Planimetrie

Konstrukční úlohy

Michal Zamboj

Pedagogická fakulta

2023

www2.karlin.mff.cuni.cz/~zamboj/

Geometrie

- Syntetická geometrie: studium geometrie syntetickou (ale i analytickou) metodou, s vizualizací (náčrtek, model), objekty jsou vybudovány od základu užitím geometrických konstrukcí
- Syntetická metoda - skládaní jednodušších útvarů, resp. tvrzení k složitějším
- Analytická metoda - užití souřadnic, popis a argumentace pomocí pravidel algebry a matematické analýzy
- Planimetrie - studium rovinných útvarů
- Stereometrie - studium prostorových útvarů

Konstrukční úloha

- Úloha, jejíž výsledkem je zkonstruovat/ sestrojit geometrický útvar ze zadaných prvků a se zadanými nástroji (pravítko, kružítko apod.)
- Cílem konstrukčních úloh je naučit se **metodam řešení**, **analyzovat** vyřešenou situaci, sestavit plán/ **postup** ze zadaných prvků a s pomocí zadaných nástrojů, **argumentovat** podmínky existence a jednoznačnosti, resp. počtu řešení, . . . rýsovat.
- Aplikace konstrukčních úloh - v menší míře v praktických činnostech, stavebnictví, malířství, zobrazování, architektuře . . . . V širším smyslu - dokazování matematických vět, řešení problémů, konstrukce algoritmů, vhled do hlubších vlastností geometrických útvarů.
- Historický kontext - od počátku axiomatické metody (struktury matematických teorií), Eukleidés: Základy (cca 3. st. p. n. l.).

V ČEM SE LIŠÍ TYTO ÚLOHY?

Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, jsou-li dány: .

a) Délky strany $a = 8$, těžnice $t_a = 5$, výšky $v_a = 4$.
b) Délky strany a, těžnice t_a, výšky v_a.
c) Výška v_a délky 4 svojí polohou v rovině. Délky strany $a = 8$ a těžnice $t_a = 5$.
d) Vrcholy B, C v rovině, kde $B \neq C$, a délky těžnice t_a a výšky v_a.

Formální struktura konstrukčních úloh

- zadání
- náčrt a rozbor (analýza)
- postup konstrukce a konstrukce
- důkaz konstrukce, resp. zkouška (lze zahrnout do rozboru, nebo diskuze)
- diskuze řešitelnosti a počtu řešení, závěr

Formální struktura konstrukčních úloh

- zadání
- náčrt a rozbor (analýza) — heuristická fáze
- postup konstrukce a konstrukce
- důkaz konstrukce, resp. zkouška (lze zahrnout do rozboru, nebo diskuze)
- diskuze řešitelnosti a počtu řešení, závěr

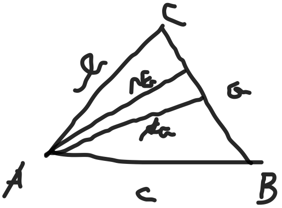
Formální struktura konstrukčních úloh

- zadání
- náčrt a rozbor (analýza) — heuristická fáze
- postup konstrukce a konstrukce — algoritmická fáze
- důkaz konstrukce, resp. zkouška (lze zahrnout do rozboru, nebo diskuze)
- diskuze řešitelnosti a počtu řešení, závěr

Formální struktura konstrukčních úloh

- zadání
- náčrt a rozbor (analýza) — heuristická fáze
- postup konstrukce a konstrukce — algoritmická fáze
- důkaz konstrukce, resp. zkouška (lze zahrnout do rozboru, nebo diskuze)
- diskuze řešitelnosti a počtu řešení, závěr — argumentační fáze

Sestrojte $\triangle ABC$ jsou-li dány a, t_a, v_a



Postup

1) $\overline{BC}; |BC| = a$
2) $S_{BC}; |BS_{BC}| = |CS_{BC}|$
3) $k; k(S_{BC}, t_c)$
4) $p; p \| \overline{BC}, |p, \overline{BC}| = v_a$
5) $A; A = k \cap p$

... Následuje precizní konstrukce...

Důkaz: důkaz konstrukce byl proveden zpětným průběhem konstrukce

Závěr: Úloha má 2 řešení v dané polorovině.

Co je zde špatně?

Podle zadání dělíme konstrukční úlohy na:

- polohové (např. „Je dána přímka, bod … “) — Je známá poloha alespoň jednoho prvku. Výsledek je závislý na poloze.
- nepolohové (např. „Sestrojte útvar, t.ž. délka, tvar “) — Jsou známé jenom vlastnosti útvaru, ale není známá poloha žádného! prvku. Výsledek nezávisí na poloze (a orientaci).

