

KAPITOLA I.

Některé pojmy základní a úmluvy.

1. *Deskriptivní geometrie jest věda, která na základě konstrukce a pomocí rysův určuje útvary prostorové dle tvaru, velikosti a polohy jinými útvary prostorovými, vzájemné vztahy jejich zkoumá a úlohy k nim se vztahující řeší.*

Útvary, které se určují, nazýváme *útvary původními* čili *originály*, útvary, jimiž se určování to děje, nazýváme útvary odvozenými čili jejich *obrazy* v širším smyslu. Takový obraz odvozujeme tím způsobem, že prvkům útvaru původního přiřadujeme dle určitého zákona mathematického prvky útvaru jiného, který volíme za útvar základní čili obrazný.

Je-li útvar obrazný plochou, a zvláště, jak bývá pravidlem, je-li rovinou, pak nazýváme jej *průmětnou* a obraz řečeným způsobem odvozený *průmětem* čili *projekcí* útvaru původního, kdežto výkon, jímž se odvozování průmětu děje, nazýváme *promítáním*. Způsob odvozování průmětu sluje *methodou promítání*.

Avšak i v případě obecném vyjadřujeme vzájemné vztahy originálu a obrazu vždy prostřednictvím průmětů; promítáme totiž originál i obraz a ze souvislosti průmětů soudíme o jejich souvislosti.

Abychom pojmy o útvarech, jež jsme si prostřednictvím průmětů zjednali, zachovali trvale, používáme přesných modelů průměten zhotovených z těles fysických, na jejichž povrchu pak vyjadřujeme průměty s možnou a přípustnou věrností a přesností graficky pomocí rysů. Takové věrné spodobení průmětu nazýváme *grafickým obrazem* originálu čili krátce *obrazem* jeho v užším slova smyslu, a povrch tělesa fysického, pokud vyjadřuje průmětnu, nazýváme *nákresnou*.

Omezíme se zde, jak se dosud vůbec činí, na průměty rovinné a tedy na rysy, provedené na rovné nákresně.

2. Postup při provádění úkolů deskriptivní geometrií kladených můžeme vytknouti takto:

1. Zjednáme si údaje, které útvar prostorový a způsob odvozování určují, t. j. definici originálu a odvozování (methody promítání).

2. Sestrojíme průmět, dle potřeby i několik průmětů útvaru původního, a není-li průmětna útvarem základním, též útvaru odvozeného.

3. Vyjádříme průměty graficky.

Pojímáme-li deskriptivní geometrii ve vytčené všeobecnosti, jest vědou čistě geometrickou, beroucí se za stejným cílem jako každé geometrické badání vůbec. Od jiných druhů geometrie liší se toliko prostředky, jimiž cíle svého hledí dosíci, a jest omezena působností těch prostředků.

3. Deskriptivní geometrie vznikla z praktických potřeb technických a jest zároveň mathematickou vědou užitou, sloužíc různým oborům věd technických a umění. V této příčině zabývá se

1. grafickým vyjadřováním předmětů skutečných čili hotovením *plánů*, z nichž tvar i rozměry předmětu jak v celku tak i v jednotlivostech způsobem snadným poznati lze;

2. sdělováním *návrhů* čili *projektů* předmětů myšlených, dle nichž by se provéstí mohly.

K snadnějšímu vystižení předmětů buď pomocí grafických obrazův aneb pomocí modelů vyjadřujících útvary odvozené vyžaduje hlavně umění při těchto obrazích a modelech, aby působily dojem pokud možno souhlasným s oním, jež vzbuzují originály samy, jsou-li též fysickými tělesy aneb jež by mohly vzbuditi, kdyby se pomocí těles fysických uskutečnily. Úkolem prvním zanášá se *perspektiva* v užším slova smyslu, úkolem druhým tak zvaná *perspektiva reliefní*. Poněvadž zjev tělesa fysického a tedy také dojem jeho podmíněn jest jeho osvětlením, jest *sestrojování stínu* a *theorie osvětlení ploch* též částí deskriptivní geometrie. Že však dojmy podmíněny jsou nejen zákony geometrickými, nýbrž i jistými zákony optickými a fysiologickými, dochází tím deskriptivní geometrie dalšího rozšíření svého rozsahu, tvoříc takto vědecký podklad umění výtvarného vůbec.

