Planimetrie

Mnohoúhelníky

Michal Zamboj

Pedagogická fakulta

2021

www2.karlin.mff.cuni.cz/~zamboj/

Čtyřúhelníky

Definice (Čtyřúhelník)

Jsou dány čtyři body A, B, C, D v rovině, z nichž žádné tři nejsou kolineární.
Čtyřúhelník $ABCD$ je sjednocení dvou trojúhelníků ABC a ACD, které mají společnou pouze stranu AC (a žádný další bod).

Pozor, zadefinovali jsme jenom "nepřekrývající se"čtyřúhelník, obecněji mnohoúhelník o 4 vrcholech a 4 stranách...

Věta (Menelaova věta pro čtyřúhelníky)

Je dán čtyřúhelník ABCD. Na přímkách $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{DA}$ leží po řadě body A', B', C', D', které jsou všechny různé od vrcholů ABCD. Body A', B', C', D' leží na jedné přímce právě tehdy, když na stranách čtyřúhelníku leží buď čtyři (v nekonvexním případě) nebo dva z nich nebo žádný a platí

$$(AB;A')(BC;B')(CD;C')(DA;D') = 1$$

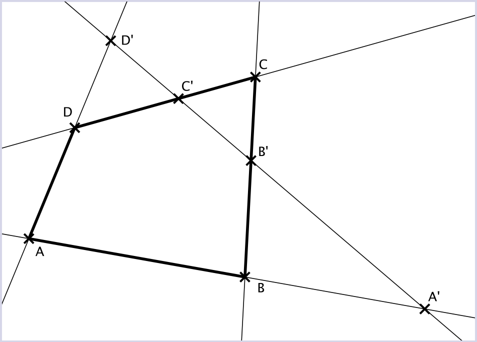
nebo s využitím vzdálenosti: $\dfrac{|AA'|}{|BA'|}\dfrac{|BB'|}{|CB'|}\dfrac{|CC'|}{|DC'|}\dfrac{|DD'|}{|AD'|} = 1$

Čtyřúhelníky a incidence

Věta (Menelaova věta pro čtyřúhelníky)

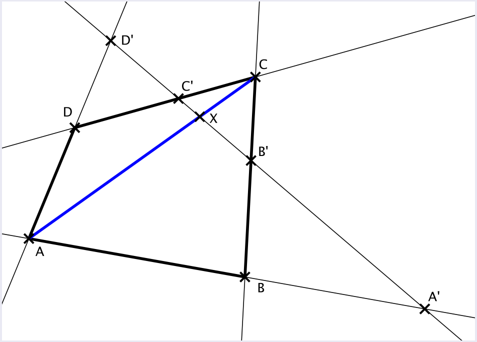
$$(AB; A')(BC; B')(CD; C')(DA; D') = 1$$

Důkaz ($\Rightarrow$)



Důkaz (Jen pro $\Rightarrow$)

Jsou-li A', B', C', D' na přímce pak platí rovnost.



Menelaova věta pro
$\triangle ABC : (AB; A')(BC; B')(CA; X) = 1$
$\triangle ACD : (AC; X)(CD; C')(DA; D') = 1$
$(AB; A')(BC; B')(CD; C')(DA; D') =$
$(AB; A')(BC; B')(CA; X)(AC; X)(CD; C')(DA; D') = 1$

Čtyřúhelníky a incidence

Definice (Klasifikace čtyřúhelníků podle rovnoběžnosti)

- *Obecný* - žádné dvě strany nejsou rovnoběžné
- *Lichoběžník* - dvě protější strany jsou rovnoběžné
- *Rovnoběžník* - obě dvojice protějších stran jsou vzájemně rovnoběžné

Čtyřúhelníky a incidence

Věta (Úhlopříčky v lichoběžníku)

Průsečík úhlopříček lichoběžníku leží na těžnici trojúhelníku, který vznikne prodloužením jeho nerovnoběžných stran.

Důkaz

Cvičení. Např. přes obsah $\triangle$. (obecně lze např. i za pomoci harmonické čtveřice)

Věta (Rovnoběžníkové pravidlo)

Úhlopříčky rovnoběžníku se vzájemně půlí.

Důkaz

Např. afinitou přes dělicí poměr.

Věta ($\sum \sphericalangle$ čtyřúhelníku)

Součet vnitřních úhlů čtyřúhelníku je roven 2π.

