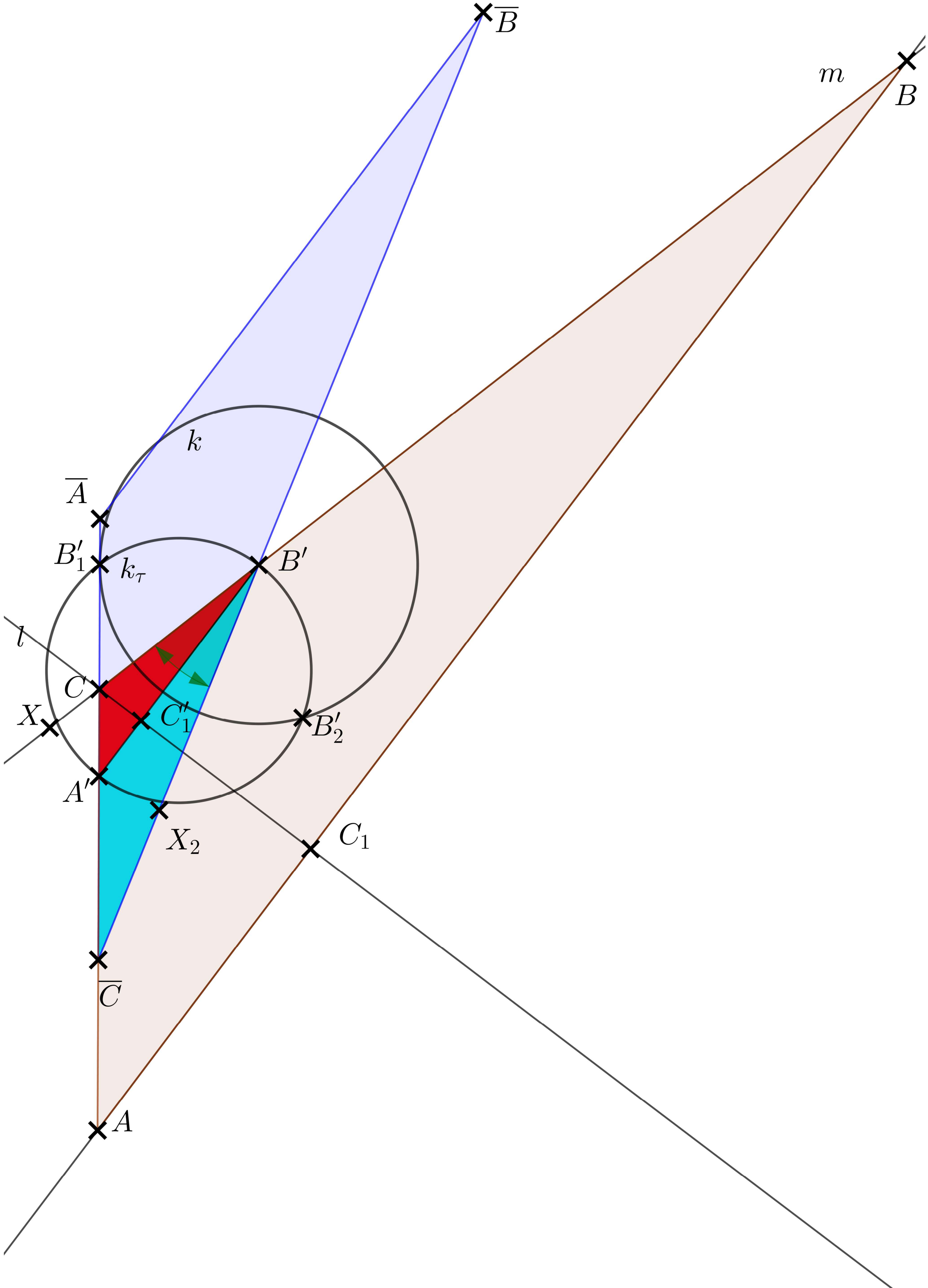
Průběžný test z Planimetrie 2021/22 - varianta A - řešení

1. Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, ve kterém platí poměry délek $c : v_b = 5 : 3$, velikost úhlu $\beta = 15°$ a délka výšky $v_c = 5$.
Rozbor (bez náčrtu): Vycházíme např. z toho, že známe poměr $c : v_b = 5 : 3$. Sestrojíme trojúhelník $\triangle A'B'C'$ o rozměrech $c' = 5, v_b' = 3$ podobný hledanému trojúhelníku. $\triangle A'B'C'$ sestrojíme pomocí pravoúhlého trojúhelníku $\triangle A'B'B_1'$ s patou B_1' výšky v_b'. Nanesením úhlu velikosti β s ramenem $\overrightarrow{A'B'}$ a vrcholem B' dostáváme bod C' ležící na druhém rameni (jsou 2 možnosti v obou polorovinách dle $\overleftrightarrow{A'B'}$). Následně „zvětšíme" trojúhelník $\triangle A'B'C'$ na trojúhelník $\triangle ABC$ např. pomocí stejnolehlosti se středem C tak, aby výška $v_c' \to v_c = 5$.
Postup konstrukce:

