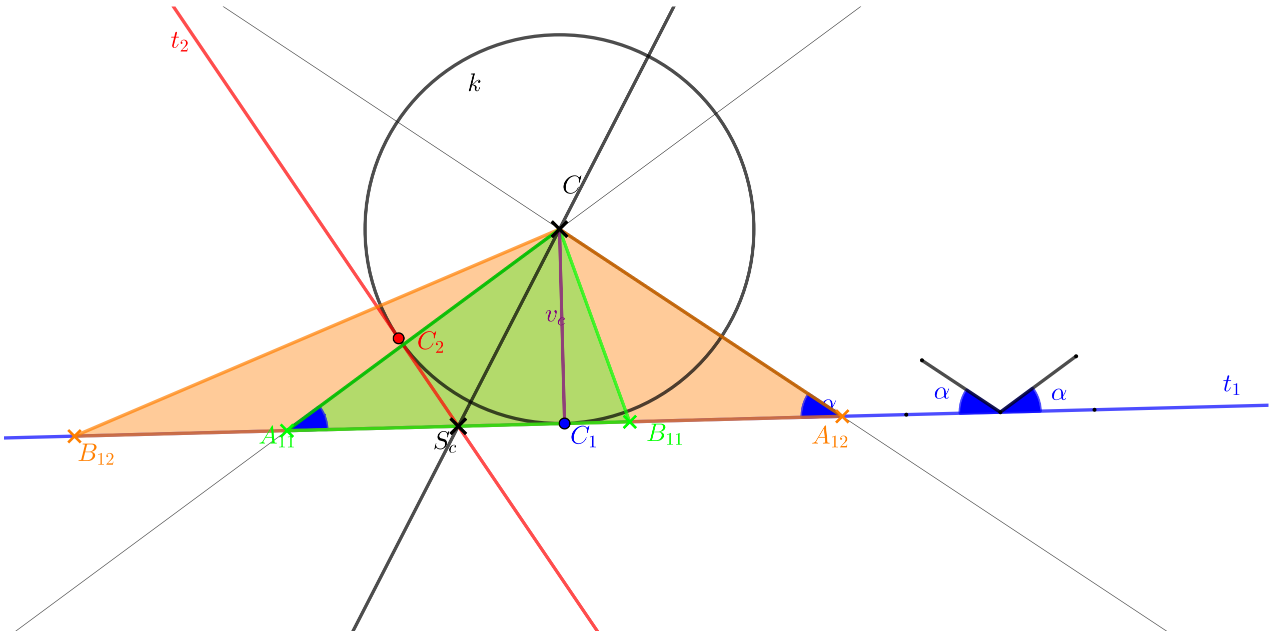
Řešení průběžného testu z Planimetrie - varianta A

Pozn. Řešení jsou bez dalších náčrtků (využijte applety) a podrobného popisu konstrukce. Uvádím vždy jen jedno z víc možných řešení. Najdete-li chyby napište mi, prosím.

1. V rovině jsou dány dva různé body C a S_c svojí polohou. Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$ je-li dána délka výšky v_c a velikost úhlu α tak, aby bod S_c byl středem strany c. Proveďte náčrt a rozbor, postup konstrukce a konstrukci, diskuzi existence a počtu řešení.



Rozbor:
Ze zadání máme vrchol C a střed S_c strany c. Stačí nám tedy dohledat Jeden z vrcholů A nebo B, druhý bude souměrný podle S_c. Více informací máme o vrcholu A.
Výška v_c je kolmá ke straně c. Přímka t obsahující stranu c bude tečnou kružnice k se středem C o poloměru v_c. Protože známe bod S_c strany c, můžeme z něj sestrojit tečnu t ke k.
K dohledání vrcholu A už stačí sestrojit přímku s odchylkou α od t tak, aby procházela vrcholem C (např. pomocí rovnoběžky).
Diskuze (viz online applet `https://www.geogebra.org/m/mqzsepqb`):
Nastávají dva problémy - jeden při použití výšky v_c (kružnice k) a druhý při vynášení úhlu α.
Existence: Z bodu S_c musí existovat tečna ke kružnici k, z toho plyne $|CS_c| \geq v_c$. U úhlu α je vhodné si uvědomit, že ho můžeme nanést v obou orientacích k přímce t. Řešení bychom mohli ztratit tehdy, kdyby výsledný trojúhelník neměl úhel α jako vnitřní, ale vnější. Hranici přechodu mezi vnitřním a vnějším úhlem určuje úhel $\sphericalangle CS_cC_1$, resp. jeho doplněk, kde C_1 je pata výšky v_c. Jinak řečeno, když strana AC splyne s těžnicí. Přesnou velikost tohoto úhlu lze získat jako $|\sphericalangle CS_cC_1| = \arcsin \frac{v_c}{|CS_c|}$. Díky tomu, že nanášíme úhel na obě orientace nastane problém existence řešení až na intervalu $\alpha \in \langle 90°, 180°)$. Celkově platí, že $\alpha < 180° - \arcsin \frac{v_c}{|CS_c|}$, což je druhá podmínka existence (a současně nám vyloučí stav, kdy $v_c = |CS_c|$ a $\alpha = 90°$).
Počet řešení (za platnosti podmínek existence): Jde o polohovou úlohu, počítáme i rozdílná shodná řešení. Je-li $v_c = |CS_c|$, pak dostaneme jen jednu tečnu, jinak pro $v_c < |CS_c|$ jsou tečny dvě.
Pro $v_c = |CS_C|$ je trojúhelník vždy rovnoramenný (pro obě orientace úhlu α), celkově 1 řešení.
Pro $v_c < |CS_C|$ dostáváme intervaly pro úhel α dle určování podmínky existence výše.

