Planimetrie

Geometrická zobrazení (transformace)

Michal Zamboj

Pedagogická fakulta

2023

www2.karlin.mff.cuni.cz/~zamboj/

Základní pojmy

Definice (Zobrazení)

Nechť **X**, **Y** jsou dvě neprázdné množiny.
Zobrazením z množiny **X** do množiny **Y** rozumíme libovolný předpis, který každému prvku x z **X** přiradí nejvýše jeden prvek y z **Y**.

Zobrazení množiny **X** do množiny **Y**, ($f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$) přiřazuje každému prvku x z **X** právě jeden prvek y z **Y**.

$\mathbf{X}, \mathbf{Y} \neq \emptyset, f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y};\ \forall x \in \mathbf{X}\ \ \exists! y \in \mathbf{Y};\ f(x) = y$

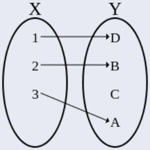
X - *definiční obor (při zobrazení množiny)*
x - *vzor*
$f(\mathbf{X})$ - *obor hodnot*
y - *obraz*

$f : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ zobrazení v množině **X**

Základní pojmy

Definice (Injektivní (prosté) zobrazení)

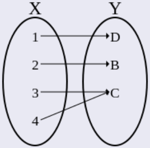
Zobrazení $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ se nazývá *injektivní, injekce, prosté*, když dvěma různým prvkům x_1, x_2 z množiny $\mathbf{X}$ přiřazuje různé prvky $f(x_1), f(x_2)$ z množiny $\mathbf{Y}$.



$$\forall x_1, x_2 \in \mathbf{X};\; x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Definice (Surjektivní zobrazení - na)

Zobrazení $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ se nazývá *surjektivní, surjekce*, když na každý prvek z množiny **Y** se zobrazí nějaký prvek z množiny **X.**

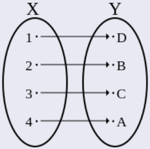


$\forall y \in \mathbf{Y}\ \exists x \in \mathbf{X}; y = f(x)$

Základní pojmy

Definice (Bijektivní (vzájemně jednoznačné) zobrazení)

Zobrazení $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ se nazývá *bijektivní, bijekce, vzájemně jednoznačné*, když je zároveň prosté i na.



$\forall y \in \mathbf{Y}\ \exists! x \in \mathbf{X};\ y = f(x)$

Základní pojmy

Definice (Inverzní zobrazení)

Jestliže $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ je prosté zobrazení, pak existuje zobrazení $f^{-1} : f(\mathbf{X}) \rightarrow \mathbf{X}$ takové, že $f^{-1}(y) = x$, pro $y \in f(\mathbf{X})$, právě tehdy, když $f(x) = y$. Zobrazení f^{-1} nazýváme *inverzní zobrazení* k f.

Definice (Složené zobrazení)

Nechť $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$, $g : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Z}$ jsou zobrazení.
Složeným zobrazením nazýváme zobrazení $g \circ f$ z $\mathbf{X}$ do $\mathbf{Z}$, které prvku x z $\mathbf{X}$ přiřadí prvek $g(f(x))$ ze $\mathbf{Z}$.

Pozor! Složené zobrazení není komutativní: $g \circ f \neq f \circ g$. Záleží tedy na pořadí skládání.

Základní pojmy

Definice (Involutorní zobrazení)

Zobrazení $f : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ se nazývá *involutorní, involuce*, když pro všechna x z $\mathbf{X}$ platí, že $f(f(x)) = x$.

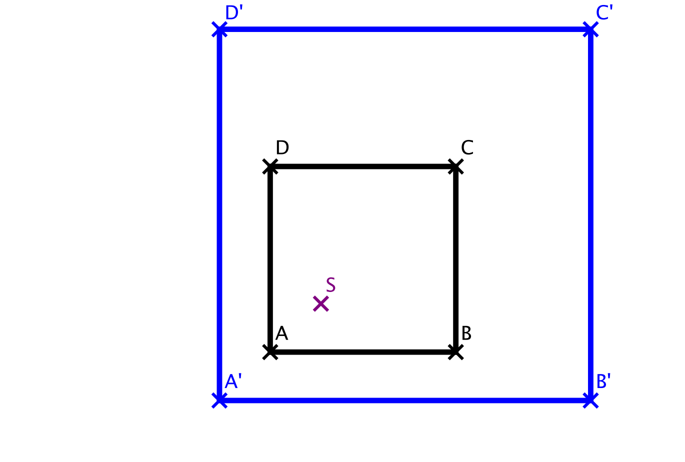
Geometrické zobrazení (transformace)

Definice (Geometrické zobrazení (transformace))

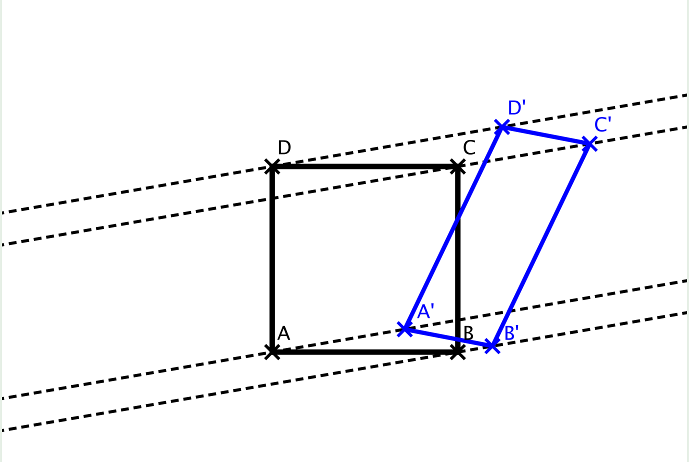
Geometrickým zobrazením (transformací) nazýváme zobrazení množiny bodů v rovině ρ (nebo prostoru,...).