4. Z uvedených základů seznáváme, že hlavními a nejdůležitějšími methodami zobrazovacími jsou ty, které jsou odvozeny abstrakcí z průběhu vidění; metody ty se nazývají *elementárními methodami zobrazovacími*; jsou to: promítání centrální, klinogonální a orthogonální, jakož i prostorová homologie čili reliefní perspektiva v širším slova smyslu.

Předpokládáme-li pevnou rovinu za průmětnu, vznikne *průmět centrální* čili *středový* do této roviny, když daným bodem pevným, mimo rovinu ležícím, myslíme si pomocné přímky, procházející body útvaru původního a určíme jejich body průsečné s průmětnou; průmět *klinogonální* čili *šikmý*, též *kosouhlý* vzniká, když pomocné přímky jsou stejnosměrné a v libovolném úhlu k průmětně nakloněny; jsou-li však k průmětně normální, vzniká promítání *orthogonální* čili *pravoúhlé*. Promítání klinogonální a orthogonální shrnujeme též společným názvem *promítání paralelního*. Pomocné přímky nazýváme *přímkami promítajícími*, pevný bod při promítání centrálním *středem promítání* a stálý směr při promítání paralelním *směrem promítání*.

Průmět přímky p obdržíme jakožto souhrn průmětů jejich bodů. Veškeré promítající přímky těch bodů tvoří rovinu, kterou nazýváme *rovinou promítající přímky p* . Průmět přímky p obdržíme tedy též jako průsek její roviny promítající s průmětnou. Je-li však přímka p sama přímkou promítající, pak lze každou rovinu jí položenou považovati za její rovinu promítající, tak že průmětem jejím jest každá přímka v průmětně procházející bodem, v němž přímka p průmětnu seče, kdežto bod ten jest průmětem veškerých bodů na p .

Promítání centrální, klinogonální a orthogonální jmenujeme pak důsledně *elementárními methodami promítání*.

Při prostorové homologii přiřadujeme k bodům originálu body v prostoru též pomocí přímek z pevného středu S vycházejících aneb přímek stálého směru tak, aby ku každé přímce útvaru původního přiřaděna byla opět přímka v útvaru odvozeném a naopak. Je-li dán pevný střed S , pak se odvozování obrazu děje pomocí dvou rovin R . U rovnoběžných, bodu S neobsahujících; k libovolné přímce p příslušná přímka p^+ prochází bodem, v němž p seče rovinu R , a bodem, v němž přímka p bodem S vedená a ku p rovnoběžná seče rovinu U ; k libovolnému bodu A najdeme příslušný bod A^+ , když vedeme bodem A libovolnou přímku p a odvodíme příslušnou jí přímku p^+ . Přímka, která spojuje bod S s bodem A , seče p^+ v bodě A^+ .

Je-li však dán pevný směr, děje se odvozování pomocí pevné roviny R tak, že vedeme bodem A přímkou toho směru; seče-li R v bodě A_0 , ustanovíme na přímce té bod A^+ tak, aby poměr $\frac{A_0A}{A_0A^+}$ měl stálou hodnotu.

V prvním případě nazýváme *homologii středovou* čili *centrální*, v druhém případě *paralelní*. Způsob odvozování obrazu z originálu různí se zde v obou případech. Abychom měli pro oba případy jednotné odvození, myslíme si roviny R , A , A^+ k sobě rovnoběžné aneb v téže přímce se protínající a nazveme přímkou, které v prvním případě procházejí středem S , v druhém případě mají stálý daný směr, *paprsky homologie*.

K libovolné přímce p sestrojíme pak odvozenou p^+ tím, že vedeme bodem A_π , v němž p rovinu A seče, paprsek homologie a protneme jej rovinou A^+ v bodě A_π^+ ; přímkou p^+ spojuje bod, v kterémž p rovinu R protíná s bodem A_π . K danému bodu L sestrojíme příslušný L^+ , když vedeme jím libovolnou přímkou l a sestrojíme k ní přímkou příslušnou l^+ , pak jest L^+ bodem, v němž paprsek homologie seče přímkou l^+ .

V jednom i druhém případě přísluší každému bodu, každé přímce nebo rovině útvaru původního jeden bod, jedna přímka nebo rovina útvaru odvozeného a naopak. *Korrespondenci* čili *souvztažnost* takovou nazýváme *jednoznačnou* čili *dokonalou*.

Příslušné konstrukce provádíme však i zde prostřednictvím průmětů výše uvedených: centrálního nebo paralelního.