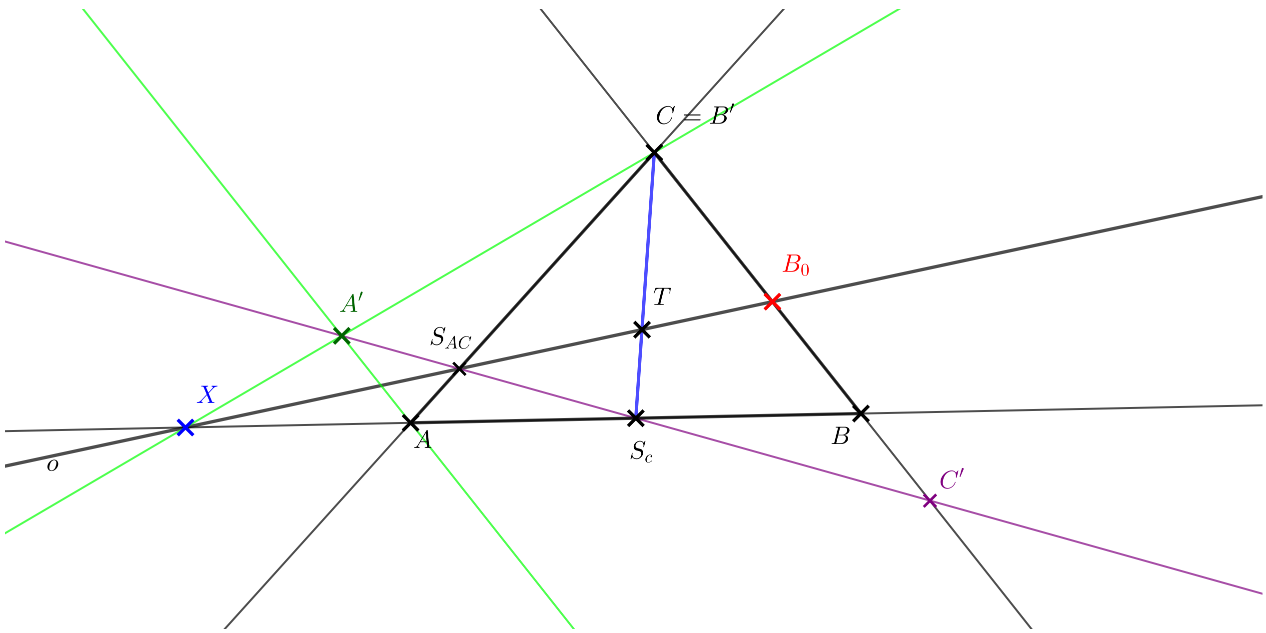
$\alpha \in (0°, \arcsin \frac{v_c}{|CS_c|})$ jsou 2 řešení na každé tečně, celkově tedy 4 řešení.

$\alpha \in (\arcsin \frac{v_c}{|CS_c|}, 180° - \arcsin \frac{v_c}{|CS_c|})$ je 1 řešení na každé tečně, celkově tedy 2 řešení.

2. V rovině je dán trojúhelník $\triangle ABC$.

(a) Sestrojte obraz $A'B'C'$ trojúhelníku $\triangle ABC$ a dourčete osu o osové afinity s charakteristikou $k = -\frac{4}{3}$, ve které se bod B zobrazí do $B' = C$, a těžiště T trojúhelníku $\triangle ABC$ je samodružným bodem.

(b) Označme X průsečík osy o a přímky $\overline{AB}$. Určete dělicí poměr $(AB; X)$.



https://www.geogebra.org/m/mtwygr3j

(a) V prvním kroku lze z charakteristiky $(B'B; B_0) = -\frac{4}{3}$ dohledat bod B_0. Po sestrojení osy lze dohledat bod A' pomocí samodružného bodu X přímky AB a následně bod C' pomocí AC.