Základní útvary jsou body, přímky (a roviny), které nedefinujeme (primitivní pojmy).

Příklad (Stejnolehlost)

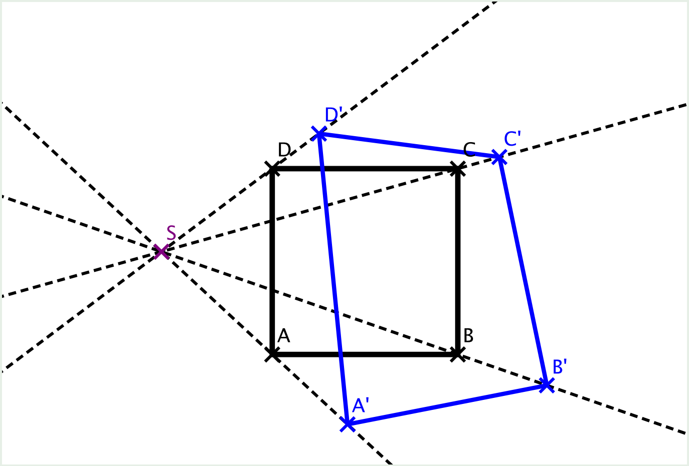


Příklad (Afinita)



Příklady geometrických zobrazení

Příklad (Kolineace)



Promítání

- středové promítání se středem S: obraz X' (průmět) bodu X leží na spojnici $\overleftrightarrow{SX}$ (promítací přímka)
- rovnoběžné promítání se směrem $\overrightarrow{s}$: obraz X' (průmět) bodu X leží na přímce procházející X ve směru $\overrightarrow{s}$ (promítací přímka)

Promítáme obyčejně do přímky nebo roviny (průmětny). Je-li v rovnoběžném promítání $\overrightarrow{s}$ kolmé k průmětně, pak jde o kolmé promítání.

Samodružné elementy

Definice (Samodružný bod)

Nechť $f : \rho \to \rho$ je zobrazení. *Samodružný bod* zobrazení f je bod X z ρ, který se zobrazí na sebe.
$f : \rho \to \rho : \; X \in \rho, \; f(X) = X$

Definice (Identické zobrazení)

Zobrazení $f : \rho \to \rho$ nazýváme *identické, identita*, když každému prvku přiřadí tentýž prvek.
$f : \rho \to \rho : \; \forall X \in \rho; \; f(X) = X$

Definice (Samodružná přímka)

Nechť $f : \rho \to \rho$ je zobrazení. *Samodružná přímka* zobrazení f je přímka p z ρ, která se zobrazí na sebe.
$f : \rho \to \rho; p \subset \rho \Rightarrow f(p) = p$

Pozor! U samodružné přímky nemusí platit, že každý její bod je samodružný.

Definice (Grupa)

Neprázdná množina $\mathbf{G}$ spolu s binární operací $\circ$ je grupa právě, když platí

1. množina $\mathbf{G}$ je uzavřená na operaci $\circ$, tj. $\forall f, g \in \mathbf{G}$ je $f \circ g \in \mathbf{G}$,
2. operace $\circ$ je asociativní, tj. $\forall f, g, h \in \mathbf{G}$ platí $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$,
3. existuje neutrální prvek vzhledem k operaci $\circ$, tj. $\exists i \in \mathbf{G}$, že $\forall f \in \mathbf{G}$ platí $f \circ i = f = i \circ f$,
4. ke každému prvku z množiny $\mathbf{G}$ existuje inverzní prvek, tj $\forall f \in \mathbf{G}, \exists f^{-1} \in \mathbf{G}$, že platí $f \circ f^{-1} = i = f^{-1} \circ f$.

Budeme se omezovat na grupy geometrických zobrazení:
$\mathbf{G}$ je množina geometrických zobrazení $f, g, h \ldots$, $\circ$ je operace skládání, i je identita, a f^{-1} je inverzní zobrazení.

Příklad (Příklady grup a "negrup")

$(\mathbb{Z}, +, -, 0)$
$(\mathbb{Q}, +, -, 0)$
$(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot, :, 1)$
$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, :, 1)$
Pozor: třeba $(\mathbb{Z}, \cdot, :, 1), (\mathbb{N}, +, -, 0), (\mathbb{Q}, \cdot, :, 0)$ netvoří grupu.
Později se seznámíme s grupami geometrických zobrazení.