Důkaz

Přímo z definice a věty o $\sum \sphericalangle \triangle$

Čtyřúhelníky a úhly

Definice (Klasifikace čtyřúhelníků podle úhlů $\alpha, \beta, \gamma, \delta$)

- *Obecný* - $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$
- *Tětivový* - $\alpha + \gamma = \beta + \delta = \pi$
- *Lichoběžník* - $(\alpha + \delta = \beta + \gamma = \pi) \vee (\alpha + \beta = \gamma + \delta = \pi)$
- *Rovnoběžník* - $(\alpha = \gamma) \wedge (\beta = \delta)$
- *Rovnoramenný lichoběžník* - $(\alpha = \beta) \wedge (\gamma = \delta)$
- *Pravoúhelník* - $\alpha = \beta = \gamma = \delta = \frac{\pi}{2}$

Věta (Tětivový čtyřúhelník)

Čtyřúhelník je tětivový právě tehdy, když mu lze opsat kružnici.

Důkaz

$\Rightarrow$ *plyne z kružnice jako množiny vrcholů daného úhlu nad úsečkou.*
$\Leftarrow$ *plyne z věty o obvodovém a středovém úhlu.*

Klaudios Ptolemaios cca. 90 - 165 n.l.

Věta (Ptolemaiova veta)

Nechť je dán čtyřúhelník ABCD, pak platí

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| \geq |AC| \cdot |BD|.$$

Rovnost nastane, je-li čtyřúhelník tětivový.

Neboli: Součin velikostí úhlopříček v čtyřúhelníku je menší, nebo rovný součtu součinů jeho protilehlých stran.

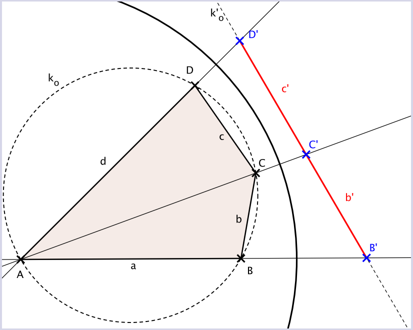
Důkaz (Pomocí kruhové inverze)

Volíme kruhovou inverzi s řídicí kružnici se středem v bodě A a poloměrem $r = 1$*, ve které zobrazíme čtyřúhelník* $ABCD \rightarrow A'B'C'D'$.

Věta (Ptolemaiova veta)

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| \geq |AC| \cdot |BD|.$$

Důkaz (Pomocí kruhové inverze)



Z kosinové věty platí:

$|B'C'|^2 =$
$|AB'|^2 + |AC'|^2 - 2|AB'| \cdot |AC'| \cos\alpha$
$|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2 - 2|AB| \cdot |AC| \cos\alpha$

Z kruhové inverze platí:

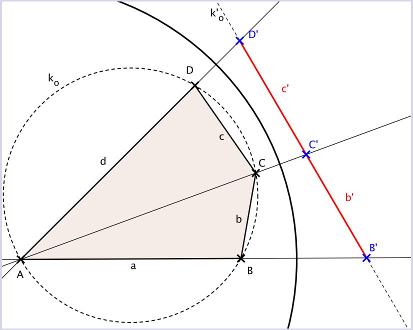
$$|AB'| = \frac{1}{|AB|}$$

$$|AC'| = \frac{1}{|AC|}$$

Věta (Ptolemaiova veta)

$$|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| \geq |AC| \cdot |BD|.$$

Důkaz (Pomocí kruhové inverze)



$|B'C'|^2 = \frac{1}{|AB|^2} + \frac{1}{|AC|^2} - \frac{2\cos\alpha}{|AB| \cdot |AC|}$

upravíme na $|B'C'| = \frac{|BC|}{|AB| \cdot |AC|}$

a stejně $|C'D'| = \frac{|CD|}{|AC| \cdot |AD|}$

$|B'D'| = \frac{|BD|}{|AB| \cdot |AD|}$

Obecně v $\triangle B'C'D'$ *platí* $\triangle \neq$, *leží-li ABCD na kružnici pak leží* $B'C'D'$ *na přímce a platí (ne)rovnost:*
$|B'C'| + |C'D'| \geq |B'D'|$
po substituci a upravení dostáváme požadované tvrzení.

