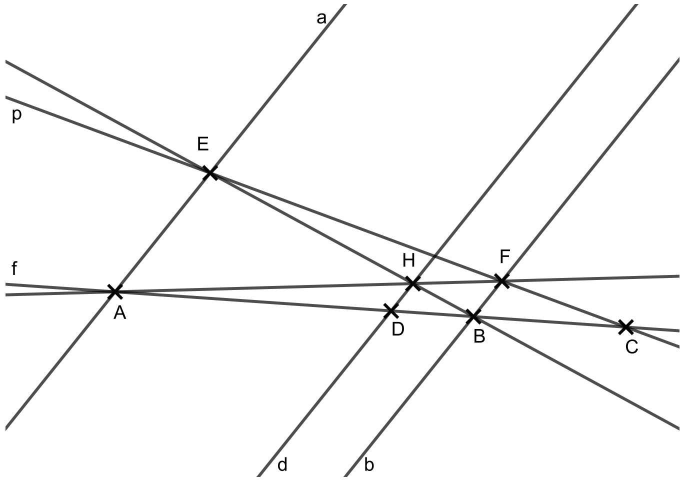
DÚ 4 V středové kolineaci se středem S, osou o a párem odpovídajicích si bodů $A \to A'$ sestrojte obraz čtverce $ABCD$.



9. V rovině je dán čtverec $\square ABCD$. Sestrojte jeho obraz $\square A'B'C'D'$ ve středové kolineaci se středem S ve vrcholu D, osou o procházející vrcholem B rovnoběžně s AC a daným obrazem bodu A', pro který platí $|A', o| = |A, o|$. Vyznačte (vyšrafujte/vybarvěte) plochu, na kterou se zobrazí vnitřek čtverce. Řešení úlohy stačí správně narýsovat do zadání.



☠ Dokažte, že v rovině platí následovná konstrukce harmonické čtveřice: Jsou dány různé kolineární body A, B, C. Volíme přímku $p \neq \overleftrightarrow{AB}$ takovou, že bod $C \in p$. Nechť a a b jsou rovnoběžné přímky $A \in a, B \in b$ ale $a, b \nparallel \overleftrightarrow{AB}, p$, které protínají přímku p v bodech $a \cap p = E, b \cap p = F$. Označme H průsečík $\overleftrightarrow{AF} \cap \overleftrightarrow{BE}$, jimž vedeme přímku d rovnoběžnou s a a b. Označme D průsečík přímek $d \cap \overleftrightarrow{AB}$, pak $(AB; CD) = -1$.
Nápověda: použijte podobnost.



☠ Nechť jsou dány čtyři různé body A, B, C, D na přímce p a bod O, který na ní neleží. Označme $\overleftrightarrow{AO} = a$ a podobně b, c, d Dokažte, že platí:

$$(AB;CD) = \frac{\sin(a,c)}{\sin(b,c)} : \frac{\sin(a,d)}{\sin(b,d)}.$$

$\sin(a,c)$ je sinus orientovaného úhlu $\sphericalangle(a,c)$.
Nápověda: použijte např. sinovou větu, vzorce pro obsah $\triangle$ ....

☠☠ Dokažte, že středová kolineace zachovává dvojpoměr. Nápověda: použijte tvrzení z předchozí úlohy.

10. V rovině je dán čtverec $ABCD$ (viz obrázek). Nechť bod E leží na přímce $\overleftrightarrow{BD}$ tak, že bod B je středem úsečky $\overline{DE}$.

    (a) Na přímce $\overleftrightarrow{DE}$ určete bod S takový, že dvojpoměr $(DB;ES) = 3$.

    (b) Určete obraz čtverce $ABCD$ a množiny jeho vnitřních bodů (vyšrafujte, vybarvěte, ...) ve středové kolineaci se středem S a osou $\overline{CE}$, ve které je bod B obrazem bodu D.