(b) Dělicí poměr $(AB; X)$ lze určit z Menelaovy věty pro $\triangle S_cBC$ a přímku o:

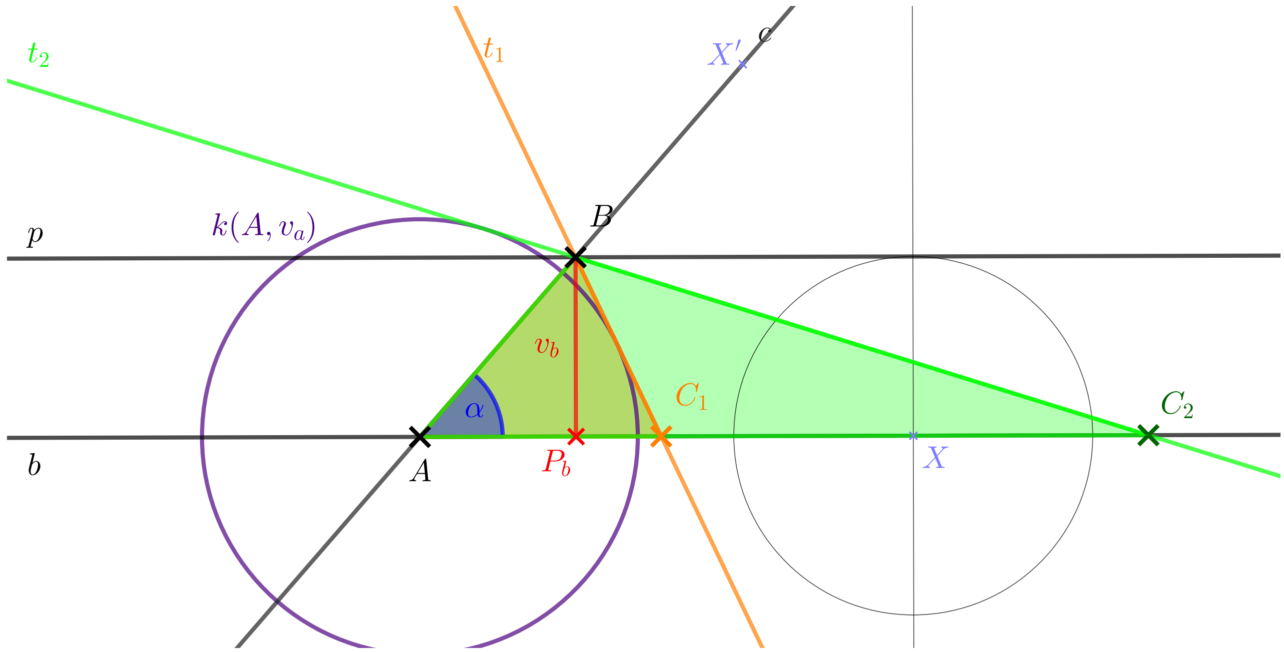
$$(BC; B_0)(CS_c; T)(S_cB; X) = 1$$
$$(-\tfrac{3}{4})(-2)(S_cB; X) = 1$$
$$(S_cB; X) = \tfrac{2}{3}$$

z toho pak jasně $(AB; X) = \frac{1}{3}$.

Řešení průběžného testu z Planimetrie - varianta B

Pozn. Řešení jsou bez dalších náčrtků (využijte applety) a podrobného popisu konstrukce. Uvádím vždy jen jedno z víc možných řešení. Najdete-li chyby napište mi, prosím.

1. Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$ jsou-li dány: délka výšky v_a, délka výšky v_b a velikost úhlu α. Proveďte náčrt a rozbor, postup konstrukce a konstrukci, diskuzi existence a počtu řešení.



Rozbor:
Jde o nepolohovou úlohu, je tedy jedno, jakým prvkem začneme. Vzhledem k tomu, že máme úhel α tak máme informaci o vrcholu A a stranách b a c. Výška v_a nám dáva vztah mezi A a stranou a. Výška v_b vztah mezi B a b. T.j. α a v_a se spojuje v použití vrcholu A (zřejmě kružnice), a dále α a v_b v použití strany b (zřejmě ekvidistanta). Bod C spojují z uvedených vztahů strany a a b. Je tedy vhodné začít úhlem α (vycházíme z něj do obou vztahů) abychom určili A a b (navíc i c). Bod B následně určíme na slíbené ekvidistantě ve vzdálenosti v_b od b. Stačí jedna vyhovující rovnoběžka — přímka p. Strana a je částí tečny t z bodu B ke kružnici $k(A, v_a)$. Tím dourčíme i vrchol C.
Diskuze (viz online applet `https://www.geogebra.org/m/vbrnutgg`):
Problém nastává při použití výšek, a to zda existuje tečna ke kružnici k z bodu B. Musíme dávat ještě pozor na doplňkový úhel k α.
Existence: Případy se zřejmě liší podle průniků rovnoběžky p a kružnice k.

Přímka p a kružnice k se neprotnou pro $v_b > v_a$. Pro libovolný úhel $\alpha \in (0°, 180°)$ pak dostaneme řešení, protože bod A odděluje obě možnosti pro bod C (z tečen).

Je-li $v_b = v_a$, tak je přímka p tečnou k. Jedna z tečen splyne s přímkou p. V tomto případě je navíc hraničním případem úhel $\alpha = 90°$, protože bod B by se stal bodem dotyku p a k. Řešení dostáváme jen pro $\alpha < 90°$, jinak by byl v trojúhelníku vnějším úhlem.

Nakonec pro $v_b < v_a$ se p a k protnou ve dvou bodech. Aby existovala tečna, bod B nesmí být vnitřním bodem k, t.j. $|AB| \geq v_a$. Potřebujeme však délku strany $|AB|$ určit pomocí v_b, α. Máme $|AB| = \frac{v_b}{\sin\alpha}$ (z pravoúhlého $\triangle ABP_B$). Podmínka existence je tedy $\frac{v_b}{\sin\alpha} \geq v_a$.