Čtyřúhelníky a vzdálenosti

Definice (Klasifikace čtyřúhelníků podle stran a, b, c, d a úhlopříček e, f)

- *Obecný* - $a \cdot c + b \cdot d \geq e \cdot f$
- *Tečnový* - $a + c = b + d$
- *Deltoid* - $(a + b = c + d) \wedge (a + c = b + d)$
- *Rovnoběžník* - $(a = c) \wedge (b = d)$
- *Kosočtverec* - $a = b = c = d$
- *Čtverec* - $(a = b = c = d) \wedge (e = f)$

Příklad

Definujte rovnoramenný lichoběžník pomocí délek stran a úhlopříček.

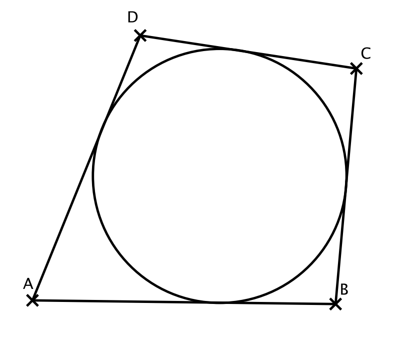
Čtyřúhelníky a vzdálenosti

Věta (Tečnový čtyřúhelník)

Čtyřúhelník je tečnový právě tehdy, když mu lze vepsat kružnici.

Důkaz

$\Leftarrow$ *Lze mu vepsat kružnici, pak platí:*



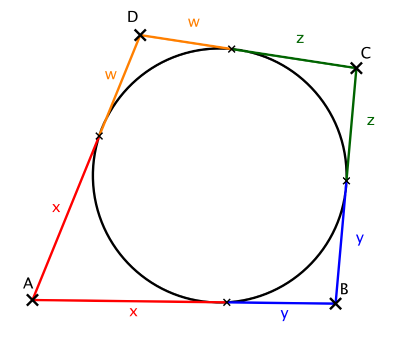
Čtyřúhelníky a vzdálenosti

Věta (Tečnový čtyřúhelník)

Čtyřúhelník je tečnový právě tehdy, když mu lze vepsat kružnici.

Důkaz

$\Leftarrow$ *Lze mu vepsat kružnici, pak platí:*



$$x + y + z + w = x + w + z + y$$

Věta (Tečnový čtyřúhelník)

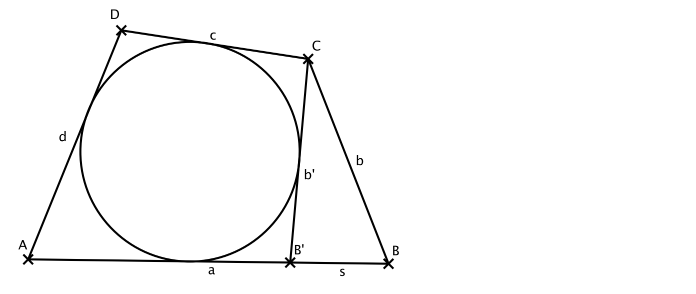
Čtyřúhelník je tečnový právě tehdy, když mu lze vepsat kružnici.

Důkaz

$\Rightarrow$ *Platí* $a + c = b + d$
Sporem: Nechť mu nelze vepsat kružnici, t.j. BÚNO, $\overline{BC}$ *není tečnou vepsané kružnice trojúhelníku o stranách* $\overline{AB}, \overline{CB}, \overline{AD}$*. Bodem C vedeme tečnu* b' *ke kružnici* $\rightarrow$ $AB'CD$ *je tečnový čtyřúhelník, pro který platí:*

Věta (Tečnový čtyřúhelník)

Důkaz



$$Z \text{ „}\Leftarrow\text{“} a - s + c = b' + d,$$
$$z \text{ předpokladu platí } a + c = b + d,$$
$$t.j. \ s = b - b' \text{ a v } \triangle B'BC \text{ neplatí } \triangle \neq.$$

Spor neplatí, tudíž tvrzení platí.