Poznámky

- U polohové úlohy musíme vždy začít zadaným prvkem (rozbor, postup).
- V nepolohové úloze jsou shodná řešení počítána pouze jednou (formalismus „až na shodnost“). V polohové úloze jsou výsledkem všechny sestrojitelné možnosti (počet řešení v diskuzi).

1. Náčrt a rozbor

- Náčrt — načrtneme vyřešenenou situaci, náčrtky můžou dynamicky přibývat v průběhu řešení (je to metoda řešení)
- Je-li nám postup jasný, tak napíšeme hlavní myšlenku řešení (např. využijeme vlastnosti rovnostranného trojúhelníku ... , Thalétovou kružnici nad ... , ekvigonálu nad úsečkou. . . , stejnolehlost se středem v bodě X a koeficientem κ . . . , doplníme na rovnoběžník . . .).

1. Rozbor

- Když nevíme, analyzujeme vyřešenou situaci — vypíšeme všechny definice a vlastnosti zadaných a hledených prvků a všechna tvrzení, ve kterých se tyto prvky vyskytují (např. je-li v zadání ortocentrum, tak se zaměříme na výšky, kolmost, pravoúhle trojúhelníky a věty o nich). Zaměříme se na **vztahy mezi zadanými a hledanými prvky**. Na **množiny bodů**, na kterých leží výsledné prvky (např. kružnice, přímky, rovnoběžky, ekvidistanta . . .). Na **zobrazení, které zachovávají vlastnosti** útvarů ze zadání (např. rovnostranný trojúhelník a otočení, rovnoběžník a středová souměrnost, tečna kružnice a stejnolehlost/posunutí . . .). Na **přeformulování/přenesení** úlohy (např. kruhovou inverzí, dilatací) a zpětné vrácení. Použití **výpočtu a analytických metod**.

1. Náčrt a rozbor

- V rozboru se úloha vyřeší, v postupu už jen shrne.
- Je vhodné se rovnou zamyslet (a zapsat) předpokládaný počet řešení, či další úvahy o sestrojitelnosti.

Nejčastější chyby:

- V náčrtku by měly být zakresleny všechny útvary, o kterých se píše v rozboru (jinak je rozbor obyčejně nepřehledný).
- Náčrtek není rozbor. Rozbor je rozbor.
- Rozbor a následná kontrukce jenom speciálního případu. Radši udělat více různých náčrtků, ideálně co nejhraničnějších vlastností.

2. Postup konstrukce a konstrukce

- Soupis (všech) konstrukčních kroků a jejich provedení.
- Slovně nebo symbolicky (na základě domluvených pravidel). Postup je vhodné číslovat, hodí se nám to do diskuze.
- Triviální konstrukce (které už známe z předešlých úloh) můžeme zkrátit. Např. sestrojíme střed úsečky, bez toho abychom to rozepisovali (pozor, při výuce! všem žákům musí být jasné jak se to provede a zapíše).

2. Postup konstrukce a konstrukce

- Sestrojujeme co nejobecnější situaci (nevolíme speciální parametry, kolmost úhlu, rovnoběžnost apod.). Obyčejně stačí sestrojit jedno řešení. Někdy se vyžaduje narýsovat i další řešení (explicitně v zadání).
- Konstrukce a postup konstrukce se dělají současně v každém kroku.

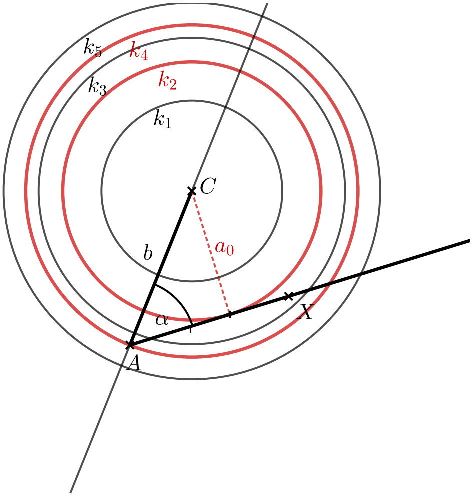
Nejčastější chyby:

- Přeskočení konstrukce nějakého prvku. Každý použitý prvek musí být předem sestrojen. Obyčejně když se nejdříve rýsuje, pak sepisuje postup.
- Polohová úloha nezačne zadaným prvkem.
- Zapomenutí posledního kroku (narýsování výsledného útvaru).
- Nepřesná/přibližná konstrukce (chybějící kroky).