Počet řešení:
Úloha je nepolohová, počítáme tedy až na shodná řešení. První zamyšlení by mělo být nad úhlem a ekvidistantou. Zde je zřejmé, že druhá rovnoběžná přímka (v polorovině opačné jako úhel) nám žádné řešení nedává, protože α by byl vnější úhel. Dále musíme řešit vztah kružnice k, přímky p a úhlu α podobně jako výše.

Pro $v_b > v_a$ existuje vždy alespoň jedno řešení. Hraniční případ, kdy se α rovná svému vnějšímu úhlu je pro $\alpha = 90°$. V tomto případě jsou tedy 2 řešení. Pro $\alpha \neq 90°$ máme právě jedno řešení.

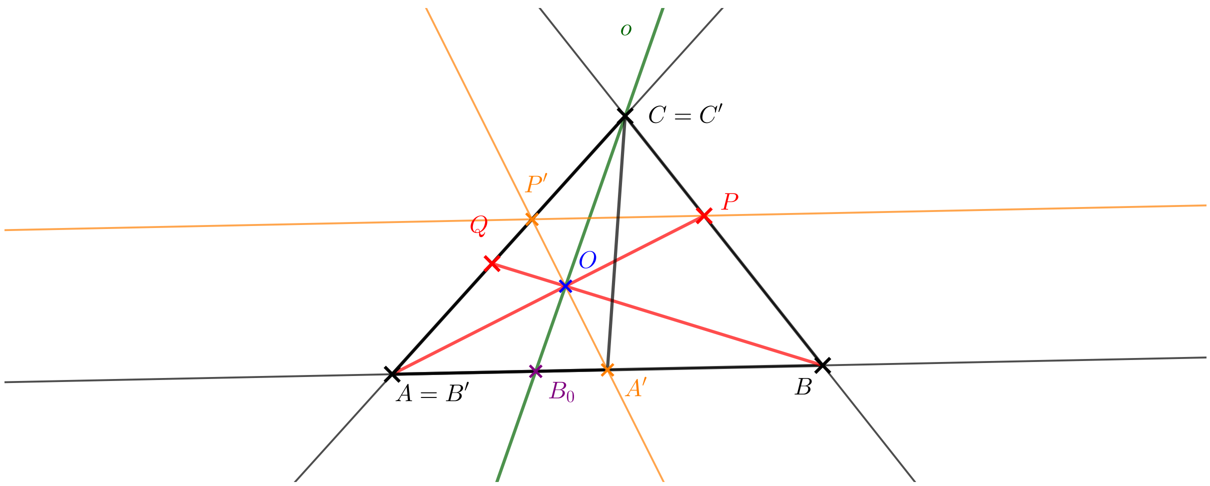
Pro $v_b = v_a$ splyne jedna z tečen s přímkou p. Za podmínky existence $\alpha < 90°$, máme jen jedno řešení.

Pro $v_b < v_a$ se p a k za podmínky existence $\frac{v_b}{\sin\alpha} \geq v_a$, máme vždy dvě tečny, které leží na stejné polopřímce s počátečním bodem A, proto jsou obě řešení správná (úhel α se nestane vnějším). Navíc, v případě, že tečny splynou $|AB| = \frac{v_b}{\sin\alpha} = v_a$, splynou i řešení a je tedy jenom jedno.

2. V rovině je dán trojúhelník $\triangle ABC$. Bod P dělí stranu BC v poměru 3:2 a je blíže k vrcholu C, bod Q dělí stranu AC v poměru 3:4 a je blíže k vrcholu A. Dále označme O průsečík přímek $\overline{AP}$ a $\overline{BQ}$

   (a) Sestrojte obraz trojúhelníku $\triangle ABC$ v osové afinitě s osou $\overline{CO}$, ve které se bod B zobrazí do bodu $B' = A$.

   (b) Určete charakteristiku dané osové afinity.



https://www.geogebra.org/m/amabxxux

(a) Zřejme $C = C'$, protože leží na ose. Obraz A' dohledáme například pomocí bodu P na BC a jeho obrazu P' na $B'C'$, směr afinity $\overrightarrow{BB'}$ známe.

(b) Na určení charakteristiky $(B'B; B_0)$ použijeme Cevovu větu pro $\triangle ABC$ a bod O:

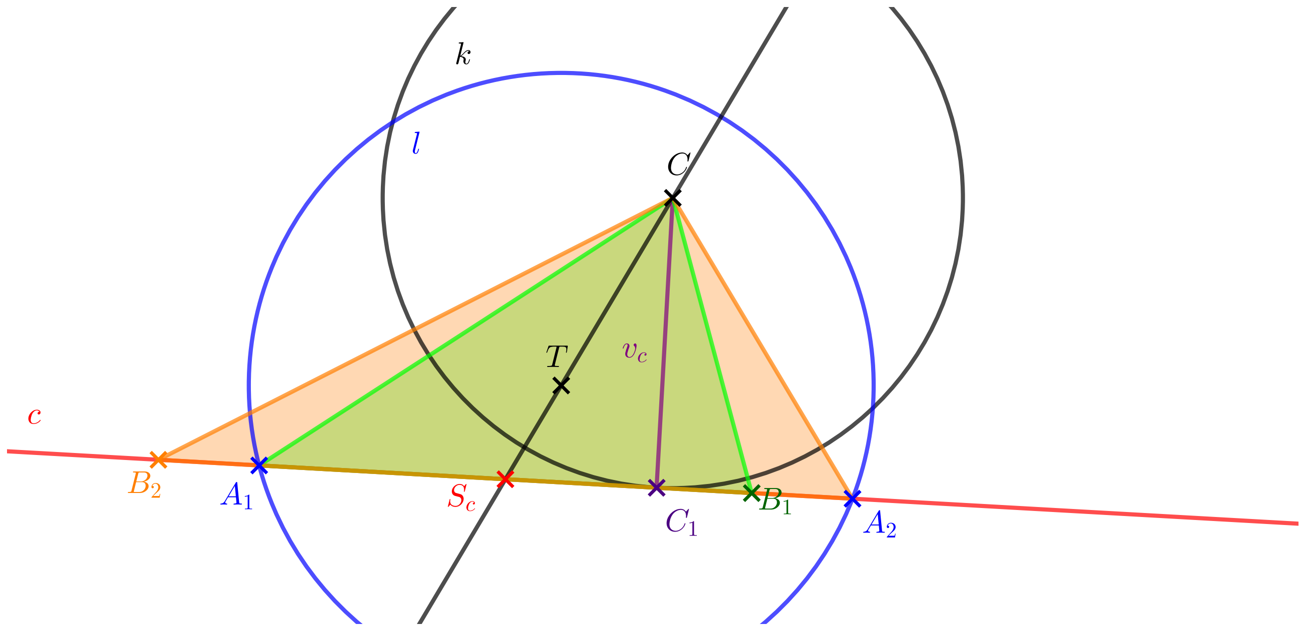
$$(B'B; B_0)(BC; P)(CA; Q) = -1$$
$$(B'B; B_0)(-\tfrac{3}{2})(-\tfrac{4}{3}) = -1$$
$$(B'B; B_0) = -\tfrac{1}{2}$$

Pozn.: Obraz A' šlo určit i zpětně pomocí charakteristiky, bude uprostřed strany AB.

Řešení průběžného testu z Planimetrie - varianta C

Pozn. Řešení jsou bez dalších náčrtků (využijte applety) a podrobného popisu konstrukce. Uvádím vždy jen jedno z víc možných řešení. Najdete-li chyby napište mi, prosím.

1. V rovině jsou dány dva různé body C a T svojí polohou. Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$ je-li dána délka výšky v_c a délka těžnice t_a tak, aby bod T byl těžištěm trojúhelníku. Proveďte náčrt a rozbor, postup konstrukce a konstrukci, diskuzi existence a počtu řešení.



Rozbor:
Úloha je polohová, tím, že máme C a T můžeme díky vlastnostem těžiště sestrojit i těžnici t_c a střed S_c. Budeme hledat jeden z bodů A, B, druhý bude souměrný dle S_c. Protože máme délku těžnice t_a, tak víc informací máme o vrcholu A, který bude na kružnici l se středem v těžišti o poloměru délky $\frac{2}{3}t_a$. Bod A musí navíc ležet na straně c. Na přímce, ve které se nachází strana c už máme bod S_c, využijeme výšku v_c, která je k ní kolmá, takže sestrojujeme tečny z bodu S_c ke kružnici $k(C, v_c)$. Vrchol A leží na průniku tečny a kružnice k. Vrchol B je středově souměrný s A přes S_c.
Diskuze (viz online applet `https://www.geogebra.org/m/g6yf5mt3`):
Z postupu konstrukce vychází dva problematické kroky, jednak, zda je možné sestrojit tečnu z S_c ke kružnici k (vztah $|TC|$ a v_c) a pak, zda se tečna protne s kružnicí l (přidá se vztah pro t_a).
Existence: Aby mohla vzniknout tečna c, tak S_c nesmí být vnitřním bodem kružnice k, z toho plyne podmínka $v_c \leq |S_cC| = \frac{3}{2}|TC|$.
Aby se navíc protla kružnice l a tečna c, tak musí mít l dostatečně velký poloměr. Využijeme pomocný pravoúhlý trojúhelník S_cQT, kde Q je pata kolmice k c vedené bodem T. Ze stejnolehlosti trojúhelníku je zřejmě $|TQ| = \frac{1}{3}v_c$. Musí tedy platit pro $\frac{2}{3}t_a$ (poloměr l), že $\frac{2}{3}t_a \geq \frac{1}{3}v_c$. V případě, že $\frac{2}{3}t_a = \frac{1}{3}v_c$, tak je bod A dotykovým bodem $A = Q$. Problém však nastane, když body splynou současně s bodem S_c, t.j. $\frac{2}{3}t_a = \frac{1}{3}v_c$ a současně $v_c = |S_cC| = \frac{3}{2}|TC|$, protože pak $A = B$ a řešení neexistuje.
Počet řešení: Úloha je polohová, počítáme tedy všechny možnosti, i shodné. Zaprvé, záleží na počtu tečen — každá z tečen pak nese stejný počet shodných řešení.