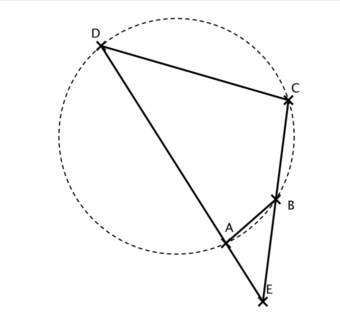
Věta (Brahmaguptův vzorec)

V tětivovém čtyřúhelníku ABCD se stranami a, b, c, d a polovičním obvodem s platí pro jeho obsah S

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Důkaz

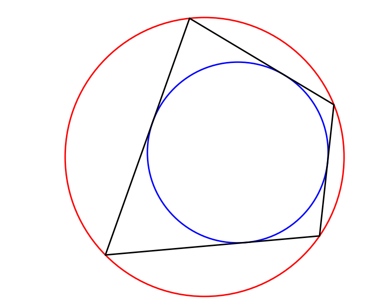
Bez důkazu (stačí Héronův vzorec pro $\triangle CDE$ a podobnost trojúhelníků $\triangle CDE \sim \triangle BAE$)



Pozn. Tečnové a tětivové čtyřúhelníky lze definovat pomocí kružnice i obráceně.

Definice (Dvoustředový (bicentrický) čtyřúhelník)

Je-li čtyřúhelník současně tětivový a tečnový, nazýváme ho dvoustředový.



Příklad

a) Sestrojte bicentrický čtyřúhelník.
b) Určete obsah bicentrického čtyřúhelníku.

Konvexní mnohoúhelník

Definice (Mnohoúhelník)

Mnohoúhelník je část roviny ohraničená uzavřenou lomenou čarou, včetně ní.

Pozor! Definice je nepřesná, nevíme co je uzavřená lomená čára (to by nevadilo), ale hlavně co znamená ohraničená. Dalo by se jako sjednocení trojúhelníků, no vedlo by to k pekelným formulacím.

Definice (Konvexní mnohoúhelník)

Mnohoúhelník, který má velikosti všech vnitřních úhlů menší než π nazýváme *konvexní mnohoúhelník*.

Definice (Konvexní útvar)

Útvar nazýváme *konvexní*, leží-li každý bod libovolné spojnice dvou jeho vnitřních bodů, uvnitř něj.
Útvar, který není konvexní, nazýváme *nekonvexní*.

Konvexní mnohoúhelník

Věta (Vlastnosti konvexních mnohúhelníků)

V každém konvexním n-úhelníku je:

- *Součet vnitřních úhlů* $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = (n-2)\pi$.
- *Součet vnějších úhlů* $\alpha'_1 + \alpha'_2 + \cdots + \alpha'_n = 2\pi$.
- *Počet úhlopříček* $\dfrac{n(n-3)}{2}$.

Pravidelný mnohoúhelník

Definice (Pravidelný mnohoúhelník)

Pravidelným mnohoúhelníkem nazýváme (konvexní) mnohoúhelník, který má všechny strany stejně dlouhé a všechny vnitřní úhly stejně velké.

Věta (Vlastnosti pravidelných mnohoúhelníků)

Pravidelný n-úhelník se stranou délky a má:

- *vnitřní úhly velikosti* $\dfrac{(n-2)\pi}{n}$
- *délku poloměru kružnice opsané* $r = \dfrac{a}{2\sin(\frac{\pi}{n})}$
- *délku poloměru kružnice vepsané* $\rho = \dfrac{a}{2\,\mathrm{tg}(\frac{\pi}{n})}$
- *obvod* $o = n \cdot a$
- *obsah* $S = \frac{1}{2} n \cdot a \cdot \rho = \frac{n \cdot a^2}{4} \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{n})$

Konstrukce pravidelného mnohoúhelníku

Definice (Fermatova čísla)

Čísla F_n tvaru $F_n = 2^{2^n} + 1$, pro $n \in \mathbb{N}_0$ nazýváme Fermatova čísla.

Dosud je známo jen 5 Fermatovych prvočísel
$F_0 = 3, F_1 = 5, F_2 = 17, F_3 = 257, F_4 = 65537$

Věta (Konstrukce pravidelného mnohoúhelníku)

Pravidelný n-úhelník, $n > 2$ lze eukleidovsky sestrojit jen pro čísla n ve tvaru $n = 2^k F_0 F_1 F_2 \dots$ pro $k \in \mathbb{N}_0$ a F_p jsou různá Fermatova **prvo***čísla (v součinu nemusí být všechny).*

t.j. $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, \dots$

Konstrukce pravidelného mnohoúhelníku

Rozdělíme-li libovolnou úsečku na dvě nestejně dlouhé částí tak, že poměr délky celé úsečky ku délce větší části je stejný jako poměr větší části úsečky ku délce části menší je tato úsečka rozdělena *zlatým řezem*.