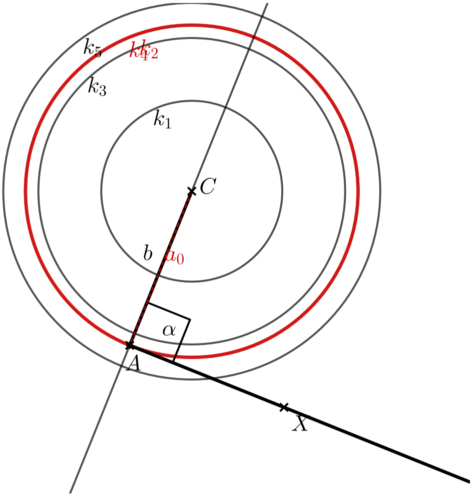
Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, jsou-li dány délky stran a, b a velikost úhlu α.

1) $C, A; |CA| = b$
2) $\overrightarrow{AX}; |\sphericalangle CAX| = \alpha$
3) $k; k(C, a)$
4) $B; B \in \overrightarrow{AX} \cap k$
5) $\triangle ABC$

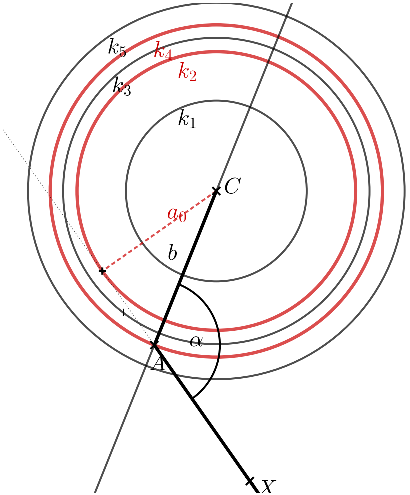
Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, jsou-li dány délky stran a, b a velikost úhlu α.



Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, jsou-li dány délky stran a, b a velikost úhlu α.



Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, jsou-li dány délky stran a, b a velikost úhlu α.



3. diskuze existence a počtu řešení, ověření postupu konstrukce

- Argumentační části úlohy. Vychází z postupu konstrukce.

Ověření a diskuze existence řešení:

- Je možné, že některé z prvků v konstrukci nebylo možné sestrojit. Je potřeba provést diskuzi existence řešení.
- Navíc je možné, že sice jsme sestrojili všechny prvky, ale nesplňují vlastnosti hledaného útvaru (např. vrcholy trojúhelníku A, B, C leží v přímce).
- V jednotlivých bodech postupu vznikají nové prvky, je potřeba zajistit jejich existenci, speciálně průniků množin (průsečíků). Tím dostaneme podmínky existence řešení. Podmínky se musí opírat o zadané! prvky a musí být řádně zdůvodněné.
- V případě, že jsou zadané hodnoty nebo polohy všech prvků a žádný není proměnný, tak je samotná konstrukce důkazem existence.

3. diskuze existence a počtu řešení, ověření postupu konstrukce

Ověření a diskuze počtu řešení:

- Je možné, že uvedeným postupem konstrukce jsme sestrojili i některé prvky, které nejsou správným řešením (nesplňují zadané podmínky). Ty je potřeba vyloučit (s argumentem proč nejsou řešením)
- Počty řešení se obyčejně změní při speciálních případech podmínek existence (ostrá nerovnost, rovnost apod.). Počet řešení je vždy potřebné zdůvodnit (např. kružnice v 7. kroku konstrukce se za podmínky a) protne s přímkou ve dvou, za podmínky b) v jednom, za podmínky c) v žádném bodě).
- U nepolohové úlohy nezáleží na poloze a orientaci útvarů. Víc řešení vzniká jen když se liší jiné vlastnosti útvarů.
- Polohová úloha má tolik řešení, kolik je možných výsledných útvarů (bez ohledu na pojmenování) vzhledem k poloze zadaných prvků.

3. diskuze existence a počtu řešení, ověření postupu konstrukce

Nejčastější chyby:

- Formalismus: „V dané polorovině existuje ... řešení.“ Která je daná?
- Formalismus: „Ověření konstrukce (zkouška, důkaz) bylo provedeno zpětným projdením kroků konstrukce.“ Skutečně?
- Úloha (např. $\triangle a, v_a, \alpha$) má řešení, když je splněná trojúhelníková nerovnost (diskuze není vedena ze zadaných prvků, každý trojúhelník musí splňovat $\triangle \neq$)
- Řešení se můžou ztratit když konstruujeme jenom části množin (hlavně: polopřímky místo přímek, polokružnice, místo kružnice, osy úhlu místo osy různoběžek, rovnoběžku ve vzdálenosti místo ekvidistanty = dvojice rovnoběžek)
- Nerozlišení polohové a nepolohové úlohy.
- Chybějící zdůvodnění.