1) $\overline{A'B'}; |A'B'| = c' = 5$
2) $k_\tau; k_\tau(A'B')$ je Thalétova kružnice nad $\overline{A'B'}$
3) $k; k(B', v_b' = 3)$
4) $B_1'; B_1' \in k_\tau \cap k$ *2 možnosti
5) $\overrightarrow{B'X}; |\sphericalangle A'B'X = \beta| = 15°$ *2 možnosti
6) $C; C \in \overleftrightarrow{A'B_1'} \cap \overrightarrow{B'X}$
7) $l; l \perp \overleftrightarrow{A'B'} \wedge C \in l$
8) $C_1'; C_1' \in l \cap \overleftrightarrow{A'B'}$
9) $C_1; C_1 \in \overrightarrow{CC_1'} \wedge |CC_1| = v_c = 5$
10) $m; m \perp l \wedge C_1 \in m$
11) $A; A \in m \cap \overline{CA'}$
12) $B; B \in m \cap \overline{CB'}$
13) $\triangle ABC$

Diskuze: Existence řešení: Všechny kroky konstrukce lze provést a průsečíky vždy existují. Kritický je bod 6), kde by se mohlo stát, že $\overrightarrow{A'B_1'}$ a $\overrightarrow{B'X}$ se neprotnou a bod C by neexistoval a bod 4), kdyby se kružnice k_τ a k neprotly, to se však s danými hodnotami nestane. Trojúhelník se zadanými parametry jsme sestrojili, tudíž existuje.
Počet řešení: Všechny kroky 7)–13) lze sestrojit jednoznačně, takže zde se počet řešení nemění. V bodě 6) sestrojujeme vrchol C pro 2 možnosti nanesení úhlu v 5) a 2 možnosti konstrukce B_1' v 4). Volba bodu B_1' však vede k souměrnému řešení (dle osy $\overleftrightarrow{A'B'}$). Dostáváme tedy 2 neshodná řešení (pro úhel v obou polorovinách dle $\overleftrightarrow{A'B'}$). Konstrukce 1)–3) jsou jednoznačné. Úloha je nepolohová, celkově má 2 řešení.



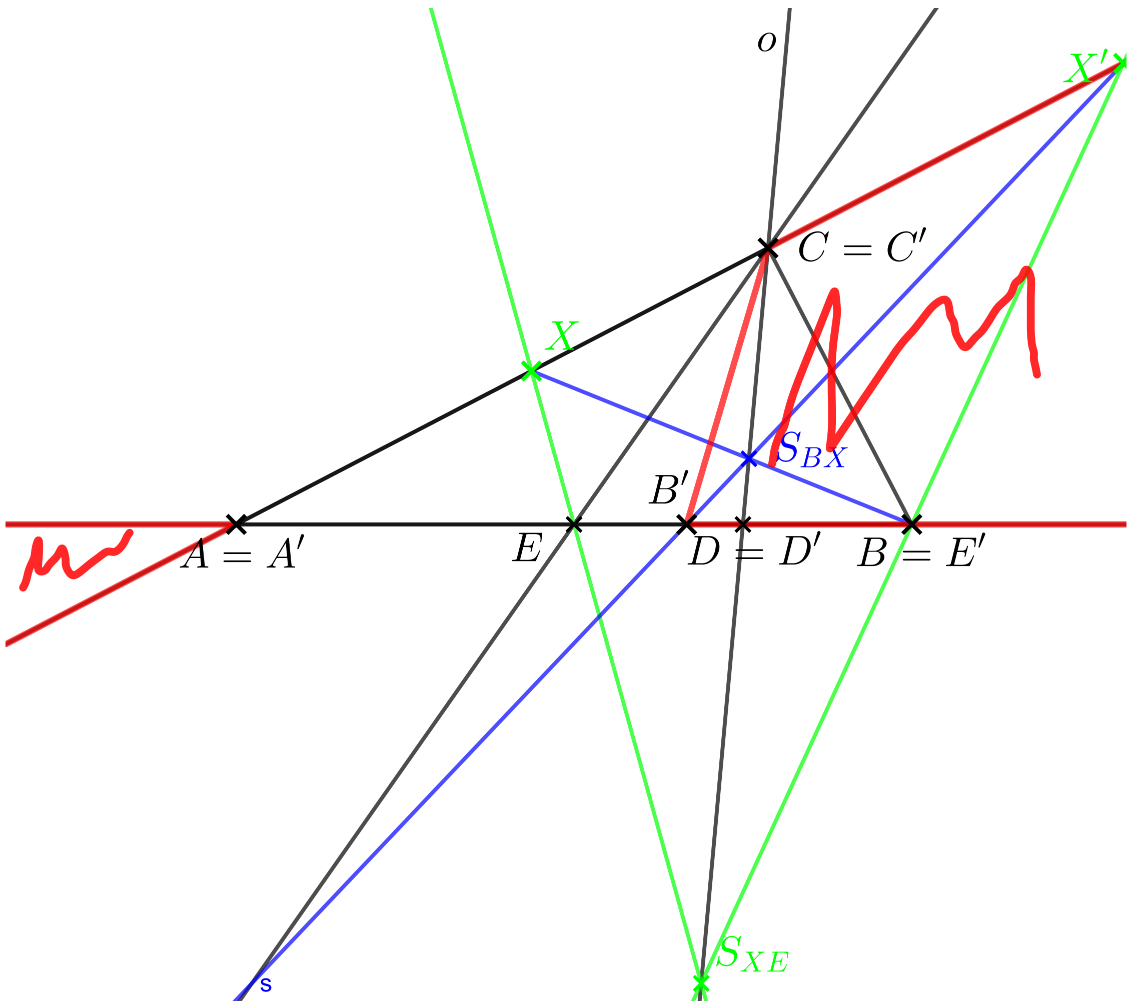
$\overline{B}$
m
B
k
$\overline{A}$
B'_1
k_τ
B'
l
C
X
C'_1
B'_2
A'
X_2
C_1
$\overline{C}$
A

