# Metody dokazování - 4. sada
# důkaz indukcí

1. $\heartsuit$, $\forall r, n \in \mathbb{N} : (a^r)^n = a^{rn}$.

2. $\heartsuit$, $\forall n \in \mathbb{N}$

   a) $31 \mid (5^{n+1} + 6^{2n-1})$.

   b) $73 \nmid (2^{3n} + 3^{4n})$.

3. $\heartsuit$, že počet uhlopříček v n-úhelníku je $\frac{n(n-3)}{2}$

4. $\heartsuit$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

   a) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

   b) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$

   c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(2n^2 + 3n + 1)$

   d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

   e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$

   f) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

5. V rovině je dán konečný počet přímek, které rozdělují rovinu na jednotlivé oblasti. Oblasti, které mají společnou úsečku, nebo polopřímku nazveme sousedními. $\heartsuit$, že takto vzniklé oblasti lze obarvit dvěma barvami tak, že libovolné dvě sousední oblasti mají různou barvu.

6. V rovině je dán konečný počet přímek, které rozdělují rovinu na jednotlivé oblasti. $\heartsuit$, že tyto přímky dělí rovinu na nejvýše $\frac{1}{2}n(n+1) + 1$ oblastí.

7. V rovině je dáno $n \geq 4$ bodů takových, že každé 4 z nich jsou vrcholy konvexního čtyřúhelníku. $\heartsuit$, že dané body jsou vrcholy konvexního $n$-úhelníku.

8. $\heartsuit$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x > -1 : (1+x)^n \geq 1 + xn$.

9. $\heartsuit$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} : \sin^{2n} x + \cos^{2n} x \leq 1$.

10. † $\heartsuit$, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R} : (a + a^{-1}) \in \mathbb{Z} \Rightarrow (a^n + a^{-n}) \in \mathbb{Z}$.

11. $\heartsuit$, že $2^{n+5} + 5^n$ není pro žádné $n \in \mathbb{N}$ prvočíslem.

12. † $\heartsuit$ : Jsou-li $x_1, x_2 \ldots, x_n$ kladná reálná čísla, pro něž platí $x_1 x_2 \ldots x_n = 1$, potom platí $x_1 + x_2 + \ldots x_n \geq n$.

13. $\heartsuit$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 : \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$.

14. † $\heartsuit$, $\forall n \in \mathbb{N} : (1 + 1^{-3})(1 + 2^{-3}) \ldots (1 + n^{-3}) < 3$

15. † Je dáno $n$ čtverců. $\heartsuit$, že je lze rozdělit na části tak, aby z nich bylo možno sestavit jediný čtverec.

16. † Kruh je rozdělen na $2^n$ výsečí. Rozmístěte všechna $n$-ciferná čísla, jež mají jen číslice 1 a 2, tak, aby se čísla v sousedních výsečích lišila jen v jedné číslici.