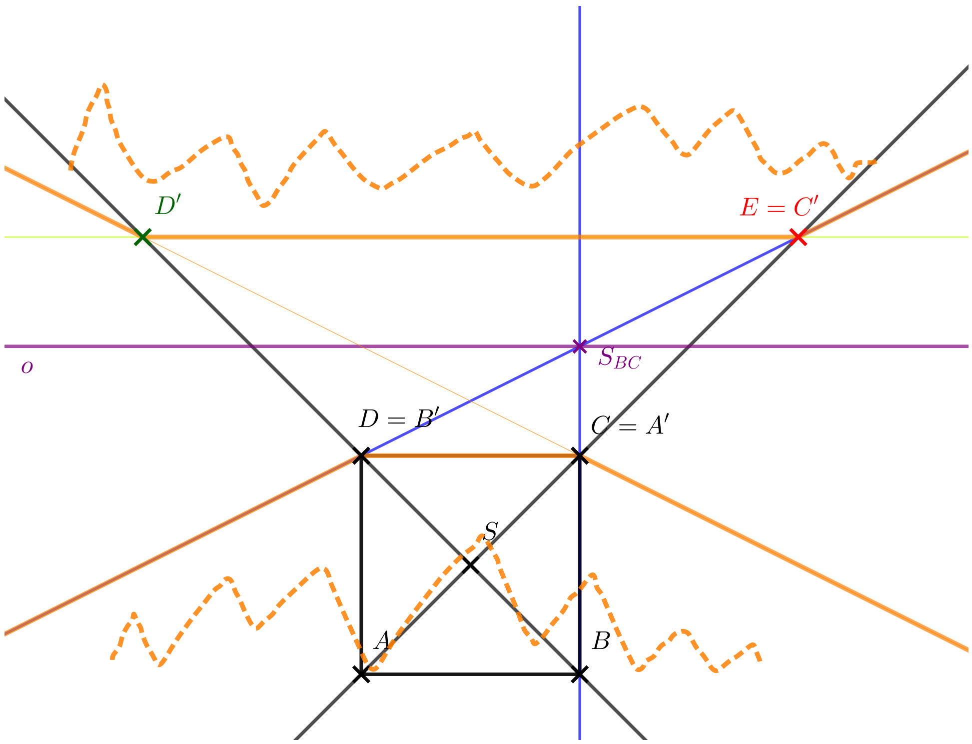
V případě kdy $v_c = |S_cC| = \frac{3}{2}|TC|$, je tečna jenom jedna a pata výšky v_c splyne se středem S_c. Za splnění podmínky existence dostáváme právě jedno řešení (rovnoramenný trojúhelník).

V případě $v_c < |S_cC| = \frac{3}{2}|TC|$, jsou tečny dvě. Na jedné tečně (c) dostáváme (za podmínky existence) jedno, nebo dvě řešení, dle počtu průsečíků s kružnicí l. Když se l dotkne C, t.j. $\frac{2}{3}t_a = \frac{1}{3}v_c$, máme pro tuto tečnu 1 řešení, celkově pak 2 řešení. Pro $\frac{2}{3}t_a > \frac{1}{3}v_c$ dostáváme (až na jedinou výjimku) vždy dva průsečíky A, t.j celkově 4 řešení. Jediný problém nastane, když $A = S_c$, t.j. za podmínky $\frac{2}{3}t_a = |TS_C| = \frac{1}{2}|CT|$, pak je jenom 1 řešení pro tečnu c, celkově tedy 2 řešení.

2. V rovině je dán čtverec $ABCD$. Průsečík úhlopříček $AC \cap BD$ označme S.

(a) Určete bod E na přímce AC takový, že dvojpoměr $(AC; SE) = -\frac{1}{2}$.

(b) Ve středové kolineaci se středem S, se bod A zobrazí do bodu $A' = C$, bod B do $B' = D$ a bod C do $C' = E$. Dourčete osu kolineace a sestrojte obraz $A'B'C'D'$ čtverce $ABCD$ včetně vyznačení (vybarvěte/vyšrafujte) obrazu množiny jeho vnitřních bodů.