2. V rovině je dán pravoúhlý trojúhelník $\triangle ABC$. Nechť bod D rozděluje úsečku AB v jedné čtvrtině od bodu B.

   (a) Sestojte bod E na přímce AB tak, aby dvojpoměr $(AB; ED) = \frac{1}{3}$

   (b) V středové kolineaci s osou CD a samodružným bodem $A = A'$ se bod E zobrazí do bodu $E' = B$. Určete obraz trojúhelníku $\triangle ABC$ a vyznačte (vybarvěte/vyšrafujte) obraz množiny jeho vnitřních bodů.

Konstrukci proveďte do zadání.

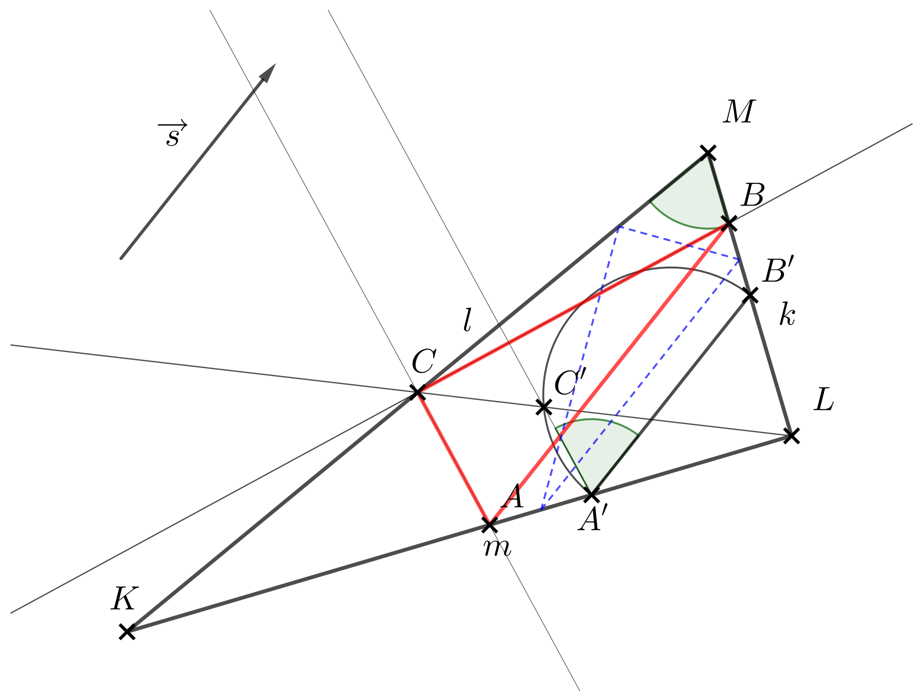


a) Pro D platí $(AB; D) = -3$. Bod E najdeme jako $(AB; ED) = \frac{(AB; E)}{(AB; D)} = \frac{(AB; E)}{-3} = \frac{1}{3}$. Tedy $(AB; E) = -1$ a E je střed $\overline{AB}$.

b) Stačí si uvědomit, že bod A je střed kolineace (je to samodružný bod, který neleží na ose). Obrazy vrcholů A, B, C jsou A', B', C'. Bod B' jsme sestrojili s pomocí bodu X na AC. Strana $\overline{BC}$ se zobrazí na úsečku $\overline{B'C'}$. To, že obraz úsečky $\overline{AB}$ jsou dvě polopřímky $(\overleftrightarrow{AB} \setminus \overline{AB} \cup \{A, B\})$ lze vidět z toho, že vnitřní bod $D \in \overline{AB}$ je samodružný a zobrazí se na vnější bod $D' \notin \overline{A'B'}$. Z toho rovnou plyne (např. úsečka $\overline{C'D'}$), že i obraz $\overline{AC}$ se rozpadne na dvě polopřímky.

Průběžný test z Planimetrie 2021/22 - varianta B - řešení

1. V rovině je dán pravoúhlý trojúhelník $\triangle KLM$ (dle obrázku). Do trojúhelníku $\triangle KLM$ vepište pravoúhlý trojúhelník podobný trojúhelníku $\triangle KLM$ tak, aby jeho přepona AB měla daný směr $\overrightarrow{s}$ a vrchol C u pravého úhlu ležel na straně KM.
   Konstrukci proveďte do zadání.