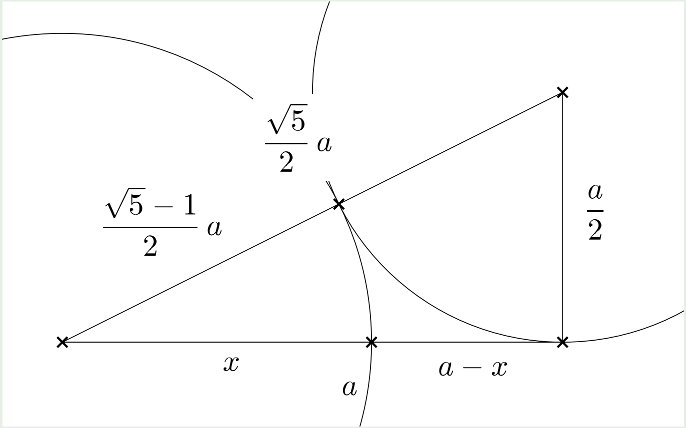
$$\varphi = \frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$$
$$a^2 - ax - x^2 = 0$$
$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}a$$
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

`http://kdm.karlin.mff.cuni.cz/diplomky/chmelikovabp/Zlaty_rez.pdf` - zlatý řez od V. Moravcové

Konstrukce pravidelného mnohoúhelníku

Konstrukce (Zlatý řez)

Rozdělte úsečku v poměru zlatého řezu.

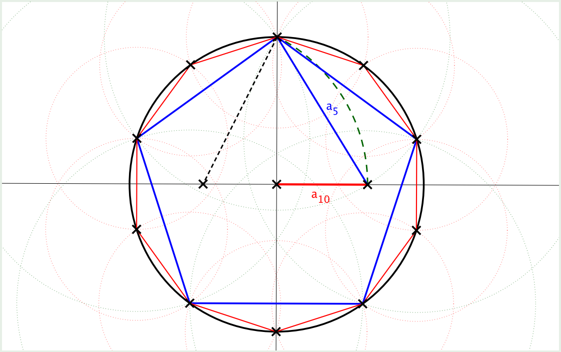


Příklad (cv.)

a) Dokažte, že délka úhlopříčky a délka strany pravidelného pětiúhelníku jsou v poměru zlatého řezu.

b) Zkonstruujte pravidelný pětiúhelník.

c) Zkonstruujte pravidelný desetiúhelník.



Jinopravidelné mnohoúhelníky

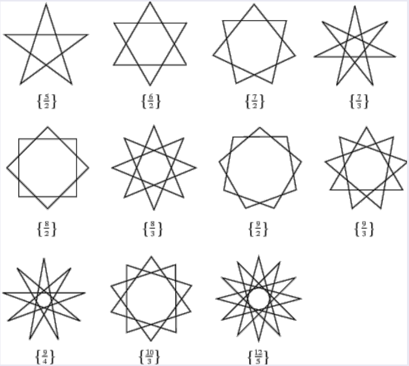
Definice (Polopravidelný mnohoúhelník)

Polopravidelným mnohoúhelníkem nazýváme mnohoúhelník, který má buď všechny strany stejně dlouhé nebo všechny vnitřní úhly stejně velké. (t.j. platí právě jedna podmínka)

Jinopravidelné mnohoúhelníky

Definice (Hvězdicovitý pravidelný mnohoúhelník)

Hvězdicovitým pravidelným mnohoúhelníkem nazýváme nekonvexní mnohoúhelník, který má všechny strany stejně dlouhé a všechny vnitřní úhly stejně velké.



Izoperimetrická nerovnost

Příklad (cv.)

Ze všech pravoúhelníků o daném obvodu o najděte ten, který má největší obsah S

$o = 2a + 2b$
$S = ab$
platí: $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$ (proveďte konstrukcí)
$\sqrt{S} \leq \dfrac{o}{4}$
rovnost nastáva pro $a = b$

Pozn.: Pro uzavřenou křivku délky o ohraničující část plochy o obsahu S platí: $4\pi S \leq o^2$
pro $\triangle$: $12\sqrt{3}S \leq o^2$
pro n-úhelník: $4n\,\mathrm{tg}(\frac{\pi}{n})S \leq o^2$