V každém případě však jest nutno, aby nejen útvar odvozený dokonale určen byl z daného originálu, ale také naopak originál z útvaru odvozeného. Když tedy jediný průmět nemůže útvar původní určit úplně, užívá se průmětů dalších; pravidlem děje se tak spojením dvou průmětů v téže průmětně aneb v různých průmětnách, z daného originálu odvozených.

5. K elementárním methodám promítání a k řešení úloh o útvarech prostorových pomocí takových průmětů jsme však též vedeni tenkrát, když se pokoušíme o to, abychom konstrukce, které se vztahují k útvarům prostoru, majícím tři hlavní rozměry na průmětech nezávisle, prakticky provedli tím, že je redukuje na nejjednodušší, elementární operace konstruktivní, které nazýváme *konstruktivními postuláty*.

Euklid vytkl pro rovinu tři takové postuláty: 1. že jest možno každý bod s každým jiným bodem spojití přímkou, 2. že

jest možno omezené části přímek libovolně prodloužiti a 3. že jest možno kolem každého bodu jakožto středu opsati kružnice každého poloměru.

Pro prostor předpokládá, že jest možno třemi body v obecné poloze v prostoru ležícími položití rovinu a v ní pak provéstí konstrukce geometrie rovinné, kterýžto předpoklad nazývá se *postulátem stereometrickým*.

Realisování myšlených konstrukcí prostorových na základě těchto postulátů nesouvisí ovšem nikterak s postupem vidění. Tyto postuláty je však snadno upravití a redukovati tak, že veškeré operace geometrie Euklidovy lze omeziti na jednu nebo dvě roviny pevné, čímž jsme přímo vedeni k elementárním methodám promítání. To nás pak vede ku poznání, že metody tyto jsou ze všech též nejpřirozenější.

Abychom se o řečených věcech přesvědčili, hleďme provéstí vytčenou redukci, a to zde jen pro případ, že se omezíme na jedinou rovinu pevnou, kterou volíme jakožto *rovinu konstrukční*. Pak lze Euklidovy postuláty konstruktivní pro prostor omeziti těmito jednoduchými požadavky.

1. *Budiž v prostoru možno spojovati body spolu přímkami, přímky ty libovolně prodloužiti a úsečky na nich ležící libovolně přenášeti.*

2. *Budiž možno konstruktivním postulátům rovinným v jediné pevné rovině konstrukční vyhověti.*

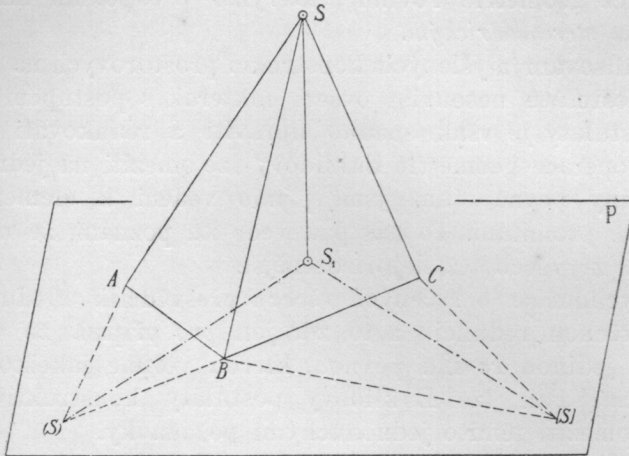
Základní konstrukce, pomocí jejíž se konstrukce prostorové převádějí na vytčené postuláty, jest sestrojení paty S_1 kolmice z libovolného bodu S na rovinu konstrukční P spuštěné.

Především stačí postuláty uvedené ku provedení této konstrukce, jak patrné z toho co následuje. (Obr. 1.)

Abychom totiž S_1 sestrojili, můžeme zvoliti v P libovolné tři body A, B, C a spojití je přímkami s S . Úsečky AS, BS, CS myslíme si přeneseny do P a opišeme v rovině P kolem bodů A, B, C kružnice, mající za poloměry příslušné délky $\overline{AS}, \overline{BS}, \overline{CS}$. Budiž (S) jeden z průsečíků prvních dvou kružnic těchto a $[S]$ jeden z průsečíků kružnice druhé a třetí. Dále spusťme v rovině P kolmici z (S) na AB a z $[S]$ na $[BC]$, pak jest hledaný bod S_1 průsečíkem obou kolmic.