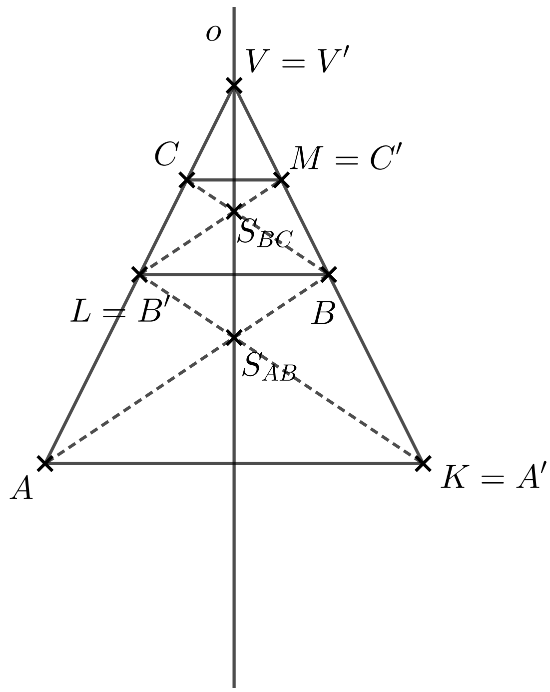


Rozbor (bez náčrtu): O pravoúhlém $\triangle ABC$ víme jak bude v rovině „natočený“, i to, jaké budou poměry jeho stran. Můžeme k němu sestrojit podobný trojúhelník $\triangle A'B'C'$, jehož strany mají stejné směry jako $\triangle ABC$ (to navádí na použití stejnolehlosti, protože zachovává směry). Položíme-li A', B' na strany $\overline{KL}$ a $\overline{LM}$ (lze dvěma způsoby $A \in \overline{KL}$ nebo $A \in \overline{LM}$), tak můžeme sestrojit $\triangle A'B'C'$. Ve stejnolehlosti se středem L sestrojíme trojúhelník $\triangle ABC$ jako obraz $\triangle A'B'C'$ tak, aby C ležel na $\overline{KM}$.
Postup konstrukce (stručněji než ve variantě A):

1) $\overleftrightarrow{A'B'}; \overleftrightarrow{A'B'} \| \overrightarrow{s} \wedge A' \in \overline{KL} \wedge B' \in \overline{LM}$ *druhá možnost při záměně $A' \leftrightarrow B'$
2) $C'; \triangle A'B'C' \sim \triangle MKL$ (nebo $\sim \triangle KML$, to je ale vyřešeno už v předchozím kroku) a současně C' leží v polorovině opačné jako L vzhledem k $\overleftrightarrow{A'B'}$
3) $\triangle ABC$ jako obraz trojúhelníku $\triangle A'B'C$ v stejnolehlosti se středem L, přičemž $C \in \overline{KM}$ (neboli $C \in \overleftrightarrow{C'L} \cap \overline{KM}$)

Diskuze: Existence řešení je zřejmá z konstrukce v obrázku. Počet řešení: Úloha je polohová, počítáme všechny možnosti vzhledem k zadání. Stejnolehlost v posledním kroku vytvoří trojúhelník jednoznačně. V bodech 1) nebo 2) konstrukce lze sestrojit $\triangle A'B'C'$ dvěma způsoby, celkově jsou tedy 2 řešení. Pozn. při uvažování C' v opačné polorovině dle $\overleftrightarrow{A'B'}$ by alespoň jeden z vrcholů A, B, C neležel na odpovídající straně trojúhelníku $\triangle KLM$ ale na jejím prodloužení, tyto možnosti neuvažujeme (nebyl by vepsaný).

2. V rovině je dán rovnoramenný trojúhelník AKV se základnou AK. Označme L střed ramene AV a B střed ramene KV.
   (a) Na přímce AV určete bod C tak, aby dělicí poměr $(AC; L) = -2$ a na přímce KV určete bod M tak, aby dělicí poměr $(KB; M) = 3$.
   (b) Určete geometrické zobrazení, které zobrazí $A \to K$; $\quad B \to L$; $\quad C \to M$, sestrojte množinu jeho samodružných bodů a určete obraz bodu V.