`https://www.geogebra.org/m/d8b5ntgx`

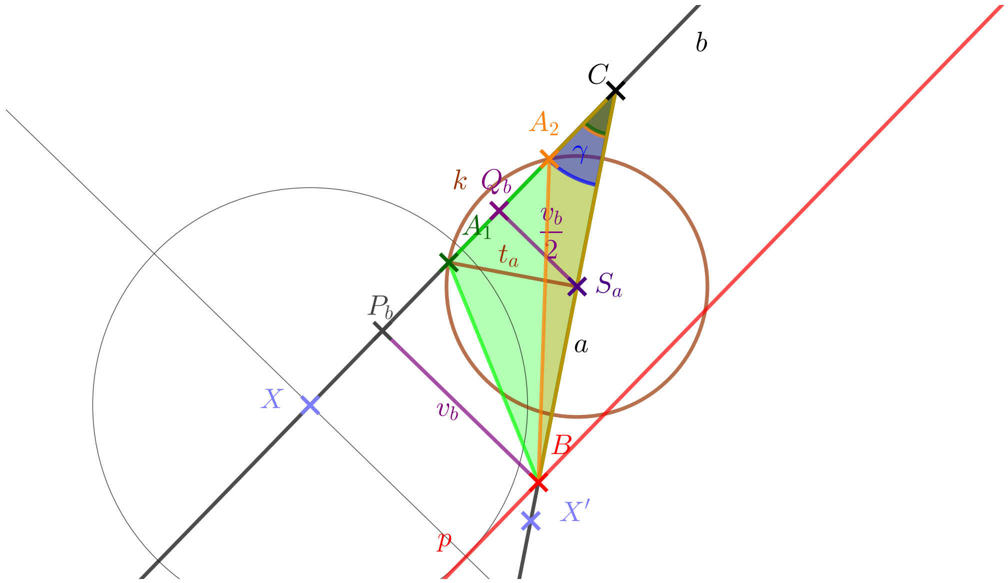
(a) Bod S je středem AC, proto $(AC; S) = -1$ a pro bod E musí platit $(AC; E) = 2$.

(b) Stačí si povšimnout, že $AB \parallel A'B'$ a tedy i osa o kolineace bude rovnoběžná s AB (AB nemá samodružný bod). Protože $CD \parallel AB \parallel o$, tak ani CD nemá samodružný bod a bude platit $C'D' \parallel CD$. Na dourčení osy nám tedy stačí určit samodružný bod S_{BC}. Množina vnitřních bodů se rozpadne, viz obrázek. Lze si rychle povšimnout podle polohy bodu $S = S'$.

Řešení průběžného testu z Planimetrie - varianta D

Pozn. Řešení jsou bez dalších náčrtků (využijte applety) a podrobného popisu konstrukce. Uvádím vždy jen jedno z víc možných řešení. Najdete-li chyby napište mi, prosím.

1. Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$ jsou-li dány: délka výšky v_b, délka těžnice t_a a velikost úhlu γ. Proveďte náčrt a rozbor, postup konstrukce a konstrukci, diskuzi existence a počtu řešení.



Rozbor:
Úloha je nepolohová, můžeme si vybrat, kterým prvkem začneme. Úhel γ nese informaci pro vrchol C, a přímky, ve kterých leží strany a a b. Délka těžnice t_a pro vrchol A a střed S_a protější strany a. Výška v_b spojuje vrchol B a protější stranu b. Jak těžnice, tak výška mají na první pohled vztah s úhlem γ. Začneme-li tedy sestrojením úhlu γ, tak můžeme využít, že $v_b = |B, b|$ a tedy najdeme vrchol B na ekvidistantě. Navíc, stačí jenom přímka p v polorovině, ve které leží úhel γ, pro druhou rovnoběžku, by byl úhel vnějším. Máme-li vrcholy B, C můžeme zkonstrouvat střed S_a a na kružnici $k(S_a, t_a)$ najít poslední vrchol A.
Diskuze (viz online applet `https://www.geogebra.org/m/ycf64wfu`):
Po sestrojení úhlu a výběru rovnoběžky nastává problém při průniku kružnice $k(S_a, t_a)$ a přímky b (resp. leží v ní strana b).
Existence: Průnik přímky b a kružnice k rozdělíme do tří případů, zásadní roli hraje trojůhelník CS_aQ_b, kde Q_b je pata kolmice k b procházející S_a (jinak řečeno polovina výšky, což lze nahlédnout např. ze stejnolehlosti trojúhelníků $\triangle CBP_b$ a $\triangle CS_aQ_b$).

p a k se neprotnou pro $t_a < \frac{v_b}{2}$. V tomto případě neexistuje žádný bod A.

p se dotkne k pro $t_a = \frac{v_b}{2}$. V tomto případě je bod A bodem dotyku a musíme ošetřit, aby ležel na správné polopřímce vzhledem k úhlu γ. Hraniční případ je pro $\gamma = 90°$, bod A by splynul s vrcholem C a trojúhelník nevznikne. Pro $\gamma > 90°$ je poloha bodu A taková, že γ se stává vnějším úhlem $\triangle ABC$. Vyhovuje jedině možnost pro $\gamma < 90°$.

p a k se protnou ve dvou bodech pro $t_a > \frac{v_b}{2}$. Dostáváme dvě možnosti bodu A. Je-li úhel $\gamma < 90°$, pak alespoň jedna z možností vždy leží na ramenu úhlu. Pro úhel $\gamma = 90°$ je znovu všechno v pořádku, problém nastane u tupého úhlu, v případě, že oba průsečíky padnou na opačnou polopřímku k ramenu, ve kterém leží strana b. Z pravoúhlého trojúhelníku CQ_bS_a je vidět, že hraničním případem je, když $t_a = |CS_a|$, protože kružnice k musí obsáhnout bod C. Vyjádříme-li délku $|CS_a| = \frac{v_b}{2\sin\gamma}$ ze vstupních údajů, máme celkovou podmínku, že pro $\gamma \in (90°, 180°)$ musí současně platit $\frac{v_b}{2} < t_a < \frac{v_b}{2\sin\gamma}$.