Neboť trojúhelník $AB(S)$ můžeme obdržeti, otočíme-li trojúhelník ABS kolem přímky AB přiměřeně tak, že zapadne do roviny P , rovněž tak můžeme trojúhelník $BC[S]$ obdržeti otočením trojúhelníku BCS kolem BC . Při prvním otočení pohy-

buje se bod S v rovině $SS_1(S)$, jejíž průsečnice $(S)S_1$ s P jest normální k AB ; při otočení druhém S pohybuje se v rovině $SS_1[S]$, jejíž průsečnice $[S]S_1$ s P jest normální k BC . Tím jest správnost naší konstrukce zřejmá.



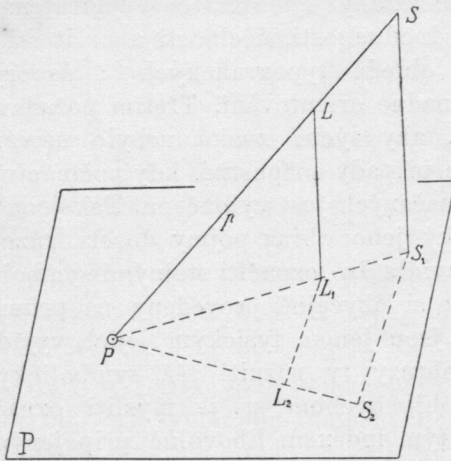
Obr. 1.

Při žádané redukci konstruktivních postulátů bude se zajisté zhusta vyskytovat úloha, žádající průsečík P dané přímky p mimo P ležící s touto rovinou konstrukční, kterou dlužno opět provést s omezením na řešené postuláty (obr. 2.). To se stane tím, že zvolíme na přímce p libovolné dva body S a L , vyhledáme paty S_1, L_1 kolmic s bodů těch na P spuštěných dle konstrukce předcházející a pak v rovině P vztýčíme třeba ku přímce S_1L_1 kolmice v S_1 a L_1 , na něž přeneseme úsečky $\overline{SS_1}, \overline{LL_1}$ do S_1S_2, L_1L_2 a to v stejném smyslu, leží-li body S, L na téže straně roviny P , jinak v opačných smyslech. Konečně spojíme body S_2, L_2 . Spojnice seče přímku S_1L_1 patrně v bodě hledaném P .

O správnosti této konstrukce přesvědčíme se opět, myslíme-li si rovinu SLL_1S_1 otočenu kolem L_1S_1 až zapadne do roviny P .

Konstrukci tuto bude nutno při přenášení konstrukcí do roviny P zajisté často prováděti; ale poněvadž jest sama o sobě dosti složitá, bude snahou naší konstrukce žádané tak uspořádati, abychom ji mohli omeziti na určité případy zvláštní.

I pokusíme se nejprvé o to, vystačíme-li s tím omezením, že konstrukce použijeme pouze pro přímky, procházející pevným bodem S mimo P ležícím. Neboť když pro bod S jednou pro vždy stanovíme patu S_1 , postačí, když pro každou přímku p bodem tím vedenou stanovíme jen pro jediný od S_1 různý bod L příslušnou patu, abychom obdrželi průsečík P přímky p s rovinou P . Tím však jsme ihned vedeni ku pojmu elementárních projekcí, v našem případě především ku průmětu centrálnímu. Naopak konstrukce na této metodě promítání založené jsou toho druhu, že z nich možnost a správnost svrchu výtčené redukce ihned plyne.



Obr. 2.

6. Deskriptivní geometrie předpokládá pouze znalost elementární planimetrie a stereometrie. Proto se obírá též vyvozováním všech pojmův a pouček, které v nich nejsou obsaženy a jichž jest potřebí k vyšetření konstrukcí a k řešení úloh v ní se vyskytujících, čímž právě se stává vědou samostatnou, rozvoje schopnou. Vyvozování to provádí deskriptivní geometrie hlavně na základě method promítání a cestou po výtce geometrickou, zkoumajíc v prvé řadě ty vlastnosti útvarů geometrických, které se neruší promítáním. Vlastnosti takové nazýváme *promětnými* čili *projektivními*. Zkoumáním takových vlastností deskriptivní geometrie tvoří též základ *geometrie polohy*, která jest jejím rozšířením v tom směru, že přiřadujeme jeden

útvary prostorové ke druhému bezprostředně, aniž jsme je dříve vyjadřovali průměty rovinnými, ba ani k možnosti takového vyjadřování vůbec zření nemajíce.