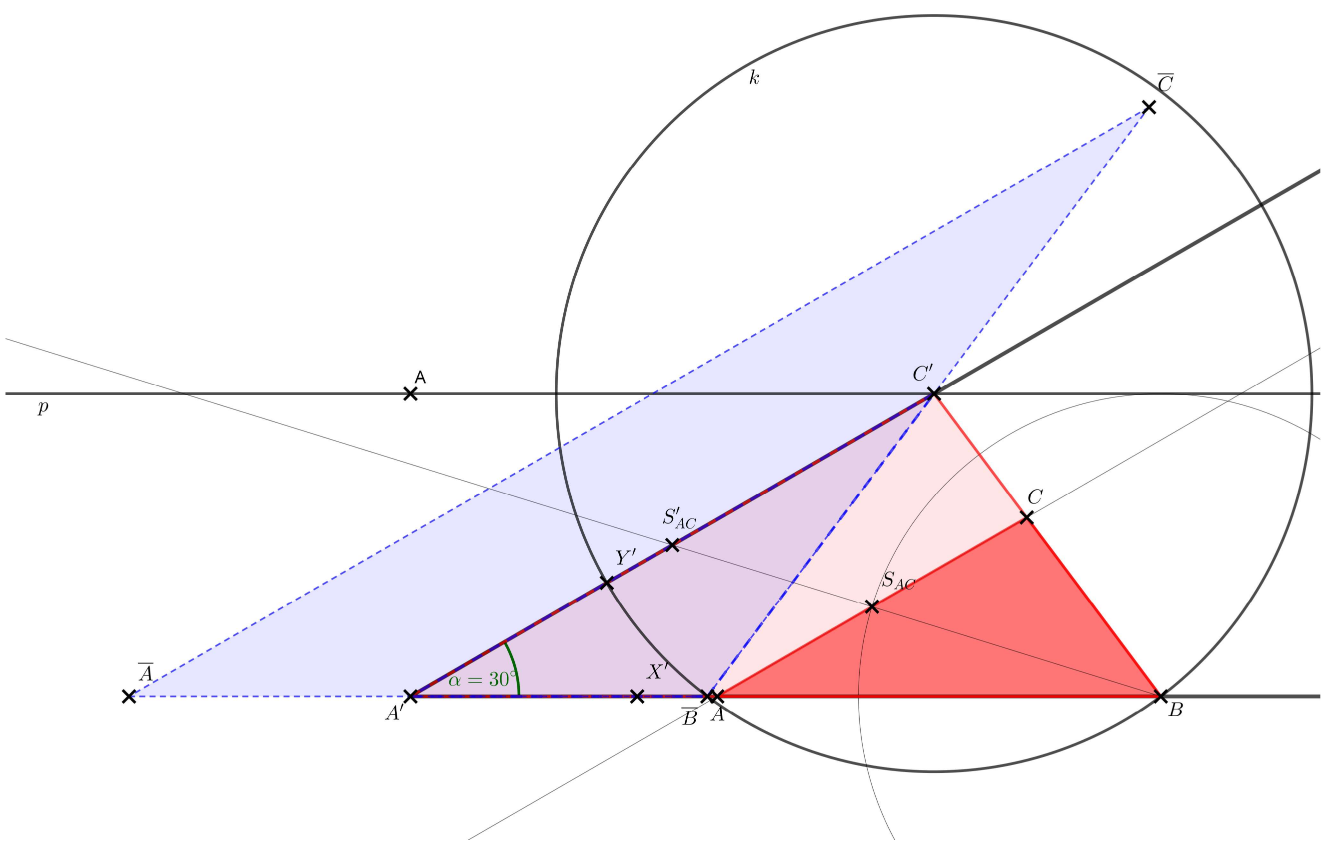
a) $(AC; L) = -2$, t.j. L je dva dílky od A a jeden dílek od C s opačnou orientací. $(KB; M) = 3$, t.j. M je tři dílky od K a jeden dílek od B v stejné orientaci. Oba body dělí ramena 1:3 blíže k vrcholu V.
b) Z předešlého je zřejmé, že $\overleftrightarrow{AK} \| \overleftrightarrow{BL} \| \overleftrightarrow{CM}$ jsou rovnoběžné a např. dle Desarguesovy věty platí, že průsečíky odpovídajících si přímek $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}, \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'}, \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'}$ leží v jedné přímce o, která je tedy osou osové afinity se směrem $\overrightarrow{AK}$. Protože $V = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'}$, tak je samodružný. Pozn.: Taky si lze jednoduše všimnout, že jde o osovou souměrnost (os. afinita s koeficientem -1 a směrem kolmým k ose).

Průběžný test z Planimetrie 2021/22 - varianta C - řešení

1. Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, ve kterém platí poměry délek $a : v_c = 5 : 4$, velikost úhlu $\alpha = 30°$ a délka těžnice $t_b = 4$.
Rozbor (bez náčrtu): Začneme-li umístěním úhlu o velikosti α, můžeme ze zadaného poměru $a : v_c = 5 : 4$ sestrojit trojúhelník $\triangle A'B'C'$ podobný hledanému $\triangle ABC$. Bod C' sestrojíme za pomocí ekvidistanty k ramenu úhlu ve vzdálenosti $v'_c = 4$. Následně dohledáme bod B' ve vzdálenosti $a' = 5$ od C' na rameni sestrojeného úhlu (průnik polopřímky a kružnice, může mít až dvě řešení). Následně sestrojíme t'_b a trojúhelník $\triangle ABC$ sestrojíme v podobnosti (nebo nějaké konkrétní stejnolehlosti pro jednoduchou konstrukci), kde $t'_b \to t_b$, čímž je určen koeficient.
Postup konstrukce:

1) $\sphericalangle X'A'Y'; |\sphericalangle X'A'Y'| = \alpha$
2) $p; |p, \overleftrightarrow{X'A'}| = v'_c = 4$ (ekvidistana - dvě rovnoběžky)
3) $C'; C' \in p \cap \overleftrightarrow{A'Y'}$
4) $k; k(C', a' = 5)$
5) $B; B \in k \cap \overleftrightarrow{A'X'}$ (max. dva průsečíky)
6) těžnice t'_b v trojúhelníku $\triangle A'BC'$
7) $\triangle ABC$ jako obraz $\triangle A'BC'$ ve stejnolehlosti se středem B a $t'_b \to t_b$

Diskuze: Existence je zřejmá s provedené konstrukce se zadanými hodnotami. Všechny body konstrukce lze pro dané hodnoty provést. Úloha je nepolohová, použítá stejnolehlost vytvoří trojúhelník $\triangle ABC$ z trojúhelníku $\triangle A'BC'$ jednoznačně. Je potřebné ošetřit jen počet řešení pro konstrukci trojúhelníku $\triangle A'BC'$. Ze zadaných hodnot jsou v bodě konstrukce 5) právě dvě možnosti pro bod B (úhel při vrcholu B je buď ostrý nebo tupý). Druhou rovnoběžku sestrojenou v bodě 2) můžeme vyloučit, protože bychom dostali ve vrcholu A vnitřní úhel $\pi - \alpha$, což neodpovídá zadání. Úloha má dvě řešení.

