

Planimetrie

Apollóniový úlohy

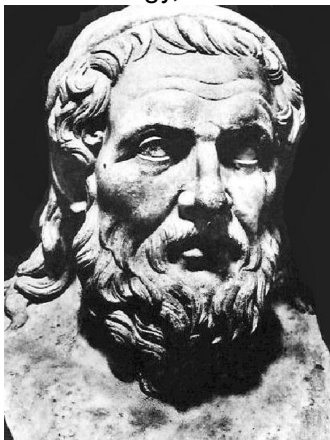
Michal Zamboj

Pedagogická fakulta

2021

`www2.karlin.mff.cuni.cz/~zamboj/`

Apollónios z Pergy, cca 3.-2. st. p.n.l



Apolloniovy úlohy

Jsou dány 3 různé kruhové útvary - kružnice, přímka (nekonečný poloměr), bod (nulový poloměr)

Úkolem je sestrojít kruhový útvar, který se dotýká všech zadaných útvarů.

Doplňující pravidla pro pokročilé hráče:

- Bod se přímkou nebo kružnicí „dotýká“, když na nich leží.
- Body v nekonečnu nepovažujeme za řešení.
- Rovnoběžné přímky se „dotýkají“ v nekonečnu, různoběžky ne.

Pozn. Pokud bod leží na přímce, nebo kružnici, tak se někdy úlohy nazývají Pappovy úlohy.

dodatečné materiály:

<http://apolloniovyulohy.webz.cz/>

MnB množina bodů dané vlastnosti

S stejnolehlost

M mocnost bodu ke kružnici

KI kruhová inverze

- někdy taky posunutí, dilatace a pod.

1. BBB

- a) A, B, C kolineární - (přímka)
- b) A, B, C nekolineární - (kružnice opsaná) - MnB

2. ppp

- a) p, q, r (bod)
- b) $p \parallel q \parallel r$ (bod v nekonečnu)
- c) $p \parallel q \not\parallel r$ - MnB, posunutí
- d) p, q, r vzájemně různoběžné, nekonkurentní - (kružnice vepsaná, kružnice připsané) - MnB

3. BBp

- a) $A, B \in p$ - (přímka p)
- b) $(A \in p) \wedge (B \notin p)$ - MnB
- c) $(A, B \notin p) \wedge (\overleftrightarrow{AB} \parallel p)$ - MnB
- d) $(A, B \notin p) \wedge (\overleftrightarrow{AB} \nparallel p) \wedge (\overline{AB} \cap p = \emptyset)$ - M, KI
- e) $(A, B \notin p) \wedge (\overleftrightarrow{AB} \nparallel p) \wedge (\overline{AB} \cap p \neq \emptyset)$ - (\emptyset)

4. BBk

- a) $A, B \in k$ - (kružnice k)
- b) $A \in k, B \notin k$ - MnB
- c) A a B vně/ uvnitř k - M, KI
- d) A vně, B uvnitř - (\emptyset)

5. Bpp

- a) $(p \parallel q) \wedge (A \in p) \wedge (A \notin q)$ - MnB
- b) $(p \parallel q) \wedge (A \in \text{pásu } p, q)$ - MnB + posunutí
- c) $(p \parallel q) \wedge (A \notin \text{pásu } p, q)$ - (\emptyset)
- d) $(p \nparallel q) \wedge (A \in p.q)$ - (bod A)
- e) $(p \nparallel q) \wedge (A \in p) \wedge (A \notin q)$ - S, KI
- f) $(p \nparallel q) \wedge (A \notin p, q)$ - S, KI

6. ppk

- $p \parallel q$ a dále podle polohy kružnic a přímek (8 možností) - MnB
- $p \not\parallel q$ a dále podle polohy kružnic a přímek (5 možností) - S

7. Bpk

- $A \in p \cap k$ - podle polohy přímky a kružnice (2 možnosti) 1, nebo ∞ řešení
- $A \in p \wedge A \notin k$ - podle polohy přímky a kružnice (3 možnosti) - S
- $A \in k \wedge A \notin p$ - podle polohy přímky a kružnice (3 možnosti) - S
- $A \notin p, k$ - podle polohy přímky a kružnice, a podle polohy bodu a kružnice (7 možnosti) - KI, dilatace

- $S_k = S_l$ - podle polohy přímky a kružnic (2 možnosti) - MnB
- $S_k \neq S_l$ - podle polohy kružnic a přímky (0-2 průsečíky s každou z kružnic) - KI, dilatace (převod na Bpk, BBp)

- $S_k = S_l = S_m - (\emptyset)$
- $S_k = S_l - \text{MnB}$
- $S_k \neq S_l \neq S_m \neq S_k$ - KI (převod na pkk, nebo na soustředné kružnice), dilatace (převod na Bkk, BBk, BBB)

- $S_k = S_l$ - podle polohy bodu (4 možnosti) - MnB
- $S_k \neq S_l$ podle polohy kružnic (5 možností) a dále podle polohy bodu - KI