Deskriptivní geometrie zabývá se též vyjadřováním a určováním metrických vlastností, přináležejících útvarům prostorovým, tak že analytické relace míry předem nevyklučuje, ačkoli lze relacím těm dáti výraz ryze geometrický, protože geometrie polohy pojímá v sobě geometrii míry jako část. Užívání analytických relací omezuje se tu však jen na relace jednoduché a na případy, v nichž to jest přiměřeno povaze úlohy, která se řeší. Jinak užívá se těch relací jen mimochodem.

7. Pokud se týče znaků, jimiž útvary prostorové označujeme aneb jimiž různé vztahy jejich krátce vyjadřujeme, klademe na ně požadavek jednoduchosti, účelnosti a určitosti. První z nich jest žádoucí z ohledů typografických a úspory, druhý pro přehlednost a snadné orientování. Třetím požadavkem se může zabrániti tomu, aby týchž znaků nebylo užíváno pro různé pojmy, vyjímaje případy přípustné, kdy počínáním takovým zámena pojmů označených jest vyloučena. Tak jsou na př. průmět útvaru a grafický jeho obraz pojmy docela různé, které však bez závady zpravidla lze označiti stejnými symboly; vždyť konstrukce myslíme si obyčejně provedeny na průmětech, kdežto obrazy grafické jsou jenom fysickým jejich vyjádřením. Kdybychom chtěli obrazy ty různiti též symbolicky od průmětů příslušných, mohli bychom si je mysliti označeny symboly průmětů s určitým indexem libovolně připojeným, a poněvadž by pak každý symbol obrazu byl opatřen takovým indexem, nemusili bychom jej pokaždé zvlášť připisovati, nýbrž mohli bychom jej jednou pro vždy vyznačiti nápadně na některém místě obrazu a vztahovati jej ke všem ostatním znakům.

Abychom shora vytčeným požadavkům pohodlným způsobem učinili zadost, ponecháváme si jakousi volnost v označování od případu k případu, při čemž sluší podotknouti, že pohodlnost v označování a ve čtení znaků řídí se hlavně též zvykem.

Zde uvedeme jen takové znaky, jichž se v knize této zhusta užívá, a to pro orientaci hlavně těm, již jsou zvyklí jinému označování.

Budeme obyčejně označovati:

body velkými literami latinskými *A, B, . . .*,
přímky malými literami latinskými *a, b, . . .*,

roviny a plochy velkými literami písma, zvaného antikva
 A, B, \dots ,

úhly malými literami řeckými $\alpha, \beta \dots$, pravý úhel jakožto jednotku míry úhlové literou ρ ,

délky, nemůže-li tím vzniknouti žádný omyl, malými písmeny latinskými jako přímkou; leží-li na přímce určitá úsečka hlavní, značíme s touž výhradou délku její týmž písmenem jako přímkou.

Útvar, který jest určen útvary jinými, označujeme též tak, že znaky jejich napíšeme jednoduše vedle sebe. Zvláště pak značíme spojení několika prvků útvarem jimi určeným pouhým seřazením písmen je označujících a prvky průsečné tím, že mezi symboly je určující klademe tečky. Čteme tudíž symboly:

$p = AB$: přímka p jest spojnicí bodů A, B ,

$R = ABC = Ab$: rovina R spojuje body A, B, C aneb bod A s přímkou b ,

$S = ab$: rovina S jest spojnicí přímek a, b ,

$B = p \cdot q = r \cdot A = L \cdot M \cdot N$: bod B jest průsečíkem přímek p, q , dále průsečíkem přímky r s rovinou A a konečně průsečíkem rovin L, M, N ,

$p = A \cdot B$: přímka p jest přímkou průsečnou rovin A, B .

Podle toho značí $AB \cdot CD$ bod průsečný dvou přímek se protínajících, z nichž prvá spojuje body A, B , druhá body C, D .

Shrnujeme-li útvary, které mají nějaké prvky společné, pak je označujeme též tak, že k symbolům společných prvků připojíme do závorky symboly ostatních prvkův určujících. Tak značí $S(a, b, c)$ tři roviny, které spojují přímky a, b, c s bodem S , kdežto $S(abc)$ značí trojstěn, mající vrchol S , jehož stěny obsahují přímky a, b, c , libovolně v prostoru položené.

Při promítání orthogonálním na dvě průmětny k sobě kolmé značíme zvláště

průmětny tyto P_I, P_{II} , průsečnou čili společnou osu jejich x ;

dále A' průmět bodu A do P_I a A'' do P_{II} ;

obdobně značíme p', p'' průměty přímky p ;

Q_I, Q_{II} body stopní přímky q ;

r_I, r_{II} přímky stopní roviny R , $s_{I, II}$ přímky stopní roviny S_I , obdobně u_I, u_{II} křivky stopní plochy U .