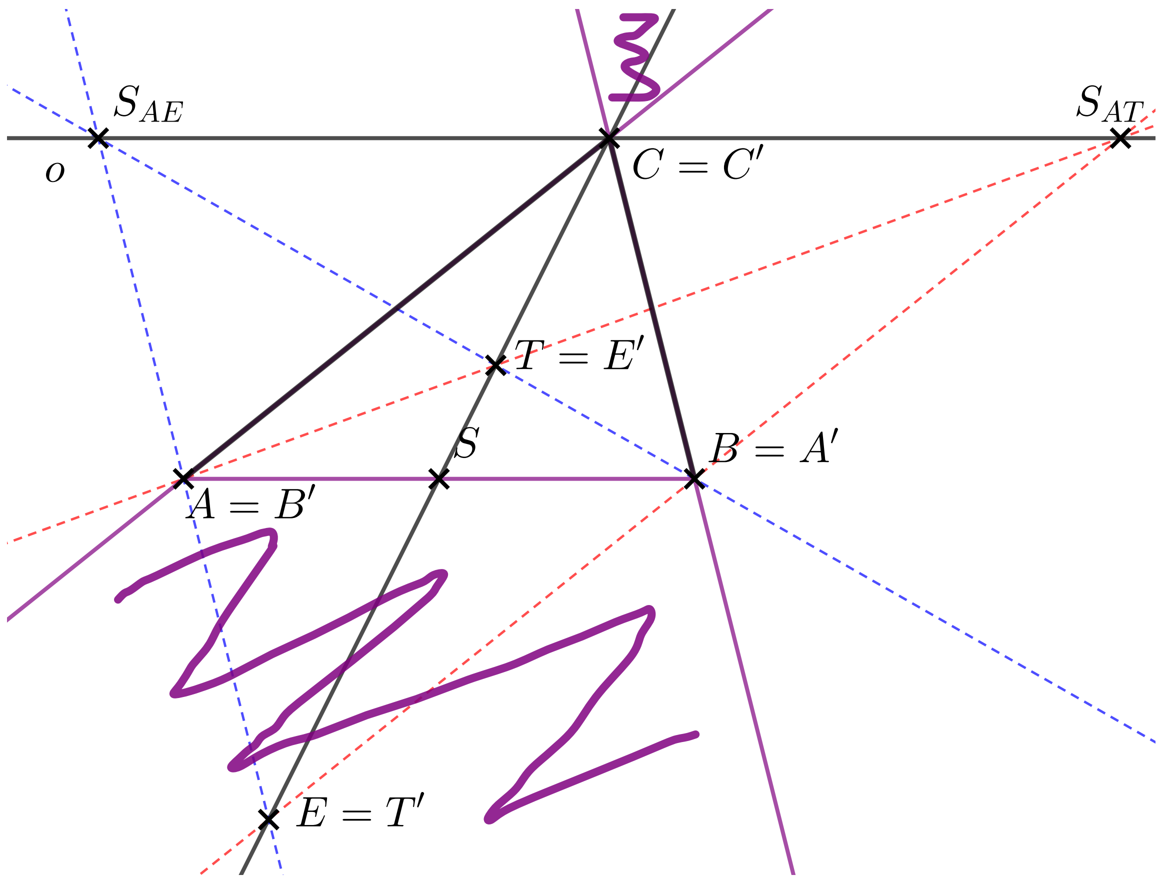


2. V rovině je dán trojúhelník $\triangle ABC$. Nechť T je jeho těžiště a bod S je průsečík $CT \cap AB$.

   (a) Sestojte bod E na přímce CT tak, aby body T, E, S, C tvořily v daném pořadí harmonickou čtveřici.

   (b) V středové kolineaci se středem S se zobrazí A do $A' = B$ a T do $T' = E$. Určete obraz trojúhelníku $\triangle ABC$ a vyznačte (vybarvěte/vyšrafujte) obraz množiny jeho vnitřních bodů.

Konstrukci proveďte do zadání.