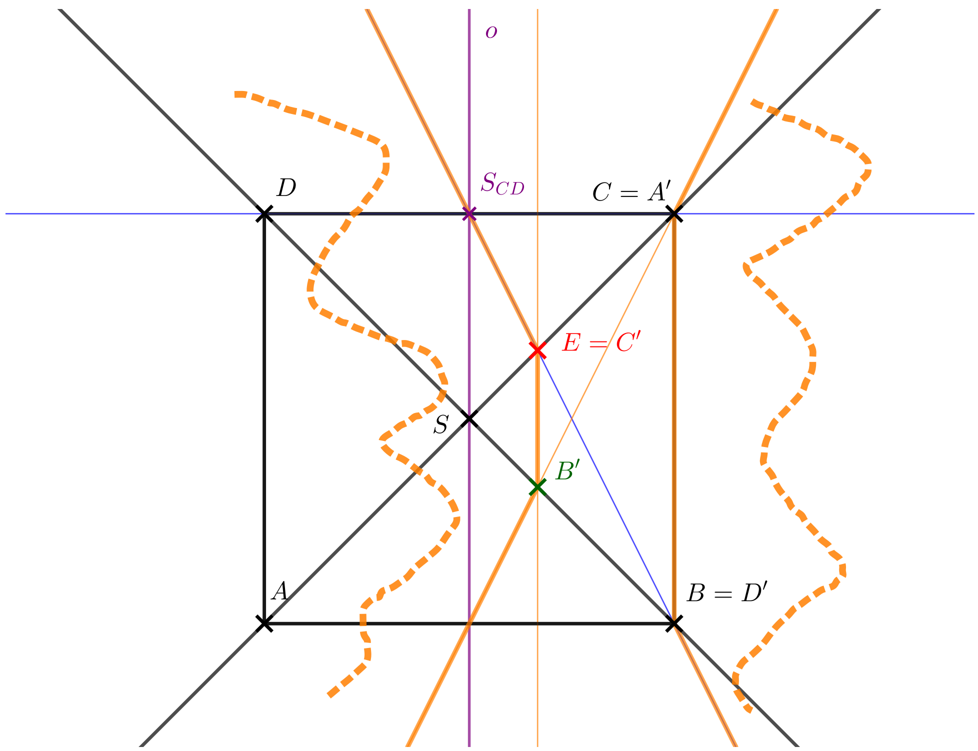
Počet řešení: Jde o nepolohovou úlohu, shodná řešení nerozlišujeme. Diskuzi pro $t_a = \frac{v_b}{2}$ jsme určili výše, je vždy jediné řešení pro $\gamma < 90°$.
Pro $t_a > \frac{v_b}{2}$ dostáváme 1 řešení pro $\gamma = 90°$, protože vnější i vnitřní úhel jsou shodné a trojúhelníky taky. Z diskuze existence je zřejmé, že pro tupý úhel γ máme nanejvýš 1 řešení. Zůstává nám případ, kdy obě možnosti bodu A vyhovují

zadání. To nastane za předpokladu $\gamma < 90°$, když současně platí, že $t_a < |CS_a|$, protože kružnice k nesmí obsáhnout bod C. Celková podmínka pro 2 řešení je tedy $\gamma < 90°$ a současně $\frac{v_b}{2} < t_a < \frac{v_b}{2\sin\gamma}$.

2. V rovině je dán čtverec $ABCD$. Průsečík úhlopříček $AC \cap BD$ označme S.

   (a) Určete bod E na přímce ACtakový, že dvojpoměr $(AC; SE) = \frac{1}{2}$.

   (b) Ve středové kolineaci se středem S, se bod A zobrazí do bodu $A' = C$, bod D do $D' = B$ a bod C do $C' = E$. Dourčete osu kolineace sestrojte a obraz $A'B'C'D'$ čtverce $ABCD$ včetně vyznačení (vybarvěte/vyšrafujte) obrazu množiny jeho vnitřních bodů.



https://www.geogebra.org/m/kfrbwey5

(a) Bod S je středem AC, proto $(AC; S) = -1$ a pro bod E musí platit $(AC; E) = -2$.

(b) Stačí si povšimnout, že $AD \parallel A'D'$ a tedy i osa o kolineace bude rovnoběžná s AD (AD nemá samodružný bod). Protože $BC \parallel AD \parallel o$, tak ani BC nemá samodružný bod a bude platit $B'C' \parallel BC$. Na dourčení osy nám tedy stačí určit samodružný bod S_{CD}. Množina vnitřních bodů se rozpadne, viz obrázek. Lze si rychle povšimnout podle polohy bodu $S = S'$.
Bonus: nastane zde situace, kdy střed S kolineace leží na o (můžete si dokázat). Striktně vzato nebude to tedy středová kolineace podle naší definice ($S \notin o$), konstrukci obrazu to však neovlivní.