Pro kolmou vzdálenost užíváme znaku \perp ; značí tedy $B \perp p$ vzdálenost bodu B od přímky p , $B \perp R$ vzdálenost bodu B od roviny R .

Dva body A, B na přímce určují úsečku; \overline{AB} značí její délku, tak že zde ani ke smyslu úsečky ani ku poloze přímky, na níž úsečka leží, nepřihlížíme, kdežto AB značí jak délku úsečky, tak i polohu přímky, na níž úsečka ta leží, jakož i směr na ní vytčený od A k B ; úsečku takto v prostoru stanovenou nazýváme vektorem. $AB = CD$ znamená rovnost vektorů AB, CD , t. j. že přímky AB, CD jsou rovnoběžny a úsečky AB, CD že mají stejnou délku a stejný smysl; konečně znakem $|AB|$ vyjadřujeme vektor bez ohledu na smysl. Uvedených rozdílů užíváme jmenovitě tenkrát, kde toho pro uvarování omylu potřebí.

8. Grafické obrazy bodů nazýváme obyčejně *tečkami*, grafické obrazy přímek a křivek *čarami*. Chceme-li obraz takový učiniti názorným, pokud to způsob zobrazování vůbec dovoluje, představujeme si, že by útvar, o jehož vyjádření se v prvé řadě jedná, jakož i příslušné průměty byly realizovány útvary hmotnými; dále abstrahujeme proces vidění, předpokládajíc tak zvané oko promítající tak, aby paprsky zorné se stotožňovaly s přímkami promítajícími. Při promítání centrálním paprsky zorné směřují od středu promítání k průmětně. Při promítání paralelním probíhají ve směru přímek promítajících, a to v určitém smyslu, který se od případu ku případu stanoví. Při promítání orthogonálním na dvě roviny k sobě kolmé P_I, P_{II} dbáme toho, že osa x každou z nich dělí na dvě části $+P_I, -P_I$ a $+P_{II}, -P_{II}$, z nichž prvou považujeme za kladnou, druhou za zápornou. Tu obyčejně se předpokládá, že působí paprsky zorné ve smyslu kolmic, které vycházejí z libovolného bodu ležícího v části prostoru, omezené polorovinami $+P_I, +P_{II}$, a směřují k rovinám P_I, P_{II} . Ale někdy volí se pro paprsky zorné smysl opačný, buď vzhledem k průmětně P_I nebo vzhledem k P_{II} aneb konečně vzhledem k oběma. Kdybychom prvotní volbu nazvali vzhledem ku P_I pohledem shora, vzhledem ku P_{II} pohledem zpředu, pak bychom volbu druhou nazvali vzhledem ku P_I pohledem zdola, vzhledem ku P_{II} pohledem ze zadu.

Pro úplnější názor vyjadřujeme někdy buď v částech nebo v celku pohledy oba.

Myslíme-li si libovolný paprsek zorný prořat útvarem prostorovým, o jehož vyjádření se jedná, a zároveň některou průmětnou a sledujeme-li na paprsku tom body průsečné od průmětny té ve smyslu opačném onomu, který paprsku zornému

přináleží, tu poslední z nich jest vzhledem k vytčené průmětně viditelný, kdežto ostatní jsou zakryty. Při promítání na dvě průmětny k sobě kolmé P_I, P_{II} obyčejně mimo to ještě předpokládáme, že všechny útvary, které se nenaskýtají v části prostoru omezené polorovinami $+P_I, +P_{II}$, jsou taktéž neviditelné.

Při rýsování čar přihlížíme k tomu, jsou-li to *čáry hlavní* či *čáry pomocné*; oněmi vyjadřují se graficky útvary dané aneb žádané, všechny ostatní čáry jsou čarami pomocnými. Čáry hlavní vytahujeme plynně, pokud vyjadřují útvary viditelné, tečkovaně, pokud vyjadřují útvary zakryté. Čáry pomocné vytahujeme buď čárkovaně aneb klade-li se na ně důraz, smíšeně malými čárkami a tečkami. Někdy vytahujeme čáry pomocné barvou; ale pak se to děje veskrz plynně. Tečky, které vyjadřují body, na něž chceme zvláště upozorniti, učiníme nápadnými tím, že kolem nich opíšeme malé kroužky.