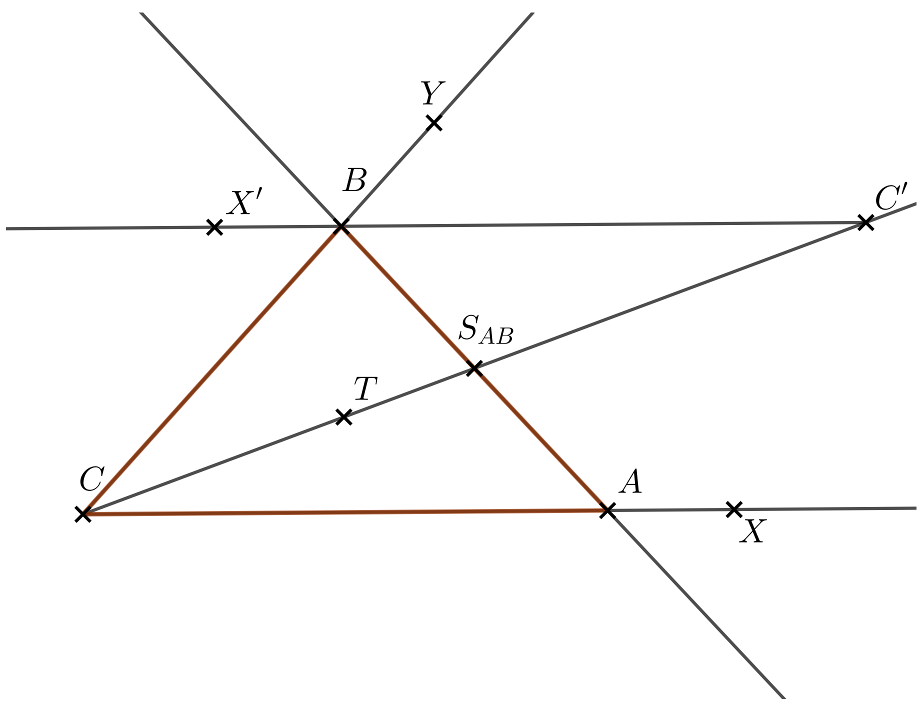
a) Z vlastností T a S je zřejmé, že $(SC;T) = -\frac{1}{2}$. Navíc platí, že $(TE;SC) = -1 = (SC;TE)$, takže $\frac{(SC;T)}{(SC;E)} = \frac{-1/2}{(SC;E)} = -1$ a tedy $(SC;E) = \frac{1}{2}$ a bod S je středem $\overline{CE}$.

b) Protože středová kolineace je v tomto případě involucí (body $CTSE$ tvoří harmonickou čtveřici), lze hned určit obrazy $B' = A$ a $E' = T$. Pomocí samodružných bodů $S_{AE} = \overleftrightarrow{AE} \cap \overleftrightarrow{A'E'}; S_{AT} = \overleftrightarrow{AT} \cap \overleftrightarrow{A'T'}$ dohledáme osu. Např. proto, že S je středem $\overline{EC}$ je $\overleftrightarrow{EB} \| \overleftrightarrow{AC}$ a $\overleftrightarrow{EA} \| \overleftrightarrow{BC}$ a navíc T dělí $\overline{EC}$ v poměru $2:1$, je trojúhelník $\triangle ABC$ příčkovým trojúhelníkem pro $\triangle S_{AE}ES_{AT}$ a bod C se zobrazí na sebe. Podle obrazu T' vnitřního bodu T v $\triangle ABC$ určíme obraz množiny všech vnitřních bodů. Trojúhelník se rozpadne na dvě části,

Průběžný test z Planimetrie 2021/22 - varianta D - řešení

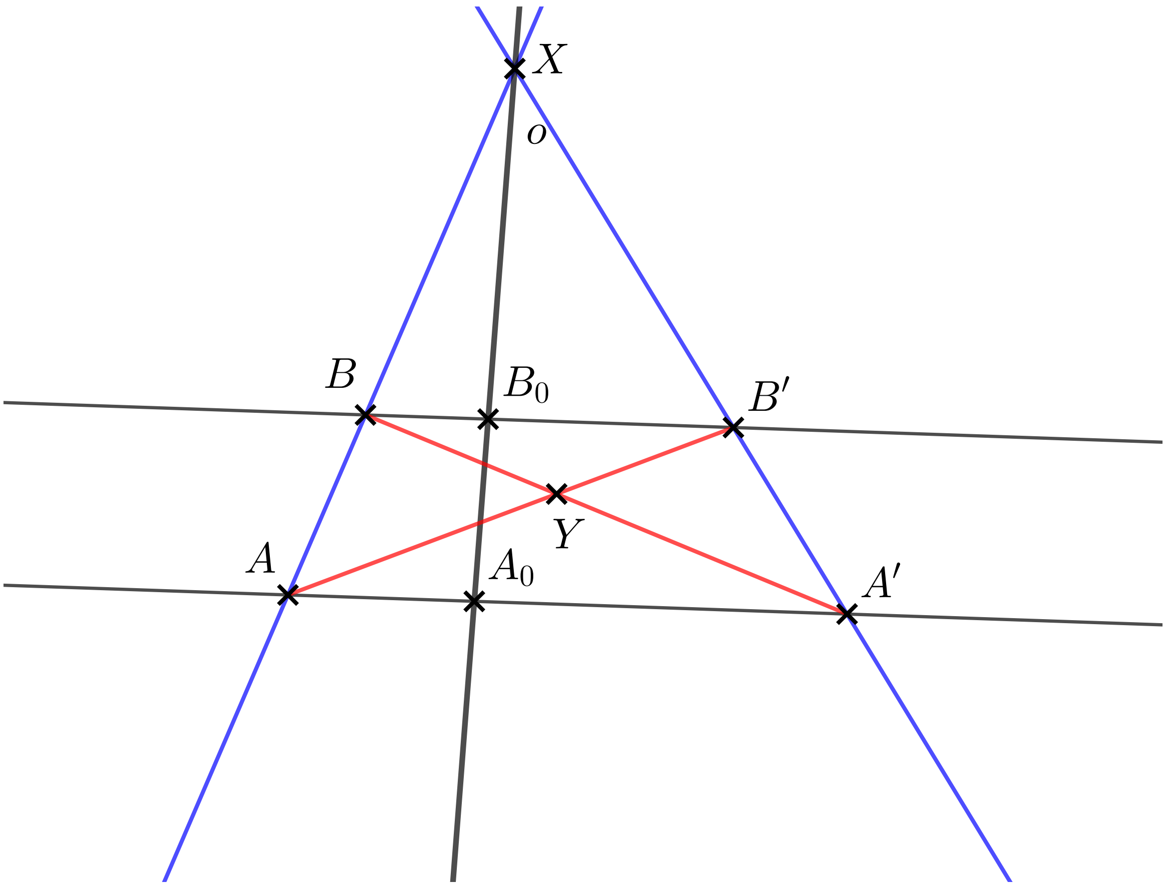
1. V rovině je dán ostrý úhel $\gamma = \sphericalangle XCY$ a jeho vnitřní bod T. Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, jehož vrcholy leží na ramenou úhlu γ tak, že $A \in \overrightarrow{CX}, B \in \overrightarrow{CY}$ a bod T je jeho těžiště.
Rozbor: To, že máme těžiště navádí v úloze na použití stejnolehlosti. Jednak můžeme sestrojit střed strany $\overline{AB}$. Víme, že vrcholy A, B leží na ramenou. Stačí si uvědomit, že bod B je obrazem bodu A v stejnolehlosti se středem S_{AB} a keoficientem -1, neboli středová souměrnost. Polopřímka $\overrightarrow{CX}$ je množinou všech možností poloh bodu A, zobrazíme ji v uvedené stejnolehlosti na $\overrightarrow{C'X'}$ a stane se tak množinou možností poloh bodu B. Bod B navíc leží na $\overrightarrow{CY}$. Proto $B \in \overrightarrow{C'X'} \cap \overrightarrow{CY}$. Bod A už sestrojíme jednoduše.
Postup konstrukce:
   1) zadané prvky $\gamma = \sphericalangle XCY, T$
   2) S_{AB} jako obraz T ve stejnolehlosti se středem C a koeficientem $\frac{3}{2}$
   3) $\overrightarrow{C'X'}$ jako obraz $\overrightarrow{CX}$ v stejnolehlosti se středem S_{AB} a koeficientem -1
   4) $B; B \in \overrightarrow{C'X'} \cap \overrightarrow{CY}$
   5) $A; A \in \overrightarrow{CX} \cap \overleftrightarrow{BS}$
   6) $\triangle ABC$

   Diskuze: Existence řešení: Jsou-li body A a B sestrojené, tak jsou nekolineární s C protože leží na dvou různých ramenech ostrého úhlu, bod 7) je tedy v pořádku. Bod 6) je proveditelný, když platí předešlé body konstrukce, a A existuje, protože A je obrazem B ve stejnolehlosti. Aby platil bod 5) musí se uvedené polopřímky protnout, to se stane vždy, protože C' je vnitřním bodem úhlu γ (to plyne z toho, že S je vnitřním bodem úhlu γ a to je už zřejmé ze sestrojení v 2)) a $\overrightarrow{C'X'}$ má opačnou orientaci jako $\overrightarrow{CX}$. Všechny body je vždy možné provést a úloha má vždy řešení. Počet řešení je zřejmý z toho, že ve všech bodech postupu je každý prvek vytvořen jednoznačně (jsou to jen průniky přímek, resp. jejich částí). Úloha je polohová, má vždy právě jedno řešení.



2. V rovině jsou dány rovnoběžky AA', BB' (dle obrázku).
   (a) Sestrojte osu o osové afinity s charakteristikou $k = -2$, která zobrazuje $A \to A'$; $B \to B'$.
   (b) Označme X, Y průsečíky: $X = AB \cap A'B'$ a $Y = AB' \cap A'B$. Určete, zda body X a Y leží na ose o a své tvrzení zdůvodněte.

Konstrukci proveďte do zadání.



a) Sestrojíme body A_0 a B_0 tak, aby $(A'A; A_0) = (B'B, B_0) = -2$. Spojnice $\overleftrightarrow{A_0B_0}$ je osou afinity.

b) Bod X je zřejmě samodružným bodem protože leží na průniku $\overleftrightarrow{AB}$ a jejího obrazu $\overleftrightarrow{A'B'}$, a tedy leží na ose. Bod Y leží na těžnici trojúhelníku $\triangle AA'X$. To lze ověřit např. užitím Cevovy věty, kde pro průsečík $S \in \overleftrightarrow{XY} \cap \overleftrightarrow{AA'}$ platí $(AA'; S)(A'X; B')(XA; B) = -1$, přičemž $(A'X; B')(XA; B) = 1$ a tedy $(AA'; S) = -1$ a z toho už plyne, že Y leží na těžnici. Osa afinity ale není těžnicí (zřejmé z $(A'A; A_0) = -2 \neq -1$). Y neleží na ose.